Kordula Świętorzecka

LCG - logika zmian

Filozofia Nauki 15/1, 19-46

2007

Filozofia Nauki
Rok XV, 2007, Nr 1(57)

Kordula Świętorzecka

LCG — logika zmian[1]

WSTĘP

Przedmiotem prezentowanej pracy jest pewna konceptualizacja zjawiska zmienności sytuacji, opisana przez logikę zmiany LCG i zamierzoną dla niej semantykę. Proponowane ujęcie zmiany jest wyznaczone przez szereg założeń metateoretycznych, wśród których są także takie, które mają charakter filozoficzny. W ramach tych ostatnich rozstrzygamy po pierwsze, że tym, co podlega interesującym nas zmianom, są pewnego rodzaju *kompleksy sytuacji elementarnych*. Sytuacje elementarne mają w zamierzonej interpretacji rachunku LCG status atomów i nie są w niej definiowane. Można jednak powiedzieć, że intuicje filozoficzne związane z ich naturą odwołują się do Arystotelesa ontologii substancji, na której oparta jest Arystotelesowska teoria zmiany substancjalnej.[2] Konstruowana semantyka sytuacyjna stwarza co prawda możliwość mówienia nie tylko o takich zmianach, które bierze pod uwagę sam Arystoteles. Tę różnicę traktujemy jednak jako wynikającą z faktu, iż system Arystotelesa ma inny status semantyczny niż system LCG — pierwszy z nich jest teorią o charakterze pozalogicznym, drugi zaś rachunkiem logicznym jedynie inspirowanym pojęciami ontologii klasycznej. Aby wskazać owe inspiracje, powiedzmy, że *istniejące sytuacje elementarne* — tzw. *fakty elementarne* — mogą być uważane za odpowiedniki *istniejących istot indywidualnych* — tzw. *substancji pierwszych* (które

---

[1] Niniejszy tekst został zaprezentowany na XI Konferencji pt. *Zastosowania Logiki w Filozofii i Podstawach Matematyki* organizowanej przez Uniwersytet Wrocławski, Uniwersytet Śląski i Uniwersytet Opolski, która odbyła się w dniach 8-12 maja 2006 r. w Szklarskiej Porębie.

[2] Taki związek wydaje się uzasadniony już choćby w kontekście przedstawionych w [Wolniewicz 1968] porównań Arystotelesowskiej ontologii substancjalnej z rekonstrukcją ontologii sytuacyjnej *Traktatu* L. Wittgensteina dokonaną przez B. Wolniewicza.

według koncepcji Arystotelesa są podmiotami zmian substancjalnych). Zjawisko zmiany polegające na tym, iż dana substancja a_1 *ginie* i zamiast niej *powstaje* nowa substancja a_2 będziemy rozumieć w naszej semantyce tak, że fakt elementarny *istota* a_1 *istnieje* staje się fikcją (faktem staje się więc to, że *istota* a_1 *nie istnieje*) i powstaje nowa sytuacja — faktem staje się to, że *istota* a_2 *istnieje*.

Tego rodzaju zmianę można przedstawić za pomocą diagramu, w którym symbol $\longrightarrow$ oznacza relację *stawania się*, α_1 i α_2 zaś mają opisywać odpowiednio sytuacje: *istota* a_1 *istnieje*; *istota* a_2 *istnieje*:

$$\alpha_1 \longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2$$

Rys. 1a

Aby zobrazować wielostopniową zmianę, polegającą na *przeistaczaniu się* kolejnych substancji: $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$, należałoby nasz diagram «przedłużyć» w następujący sposób:

$$\alpha_1 \longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \alpha_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \neg\alpha_3 \wedge \ldots \wedge\neg\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n \longrightarrow \ldots$$

Rys. 1b

Łańcuch przedstawiony na powyższym rysunku będziemy dalej nazywać *historią* kolejnych sytuacji elementarnych (opisywanych przez zdania: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$) oraz ich kompleksów (którym odpowiadają koniunkcje pewnych zdań elementarnych oraz negacji innych).

Wobec tego, że efektem prezentowanych rozważań ma być jednak nie tyle konstrukcja jakiejś określonej pozalogicznej teorii zmiany, ile wyznaczenie rachunku logicznego (który można byłoby następnie rozszerzać do takiej teorii), w ramach proponowanej semantyki weźmiemy pod uwagę rodzinę wszystkich możliwych łańcuchów tego rodzaju jak przedstawia to nasz rysunek 1b. Sposób konstrukcji takiej rodziny historii sytuacji opiszemy w (1).

Drugie istotne założenie o charakterze filozoficznym, które przyjmujemy w prezentowanych rozważaniach, dotyczy związków ontologicznych zachodzących między zmianą a czasem i skutkuje wyborem jakościowego, a nie ilościowego sposobu opisu zmiany. Co do ilościowego aspektu opisu zmian, zgodnie z którym zmiana definiowana jest przez odwołanie się do pojęcia czasu lub innych pojęć temporalnych, podzielamy opinię Leona Koja — taka charakterystyka nie tyle wyjaśnia, czym jest w istocie zmiana, ile raczej pomaga rozwiązać problem jej ciągłości w związku z przyjętą strukturą czasową (por. [Koj, Modrzejewska 2002]). Tak właśnie można traktować precyzacje pojęcia zmiany w ramach rachunków temporalnych.[3] Z filozo-

[3] Takimi logikami są np. formalizmy J. Wajszczyka: rachunek zmian dychotomicznych (LZD) i rachunek zmian ciągłych (LZC), przedstawione w [Wajszczyk 1995] oraz proponowane przez tego autora rozszerzenia logik And Next G. H. von Wrighta i Ł4 J. Łukasiewicza razem z odpowiednimi

ficznego punktu widzenia, ilościowy opis zmiany można wiązać w naturalny sposób z newtonowską koncepcją czasu, zgodnie z którą czas jest ontologicznie pierwotniejszy względem zmiany. W naszej formalizacji przyjmujemy stanowisko odwrotne, kojarzone zazwyczaj z myślą Leibniza, a sformułowane już przez Arystotelesa:

> czas nie istnieje bez ruchu i bez zmian; a jest też oczywiste, że czas nie jest ruchem, lecz nie jest niezależny od ruchu ([Fizyka, ks. IV, 219a]).[4]

Przyjmując taki właśnie pogląd, zmianę (a przynajmniej pewien jej rodzaj) odnotujemy w języku konstruowanej logiki za pomocą terminu pierwotnego (jednoargumentowego spójnika C czytanego: *zmienia się to, że….*), użytego dalej do zdefiniowania pojęcia *bycia* (*bezpośrednio*) *późniejszym* (któremu odpowiada jednoargumentowy spójnik N — *następnie jest tak, że….*).[5] Zmiany odnotowywane funktorem C (*C-zmiany*) nie są jedynym rodzajem zmian, o których mówi się w prezentowanym formalizmie. Drugim rodzajem są tzw. *G-zmiany*. Intuicje wyznaczające sposób rozumienia C- i G-zmian można pokazać, odwołując się do rysunku 1a. O sytuacji α_1 powiemy, że podlega ona C-zmianie — będąc faktem, następnie staje się fikcją. Pojawienie się nowej sytuacji α_2 jest natomiast zmianą rodzaju G. W ramach proponowanej semantyki, w której bierzemy pod uwagę nie tylko historie takie jak przedstawia to Rys1b, obydwa rodzaje zmian będziemy pojmować szerzej: C-zmiany dzieją się wówczas, gdy fikcja staje się faktem lub gdy fakt staje się fikcją; G-zmiany związane są natomiast z powiększaniem się (w określony sposób) uniwersum sytuacji elementarnych, które jednak nie zawsze są faktami. Pierwotny funktor C zyska swoją aksjomatyczną charakterystykę w części (2) prezentowanej pracy — w rachunku LC. Jak pokażemy w (3), G-zmiany można opisać w pewnym definicyjnym rozszerzeniu logiki LC. To definicyjne rozszerzenie będziemy dalej nazywać *logiką zmian LCG*. Na koniec prezentowanych rozważań — w (4) — przedstawimy parę uwag dotyczących porównania systemu LCG z rachunkiem zmiany LNC — formalizacją zaprezentowaną w pracy pt. *Propozycja formalizacji pojęcia zmiany — rachunek LNC* ([Świętorzecka 2006]).

---

interpretacjami w algebrach temporalnych.

[4] Mówiąc o leibnizjańskim sposobie rozumienia pojęcia czasu, bierzemy raczej pod uwagę definicję czasu przez abstrakcję zaproponowaną przez Z. Augustynka w [Augustynek 1975] niż pogląd Leibniza, zgodnie z którym: *czas jest porządkiem następstwa rzeczy* (por. [Leibniz 1969]). Zgodnie z nią, czas byłby zbiorem momentów czasowych — klas abstrakcji relacji równoczesności w zbiorze zdarzeń (za Leibnizem przyjęlibyśmy, że jako indywidua istnieją jedynie zdarzenia).

[5] W warstwie syntaktycznej postępujemy tu tak, jak robi to Wajszczyk — w logikach LZD i LZC *zmiana* i *następstwo* są także odnotowywane za pomocą spójników jednoargumentowych. Brane pod uwagę terminy mają jednak inną interpretację w niniejszych rozważaniach niż ta, którą wyznacza się w formalizacjach Wajszczyka.

(1) SEMANTYKA PREZENTOWANEJ FORMALIZACJI

(1.1) Zamierzone struktury

Rozważmy pewien niepusty i uporządkowany zbiór sytuacji elementarnych, które opisywane są odpowiednio przez zdania proste: α_1, α_2,….. należące do zbioru ES, tj. ES=$\{\alpha_1, \alpha_2,\ldots\}$.[6]

Elementy zbioru ES są wzajemnie niezależne logicznie (na gruncie logiki klasycznej). Zbiór ES_{neg} jest zbiorem negacji wszystkich elementów zbioru ES, tj. $ES_{neg} = \{\neg\alpha_1, \neg\alpha_2, \ldots\}$.

Sytuacje złożone (kompleksy sytuacji elementarnych) są opisywane przez koniunkcje zdań należących do ES i ES_{neg} — tworzą one zbiór CS. Te elementy sumy: $ES \cup ES_{neg} \cup CS$, które są niesprzeczne (na gruncie klasycznej logiki), są zdaniami opisującymi *sytuacje globalne*. Długość koniunkcji opisującej daną sytuację globalną jest miarą złożoności tej sytuacji. Wzrost złożoności sytuacji globalnych jest związany z G-zmianami.

Powiedzmy, że zdanie elementarne α_1 i jego negacja $\neg\alpha_1$ opisują dwie najprostsze sytuacje globalne i tworzą zbiór $B_1=\{\alpha_1, \neg\alpha_1\}$.

Rozważmy następnie zdanie α_2. Zbiór B_2 jest wówczas zbiorem koniunkcji: $\alpha_1\wedge\alpha_2$, $\alpha_1\wedge\neg\alpha_2$, $\neg\alpha_1\wedge\alpha_2$, $\neg\alpha_1\wedge\neg\alpha_2$.

W ogólności możemy sformułować następującą definicję indukcyjną:

Definicja 1

$B_1=\{\alpha_1, \neg\alpha_1\}$,

$B_{n+1} = \{s\colon s \equiv (s_n\wedge\alpha_{n+1}) \text{ lub } s \equiv (s_n\wedge\neg\alpha_{n+1}), \text{ gdzie } s_n\in B_n\}$.[7]

Każdy zbiór B_n zawiera wszystkie koniunkcje długości n zbudowane ze zdań: α_1, …, α_n oraz ich negacji, które to koniunkcje opisują sytuacje globalne o stopniu złożoności n.

W każdym uniwersum B_n tylko jedna z koniunkcji do niego należących może być prawdziwa. Wówczas o sytuacji globalnej, która jest korelatem tej koniunkcji, będziemy mówić, że jest *faktem* lub *istnieje aktualnie*. Aby to wyrazić precyzyjniej, przyjmijmy, że dla każdego n ustalona jest funkcja φ^n rozumiana następująco:

Definicja 2

$\varphi^n\colon B_n \to \{0,1\}$ jest funkcją taką, że: $\exists!s\,(s\in B_n \text{ oraz } \varphi^n(s)=1)$.

Zgodnie z powyższą definicją, φ^n jest funkcją wyboru, która z każdego zbioru B_n wybiera dokładnie jedną koniunkcję. Dla n stopni istnieje dokładnie 2^n takich możliwych funkcji. Dla każdej z nich możemy następnie utworzyć funkcję, która każde-

[6] Nie rozstrzygamy, czy zbiór ES jest skończony, czy nieskończony.

[7] Symbol: $\equiv$ jest znakiem identyczności syntaktycznej.

mu n przyporządkuje opis aktualnie istniejącej sytuacji globalnej (tj. tę koniunkcję, dla której φ^n przyjęła wartość 1):

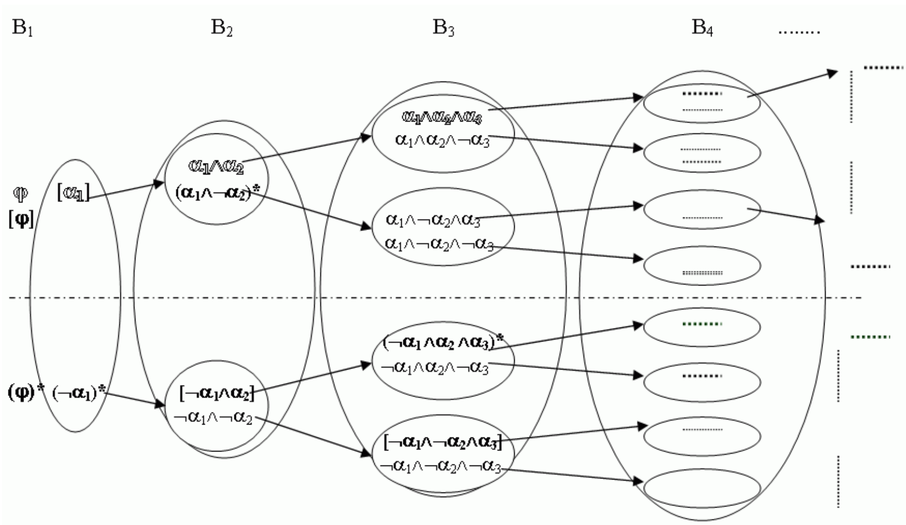
Definicja 3

Niech N będzie początkowym przekrojem zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ lub N=$\mathbb{N}$ (w zależności od liczby kardynalnej zbioru ES): $N=\{i\in\mathbb{N} : i \leq card(ES)\}$. Wówczas, dla każdej dowolnie ustalonej funkcji φ^n (dla każdego $n\in N$) istnieje funkcja φ: $N \to \cup_{n\in N}B_n$ taka, że:

$$\varphi(n)=s \text{ wtw, gdy } \varphi^n(s)=1.$$ [8]

Funkcja φ może być utożsamiana z możliwą *historią* transformacji (przemiany) danej sytuacji globalnej. Krótko mówiąc, przez *historię* sytuacji globalnej rozumiemy przebieg wartości funkcji φ. Zauważmy, że do stopnia n, można wyznaczyć $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ możliwych historii φ.

Dla większej przejrzystości naszych rozważań, brane pod uwagę struktury pokażemy za pomocą diagramu. Tym razem przyjmiemy, że za pomocą wyrażenia: $s_n \longrightarrow \{s_n\wedge\alpha_{n+1}, s_n \wedge \neg\alpha_{n+1}\}$ będziemy na diagramie odnotowywać fakt, iż dla danej sytuacji globalnej s_n o stopniu złożoności n daje się wygenerować dwie bardziej złożone od niej (o stopniu n+1) sytuacje globalne. Trzema różnymi rodzajami czcionek zaznaczamy początkowe wartości trzech przykładów różnych historii sytuacji globalnych — funkcji: φ, **[φ]**,**(φ)*** (α_1 jest wartością początkową funkcji φ oraz **[φ]**):



Rys 2.

[8] Kontekst użycia symbolu φ (z górnym indeksem lub bez niego) będzie decydował o znaczeniu — czy należy rozumieć go tak jak opisuje to Definicja 2, czy tak jak Definicja 3.

Jak widać na powyższym rysunku, zdania α_1 i $\neg\alpha_1$ generują dwa rozłączne drzewa.[9] Niektóre historie podążają za wybranym łańcuchem strzałek: $\longrightarrow$

Jeśli przyjmiemy, że gdy:

> s $\longrightarrow$ {s’, s’’}, wówczas będziemy pisać: s<s’ oraz s<s’’ (gdzie wyrażenie s<s* czytamy: *s jest początkową częścią s**); o takich historiach powiemy, iż:
>
> $s<s' \Rightarrow (\varphi^n(s)=1 \Leftrightarrow \varphi^{n+1}(s')=1)$.

W przypadku historii tego rodzaju jest tak, że wszystko, co zdarza się na stopniu n, będzie także zdarzać się na następnych stopniach. Zmienność będzie wówczas polegała jedynie na pojawianiu się nowych (elementarnych) sytuacji — por. φ.

Dla wszystkich funkcji φ o wartościach należących tylko do jednego z drzew, musi istnieć przynajmniej jedna sytuacja, która zdarzyła się na początku i która jest składnikiem wszystkich sytuacji globalnych składających się na historię φ.

Niektóre z funkcji φ mają wartości należące do obu drzew (**[φ]**, **(φ)***). W takich przypadkach, cokolwiek wydarza się na stopniu n, może nie wydarzyć się na stopniu n+1. Zauważmy przy okazji, że funkcja **(φ)*** jest tą historią, którą przedstawiał rysunek 1b.

(1.2) Język i interpretacja

Aby opisać wybrane własności funkcji φ, które mogą być interesujące w ramach naszej konceptualizacji zjawiska zmiany, sformułujemy rachunek wyrażony w języku zdaniowym, w którym oprócz funktorów prawdziwościowych wystąpi jeden modalny funktor C (czytany: *zmienia się to, że….*). Sam język będzie ulegał w tym sensie zmianie, że będzie się on powiększał w związku ze wzrostem złożoności kolejnych opisywanych w nim sytuacji globalnych. Precyzyjniej rzecz biorąc, do opisu każdego B_n użyjemy języka poziomu n, przy czym wszystkie wyrażenia do niego należące będą należały także do języka poziomu n+1. Język poziomu n (n-język) zdefiniujemy następująco:

Definicja 4

(i) Zdania proste: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ są n-formułami;

(ii) Jeśli A jest n-formułą, to $\neg A$ także jest n-formułą;

(iii) Jeśli A, B są n-formułami, to n-formułami są również: $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\rightarrow B$, $A\leftrightarrow B$, $A\underline{\vee}B$,

(iv) Jeśli A jest n-formułą, to CA jest n-formułą.

Dodatkowo zakładamy, że:

---

[9] Oczywiste jest, że drzewa te są skończone tylko wtedy, gdy zbiór ES jest skończony.

Jeśli A jest formułą poziomu n oraz m>n, to A jest także formułą poziomu m.

Poziomem minimalnym formuły A (lv(A)) będziemy nazywać ten poziom, na którym A wystąpiła pierwszy raz. Tak więc, każda napisana formuła ma ustalony poziom minimalny.

Przystąpimy teraz do ustalenia semantycznych związków między zadeklarowanym językiem (raczej: rodziną języków) a strukturami opisanymi w (1.1).

Dla danej historii φ możemy wyznaczyć relację *bycia prawdziwym na stopniu* n. Wyrażenie: $\varphi\models^n A$ będziemy czytać tak, że: A *jest prawdziwe na stopniu* n *w odniesieniu do historii* φ i rozumieć tak, jak opisuje to następująca definicja:

Definicja 5

Niech φ (n)=s (gdzie n jest poziomem minimalnym formuły s), wówczas:

(i) $\varphi\models^n \alpha_i$ wtw, gdy α_i występuje w s bez znaku negacji ($1\leq i\leq n$),

Niech A, B będą n-formułami, wówczas:

(ii) $\varphi\models^n \neg A$ wtw, gdy $\varphi\not\models^n A$,

(iii) $\varphi\models^n A\wedge B$ wtw, gdy $\varphi\models^n A$ oraz $\varphi\models^n B$,

(iv) $\varphi\models^n A\vee B$ wtw, gdy $\varphi\models^n A$ lub $\varphi\models^n B$,

(v) $\varphi\models^n A\rightarrow B$ wtw, gdy $\varphi\not\models^n A$ lub $\varphi\models^n B$,

(vi) $\varphi\models^n A\leftrightarrow B$ wtw, gdy ($\varphi\not\models^n A$ lub $\varphi\models^n B$) oraz ($\varphi\models^n A$ lub $\varphi\not\models^n B$),

(vii) $\varphi\models^n A\underline{\vee} B$ wtw, gdy ($\varphi\models^n A$ oraz $\varphi\not\models^n B$) lub ($\varphi\not\models^n A$ oraz $\varphi\models^n B$),

(viii) $\varphi\models^n CA$ wtw, gdy ($\varphi\models^n A$ oraz $\varphi\not\models^{n+1} A$) lub ($\varphi\not\models^n A$ oraz $\varphi\models^{n+1} A$).

Korzystając z powyższej definicji, możemy sformułować pojęcia φ-*prawdziwości* i (*logicznej*) *prawdziwości*:

Definicja 6

Dla dowolnej formuły A, dla której lv(A)=n:

A jest φ-prawdziwa wtw, gdy $\varphi\models^k A$ dla każdego $k\geq n$.

Definicja 7

Dla dowolnej formuły A:

A jest (logicznie) prawdziwa wtw, gdy A jest φ-prawdziwa dla każdej funkcji φ.

Pokażemy następnie logiczną prawdziwość formuł, które będą użyte jako aksjomaty formułowanego rachunku — logiki zmiany LC:

Twierdzenie 1.* [10]

Następujące schematy generują formuły prawdziwe logicznie:

(i) $CA \to C\neg A$,

(*jeśli A zmienia się, wówczas także zmienia się nie A*)

(ii) $C(A\wedge B) \to CA\vee CB$,

(*jeśli zmienia się sytuacja, na którą składają się A i B, to zmienia się przynajmniej jeden z jej składników: A lub B*)

(iii) $\neg A\wedge B\wedge CA\wedge\neg CB \to C(A\wedge B)$,

(*jeśli nie jest tak, że A, ale to ulega zmianie i jest tak, że B i to nie ulega zmianie, wówczas zmienia się: A i B*)

(iv) $\neg A\wedge\neg B\wedge CA\wedge CB \to C(A\wedge B)$,

(*jeśli nie jest tak, że A, ale to ulega zmianie i nie jest tak, że B i to także ulega zmianie, wówczas zmienia się: A i B*)

(v) $\neg A\wedge CA\wedge\neg B \to C(A\vee B)$,

(*jeśli nie jest tak, że A, ale to ulega zmianie, i nie jest tak, że B, wówczas zmienia się: A lub B*)

(vi) $C(A\leftrightarrow B) \to CA\underline{\vee}CB$,

(*jeśli zmienia się sytuacja, w której A i B współwystępują lub współniewystępują, wówczas musi się zmienić dokładnie jeden z jej składników: A albo B*).

Zauważmy parę przykładów schematów generujących formuły, które nie są logicznie prawdziwe:

Twierdzenie 2.*

Formuły o następujących postaciach nie są logicznie prawdziwe:

(i) $C(A\wedge B) \to CA\wedge CB$,

(ii) $CA\wedge CB \to C(A\wedge B)$,

(iii) $CA\vee CB \to C(A\vee B)$,

(iv) $C(A\to B) \to (CA\to CB)$,

(v) $C(A\to B) \to (CB\to CA)$,

(vi) $\neg C(A\to B) \to (\neg CA\to\neg CB)$,

---

[10] Dla ułatwienia lektury prezentowanej pracy, obszerniejsze dowody formułowanych twierdzeń umieszczamy na jej końcu — w Dodatku. W takich przypadkach przy numerze twierdzenia umieszczamy indeks *.

(vii) $\neg C(A \to B) \to (\neg CB \to \neg CA)$,

(viii) $CA \wedge B \to C(A \wedge B)$,

(ix) $CA \to C(A \vee B)$.

Wyznaczymy parę reguł inferencji zachowujących własność prawdziwości logicznej:

Twierdzenie 3.*
Zbiór formuł logicznie prawdziwych jest domknięty ze względu na następujące reguły:

(i) modus ponens (MP): $A \to B, A \vdash B$,

(ii) reguła wprowadzania funktora C ($\neg$C-reg): $A \vdash \neg CA$,

(iii) reguła ekstensjonalności (Rep): $A[B], B \leftrightarrow B' \vdash A[B']$
(gdzie: A[B] znaczy, że B jest pewną podformułą formuły A).

(2) RACHUNEK ZMIANY LC — FORMALIZACJA Z JEDNYM PIERWOTNYM MODALNYM FUNKTOREM ZMIANY C

Zdefiniowana rodzina języków umożliwi nam następnie wyznaczenie rachunku opisującego zamierzoną semantykę — logiki LC.

Logika LC wyznaczona jest przez:

Aksjomaty —
wszystkie wyrażenia o postaci tautologii klasycznej logiki zdaniowej oraz wszystkie wyrażenia otrzymane ze schematów: (i) — (vi) z Twierdzenia 1 tj.:

Ax1. $CA \to C\neg A$,

Ax2. $C(A \wedge B) \to CA \vee CB$,

Ax3. $\neg A \wedge B \wedge CA \wedge \neg CB \to C(A \wedge B)$,

Ax4. $\neg A \wedge \neg B \wedge CA \wedge CB \to C(A \wedge B)$,

Ax5. $\neg A \wedge CA \wedge \neg B \to C(A \vee B)$,

Ax6. $C(A \leftrightarrow B) \to CA \underline{\vee} CB$

oraz

Reguły — jako pierwotne reguły wnioskowania wybieramy schematy (i)-(iii) z Twierdzenia 3 tj.: (MP) $A, A \to B \vdash B$, ($\neg$C-reguła) $A \vdash \neg CA$, (Rep) $A[B], B \leftrightarrow B' \vdash A[B']$.

Dotychczasowe ustalenia pozwalają odnotować, że:

Twierdzenie S*

Każda formuła LC-wyprowadzalna jest logicznie prawdziwa.

W LC możemy dowieść następujące tezy:

T1. $CA \leftrightarrow C\neg A$,

1. $C\neg A \rightarrow C\neg\neg A$	[Ax1 (A/¬A)],
2. $C\neg A \rightarrow CA$	[Rep, 1],
3. $CA \leftrightarrow C\neg A$	[Ax1, 2].

T2. $A \wedge B \wedge CA \rightarrow C(A \wedge B)$,

1. $A \wedge C\neg A \wedge B \rightarrow C(\neg A \vee \neg B)$	[Ax5, A/¬A,B/¬B],
2. $A \wedge CA \wedge B \rightarrow C\neg(\neg A \vee \neg B)$	[Rep, T1, 1],
3. $A \wedge CA \wedge B \rightarrow C(A \wedge B)$	[Rep, 2].

T3. $A \wedge B \wedge \neg CA \wedge CB \rightarrow C(A \rightarrow B)$,

1. $A \wedge B \wedge \neg CA \wedge C\neg B \rightarrow C(A \wedge \neg B)$	[Ax3, A/¬B, B/A],
2. $A \wedge B \wedge \neg CA \wedge CB \rightarrow C\neg(A \rightarrow B)$	[T1, 2],
3. $A \wedge B \wedge \neg CA \wedge CB \rightarrow C(A \rightarrow B)$	[T1, 2].

T4. $\neg A \wedge CA \wedge \neg B \wedge \neg CB \rightarrow C(A \rightarrow B)$,

1. $\neg B \wedge \neg A \wedge \neg C\neg B \wedge C\neg A \rightarrow C(\neg B \rightarrow \neg A)$	[T3, A/¬B, B/¬A],
2. $\neg A \wedge CA \wedge \neg B \wedge \neg CB \rightarrow C(\neg B \rightarrow \neg A)$	[Rep, T1, 1],
3. $\neg A \wedge CA \wedge \neg B \wedge \neg CB \rightarrow C(A \rightarrow B)$	[Rep, 2].

T5. $\neg A \wedge CA \wedge B \wedge CB \rightarrow C(A \rightarrow B)$,

1. $\neg A \wedge CA \wedge B \wedge C\neg B \rightarrow C(A \wedge \neg B)$	[Ax4, B/¬B],
2. $\neg A \wedge CA \wedge B \wedge CB \rightarrow C\neg(A \rightarrow B)$	[Rep, T1, 1],
3. $\neg A \wedge CA \wedge B \wedge CB \rightarrow C(A \rightarrow B)$	[Rep, T1, 2].

T6. $C(A \vee B) \rightarrow CA \vee CB$,

1. $C(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow C\neg A \vee C\neg B$	[Ax2, A/¬A, B/¬B],
2. $C\neg(A \vee B) \rightarrow C\neg A \vee C\neg B$	[Rep, 1],
3. $C(A \rightarrow B) \rightarrow CA \vee CB$	[Rep, T1, 2].

T7. $C(A \rightarrow B) \rightarrow CA \vee CB$

1. $C(A \wedge \neg B) \rightarrow CA \vee C\neg B$	[Ax2, B/¬B],
2. $C\neg(A \rightarrow B) \rightarrow CA \vee C\neg B$	[Rep, 1],
3. $C(A \rightarrow B) \rightarrow CA \vee CB$	[Rep, T1, 2].

Weźmy następnie pod uwagę schemat: $(A \wedge \neg CA) \vee (\neg A \wedge CA)$. Zgodnie z Definicją 5, możemy powiedzieć, że formuła tego rodzaju jest prawdziwa na stopniu n wtedy i tylko wtedy, gdy A jest prawdziwa na stopniu n+1. Aby wyrazić ten fakt, definicyjnie wprowadzimy nowy funktor N — czytany: *następnie jest tak, że…*:

DefN. $NA \leftrightarrow (A\wedge\neg CA)\vee(\neg A\wedge CA)$

(co jest logicznie równoważne formule: $NA \leftrightarrow (A\leftrightarrow\neg CA)$).

Definicję 5 relacji ⊨ uzupełnijmy o warunek wyprowadzalny z (ii)-(viii):

(ix) $\varphi\models^n NA$ wtw, gdy $\varphi\models^{n+1} A$.

Funktor N jest taki, że:

T8. $N\neg A \leftrightarrow \neg NA$

1. $(\neg A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B) \leftrightarrow \neg(A\wedge\neg B)\wedge\neg(\neg A\wedge B)$ [logika klasyczna],
2. $(\neg A\wedge\neg CA)\vee(A\wedge CA) \leftrightarrow \neg(A\wedge\neg CA)\wedge \neg(\neg A\wedge CA)$ [B/CA, 1],
3. $(\neg A\wedge\neg C\neg A)\vee(A\wedge C\neg A) \leftrightarrow \neg(A\wedge\neg CA)\wedge \neg(\neg A\wedge CA)$ [Rep, T1, 2],
4. $N\neg A \leftrightarrow \neg NA$ [Rep, DefN, 3].

Dla pokazania następnej ważnej własności pojęcia opisywanego funktorem N użyteczne będą lematy L1(a)-(d):

L1. (a)* $(A\rightarrow B)\wedge\neg C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg CA \rightarrow (B\wedge\neg CB)\vee(\neg B\wedge CB)$,

(b)* $(A\rightarrow B)\wedge\neg C(A\rightarrow B)\wedge\neg A\wedge CA \rightarrow (B\wedge\neg CB)\vee(\neg B\wedge CB)$,

(c)* $\neg(A\rightarrow B)\wedge C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg CA \rightarrow (B\wedge\neg CB)\vee(\neg B\wedge CB)$,

(d)* $\neg(A\rightarrow B)\wedge C(A\rightarrow B)\wedge\neg A\wedge CA \rightarrow (B\wedge\neg CB)\vee(\neg B\wedge CB)$.

Stąd, możemy dowieść że:

T9. $N(A\rightarrow B) \rightarrow (NA\rightarrow NB)$.

Powyższą formułę otrzymujemy z następującej formuły (za pomocą DefN):

$((A\rightarrow B) \wedge \neg C(A\rightarrow B)) \vee (\neg(A\rightarrow B) \wedge C(A\rightarrow B)) \rightarrow ((A\wedge\neg CA) \vee (\neg A\wedge CA) \rightarrow (B\wedge\neg CB) \vee(\neg B\wedge CB))$,

która może być dowiedziona na podstawie lematów L1(a)-(d). Należy zauważyć, że jest ona postaci:

$D\vee E \rightarrow (F\vee G \rightarrow H\vee K)$ i wynika inferencyjnie z formuł o postaciach:

$D\wedge F \rightarrow H\vee K$, $D\wedge G \rightarrow H\vee K$, $E\wedge F \rightarrow H\vee K$, $E\wedge G\rightarrow H\vee K$,

a taki kształt mają właśnie formuły z lematów L1(a)-(d).

Funktor modalny N może być także wprowadzany do prezentowanej logiki za pomocą reguł modalnych, ponieważ:

Twierdzenie 4.*

(N-reguła) $A \vdash NA$ oraz ($\rightarrow$N-reguła) $A\rightarrow B \vdash NA\rightarrow NB$ są wyprowadzalne w LC.

Zamiast ¬C-reguły, można wziąć jako pierwotną w naszym systemie N-regułę, ponieważ ¬C-reguła jest także wyprowadzalna za pomocą N-reguły:

1. $\vdash A$ [założenie],
2. $\vdash NA$ [N-reguła, 1],
3. $\vdash (A \wedge \neg CA) \vee (\neg A \wedge CA)$ [Rep, DefN, 2],
4. $\vdash (A \wedge \neg CA)$ [1, 3],
5. $\vdash \neg CA$ [4].

→N-reguły użyjemy w dowodzie implikacji odwrotnej do T9:

T10. $(NA \rightarrow NB) \rightarrow N(A \rightarrow B)$

1. $NB \rightarrow N(A \rightarrow B)$
2. $N\neg A \rightarrow N(A \rightarrow B)$ [logika klasyczna, →N-reguła],
3. $N\neg A \vee NB \rightarrow N(A \rightarrow B)$ [1, 2],
4. $\neg NA \vee NB \rightarrow N(A \rightarrow B)$ [Rep, T8, 3],
5. $(NA \rightarrow NB) \rightarrow N(A \rightarrow B)$ [4].

Możemy także zauważyć, że:

T11. (a) $NA \wedge NB \rightarrow N(A \wedge B)$,

1. $N(A \rightarrow B) \rightarrow (NA \rightarrow NB)$ [T9],
2. $\neg(NA \rightarrow NB) \rightarrow \neg N(A \rightarrow B)$ [1],
3. $NA \wedge \neg NB \rightarrow N\neg(A \rightarrow B)$ [Rep, T8, 2],
4. $NA \wedge \neg NB \rightarrow N(A \wedge \neg B)$ [3],
5. $NA \wedge \neg N\neg B \rightarrow N(A \wedge B)$ [B/¬B, 4],
6. $NA \wedge NB \rightarrow N(A \wedge B)$ [Rep, T8, 5].

(b) $N(A \wedge B) \rightarrow NA \wedge NB$,

1. $N(A \wedge B) \rightarrow NA$
2. $N(A \wedge B) \rightarrow NB$ [logika klasyczna, →N-reguła],
3. $N(A \wedge B) \rightarrow NA \wedge NB$ [1, 2].

T12. (a) $NA \vee NB \rightarrow N(A \vee B)$,

1. $N(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow N\neg A \wedge N\neg B$ [T11(b), A/¬A, B/¬B],
2. $N(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg NA \wedge \neg NB$ [Rep, T8, 1],
3. $N\neg(A \vee B) \rightarrow \neg(NA \vee NB)$ 2],
4. $\neg N\ (A \vee B) \rightarrow \neg(NA \vee NB)$ [Rep, T8, 3],
5. $NA \vee NB \rightarrow N(A \vee B)$ [4].

(b) $N(A \vee B) \rightarrow NA \vee NB$,

[por. dowód (a), zamiast T11(b) należy użyć T11(a)].

T13. $(A\vee B)\wedge N(D\vee E) \leftrightarrow (A\wedge ND)\vee(A\wedge NE)\vee(B\wedge ND)\vee(B\wedge NE)$

[na mocy logiki klasycznej, T12(a), (b)],

T14. $(A\wedge NB)\wedge(D\wedge NE) \leftrightarrow (A\wedge D)\wedge N(B\wedge E)$

[na mocy logiki klasycznej, T11(a), (b)],

T15. $(A\wedge NB)\wedge ND \leftrightarrow A\wedge N(B\wedge D)$

[na mocy logiki klasycznej, T11(a), (b)].

T16. (a) $A\wedge N\neg A \rightarrow CA$,

1. $A\wedge((A\wedge CA)\vee(\neg A\wedge\neg CA))\rightarrow CA$ [logika klasyczna],
2. $A\wedge((A\wedge C\neg A)\vee(\neg A\wedge\neg C\neg A))\rightarrow CA$ [Rep, T1, 1],
3. $A\wedge((\neg A\wedge\neg C\neg A)\vee(\neg\neg A\wedge C\neg A))\rightarrow CA$ [2],
4. $A\wedge N\neg A\rightarrow CA$ [Rep, DefN, 3].

(b) $\neg A\wedge NA \rightarrow CA$,

[$\neg A\wedge((A\wedge\neg CA)\vee(\neg A\wedge CA))\rightarrow CA$, DefN]

T17. $CNA \rightarrow NCA$,

1. $C(A\leftrightarrow CA) \rightarrow CA\underline{\vee}CCA$ [Ax6, B/CA],
2. $C\neg(A\leftrightarrow CA) \rightarrow CA\underline{\vee}CCA$ [Rep, T1, 1],
3. $C((A\wedge\neg CA)\vee(\neg A\wedge CA)) \rightarrow (CA\wedge\neg CCA)\vee(\neg CA\wedge CCA)$ [2],
4. $CNA\rightarrow NCA$ [Rep, DefN, 3].

T18. $CA \rightarrow (A\rightarrow N\neg A)$,

1. $CA\rightarrow(A\rightarrow(A\wedge CA)\vee(\neg A\wedge\neg CA))$ [logika klasyczna],
2. $CA\rightarrow(A\rightarrow(A\wedge C\neg A)\vee(\neg A\wedge\neg C\neg A))$ [Rep, T1, 1],
3. $CA\rightarrow(A\rightarrow(\neg A\wedge\neg C\neg A)\vee(\neg\neg A\wedge C\neg A))$ [2],
4. $CA\rightarrow(A\rightarrow N\neg A)$ [Rep, DefN, 3].

T19. $CA \rightarrow (A\leftrightarrow N\neg A)$,

1. $C\neg A\rightarrow(\neg A\rightarrow NA)$ [T18, A/¬A],
2. $CA\rightarrow(\neg A\rightarrow NA)$ [T1, 1],
3. $CA\rightarrow(\neg NA\rightarrow A)$ [2],
4. $CA\rightarrow(N\neg A\rightarrow A)$ [T8, 3],
5. $CA\rightarrow(A\leftrightarrow N\neg A)$ [T18, 4],
6. $(A\leftrightarrow N\neg A)\rightarrow CA$ [T16(a), (b)],
7. $CA \leftrightarrow (A\leftrightarrow N\neg A)$ [5, 6]

T20. $NCA \rightarrow CNA$,

1. $NCA \rightarrow N(A\leftrightarrow N\neg A)$ [T19, →N-reguła],

2. $NCA \rightarrow N((A \rightarrow N\neg A) \wedge (N\neg A \rightarrow A))$ [1],
3. $NCA \rightarrow (N(A \rightarrow N\neg A) \wedge N(N\neg A \rightarrow A))$ [2, T11(b)],
4. $NCA \rightarrow (NA \rightarrow NN\neg A) \wedge (NN\neg A \rightarrow NA)$ [T9, T10, Rep,3],
5. $NCA \rightarrow (NA \rightarrow N\neg NA) \wedge (N\neg NA \rightarrow NA)$ [Rep, T8, 4],
6. $NCA \rightarrow (NA \leftrightarrow N\neg NA)$ [5],
7. $NCA \rightarrow CNA$ [T19, 6].

Zauważmy jeszcze, że pojęcie opisywane przez funktor modalny N nie ma własności, o których mówi się w schematach z Twierdzenia 5:

Twierdzenie 5.*

Formuły o następujących postaciach nie są logicznie prawdziwe:

(i) $NA \rightarrow A,\ A \rightarrow NA$,

(ii) $NNA \rightarrow NA,\ NA \rightarrow NNA$,

(iii) $A \wedge N(B \wedge ND) \rightarrow A \wedge NB \wedge ND$,

(iv) $A \wedge NB \wedge ND \rightarrow A \wedge N(B \wedge ND)$,

(v) $C(A \wedge B) \rightarrow (NA \rightarrow CB)$.

(3) DEFINICYJNE ROZSZERZENIE RACHUNKU LC O POJĘCIE *G-ZMIANY* — FORMALIZM LCG

Następnym krokiem w formalizacji zamierzonych struktur jest takie wzbogacenie języka naszej logiki, aby móc w nim wyrazić to, że sytuacje globalne podlegają zmianie także w sensie wzrostu ich złożoności. Tego rodzaju zmiany nazwaliśmy we Wstępie *G-zmianami.* Wzrost złożoności dowolnej sytuacji globalnej ma miejsce wtedy, gdy zwiększa się zbiór sytuacji elementarnych o kolejną sytuację elementarną. W terminach ontologii substancji powiedzielibyśmy, że gdy ta nowa sytuacja jest faktem, jest ona odpowiednikiem kolejnej substancji w określonym łańcuchu zmian. Niezależnie od tego jednak, czy nowa sytuacja jest faktem, czy fikcją, rozszerza się spektrum wszystkich możliwych sytuacji globalnych o większym stopniu złożoności niż dotychczasowe sytuacje. Aby móc mówić o efekcie takiej zmiany (o bardziej złożonej sytuacji globalnej), powiększamy język, którego używaliśmy, zanim ta zmiana nastąpiła, w taki sposób, że dodajemy do jego słownika zdanie elementarne opisujące nową sytuację elementarną. Zakładamy przy tym, że każda sytuacja, która może aktualnie zaistnieć na stopniu n, będzie miała także taką możliwość na stopniu n+1. Na poziomie syntaktycznym założenie to skutkuje tym, że konstrukcja języków wyższych poziomów polega wyłącznie na powiększaniu ich słowników o nowe zdania elementarne, a nigdy na ich pomniejszaniu. W naszej koncepcji G-zmiana może być odnotowywana za pomocą funktorów: G^+, G^- zdefiniowanych w następujący sposób:

Niech A będzie formułą o minimalnym poziomie n-1, tj. lv(A) = n-1, wówczas:

DefG$^+$. $G^+A \leftrightarrow A \wedge \alpha_n$,

DefG$^-$. $G^-A \leftrightarrow A \wedge \neg\alpha_n$.

Zgodnie z powyższymi równoważnościami, jeszcze raz rozszerzymy Definicję 5 pojęcia *bycia prawdziwym na stopniu* n *w odniesieniu do historii* φ. Tym razem dodamy następujący warunek:

(x) jeżeli lv(A) = n-1, to: (a) $\varphi \vDash^n G^+A$ wtw, gdy $\varphi \vDash^n A$ oraz $\varphi \vDash^n \alpha_n$ oraz
(b) $\varphi \vDash^n G^-A$ wtw, gdy $\varphi \vDash^n A$ oraz $\varphi \nvDash^n \alpha_n$.

Zgodnie z punktem (x), koniecznym warunkiem tego, by G^+A (lub G^-A) była prawdziwa na stopniu n jest to, by A już występowała w języku poprzedniego poziomu n-1. Oczywiście nie znaczy to, że A ma być na stopniu n-1 prawdziwa. Zauważmy, że w przeciwieństwie do znaczenia funktora C, w przypadku którego istotne jest to, co dzieje się między stopniami n i n+1, gdy chodzi o funktory G^+ i G^-, ważne jest to, co się dzieje między stopniami n i n-1. Po drugie, znaczenie funktora C jest skonstruowane w taki sposób, że nie decyduje się, czy A jest na stopniu n prawdziwa (ważne jest tylko, że na stopniu n+1 ma być odwrotnie), natomiast dla funktorów G^+ i G^- jest ustalone, że A ma być na stopniu n prawdziwa. Można powiedzieć, że w rezultacie zastosowania operacji opisywanych funktorami G^+ i G^- do (wcześniej) możliwej sytuacji s, otrzymujemy nową sytuację, która zawiera dwa komponenty: aktualnie istniejącą sytuację s oraz nową sytuację elementarną, która także jest aktualna (w przypadku G^+) lub nie jest aktualna, ale możliwa (G^-).

Niech G będzie zmienną reprezentującą G^+ lub G^-. Używając zdefiniowanych pojęć, możemy dowieść, że:

T21. $GA \to A$ [$A \wedge B \to A$, DefG$^+$, DefG$^-$],

T22. $\neg G(\alpha_1 \wedge \neg\alpha_1)$ [T21],

T23. (a) $\alpha_n \to G^+(\alpha_{n-1} \vee \neg\alpha_{n-1})$ [DefG$^+$],

(b) $\neg\alpha_n \to G^-(\alpha_{n-1} \vee \neg\alpha_{n-1})$ [DefG$^-$],

T24. (a) $G^+A \to \neg G^-A$ [$A \wedge B \to \neg(A \wedge \neg B)$, DefG$^+$, DefG$^-$],

(b) $G^-A \to \neg G^+A$ [$A \wedge \neg B \to \neg(A \wedge B)$, DefG$^-$, DefG$^+$],

T25. (a) $\neg G^+A \wedge A \to G^-A$ [$\neg(A \wedge B) \wedge A \to A \wedge \neg B$, DefG$^+$, DefG$^-$],

(b) $\neg G^-A \wedge A \to G^+A$ [$\neg(A \wedge \neg B) \wedge A \to A \wedge B$, DefG$^-$, DefG$^+$],

T26. $G\neg A \to \neg GA$ [$\neg A \wedge B \to \neg(A \wedge B)$, DefG$^+$, DefG$^-$].

Jeżeli lv(A)=lv(B), to tezami są także formuły o postaciach:

T27. $G(A \wedge B) \leftrightarrow GA \wedge GB$ [$A \wedge B \wedge D \leftrightarrow (A \wedge D) \wedge (B \wedge D)$, DefG$^+$, DefG$^-$], T28. $G(A \vee B) \leftrightarrow GA \vee GB$ $[(A \vee B) \wedge D \leftrightarrow (A \wedge D) \vee (B \wedge D)$, DefG$^+$, DefG$^-$],

T29. $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$ $[(A \rightarrow B) \wedge D \rightarrow (A \wedge D \rightarrow B \wedge D)$, DefG$^+$, DefG$^-$].

Można zauważyć, że implikacje odwrotne do T21, T26 oraz T29 nie są prawdziwe logicznie w zamierzonej semantyce. W przypadku tez T27-29 ograniczenie, zgodnie z którym A i B mają ten sam poziom minimalny, jest istotne, ponieważ bez niego formuły o postaciach takich jak T27-29 także nie są prawdziwe logicznie.

Twierdzenie 6.*

(i) $A \rightarrow GA$ nie jest logicznie prawdziwa,

(ii) $\neg GA \rightarrow G\neg A$ nie jest logicznie prawdziwa,

(iii) $(GA \rightarrow GB) \rightarrow G(A \rightarrow B)$ nie jest logicznie prawdziwa,

(iv) jeżeli $lv(A) \neq lv(B)$, to następujące formuły nie są logicznie prawdziwe:
(a) $G(A \wedge B) \leftrightarrow GA \wedge GB$,
(b) $G(A \vee B) \leftrightarrow GA \vee GB$,
(c) $G(A \rightarrow B) \rightarrow (GA \rightarrow GB)$.

W komentarzu do schematu (i) z powyższego twierdzenia można zauważyć, że relacja między asercją oraz G jest taka, że za silna jest również reguła: $A \vdash GA$ (tzn. nie zachowuje ona własności prawdziwości logicznej — nie jest dopuszczalna). Dopuszczalna jest natomiast reguła słabsza: $A \leftrightarrow B \vdash GA \leftrightarrow GB$, która jest także wyprowadzalna:

Twierdzenie 7.*
(G-reguła) $A \leftrightarrow B \vdash GA \leftrightarrow GB$ jest wyprowadzalna w LC (gdzie $lv(A)=lv(B)$).

Odnotujmy jeszcze niektóre związki między pojęciami opisywanymi przez funktory G^+, G^-, C oraz N:

T30. (a) $\neg\alpha_n \rightarrow (CG^+A \rightarrow NG^+A)$,

1. $\neg\alpha_n \rightarrow ((A \wedge \alpha_n \leftrightarrow \neg NA \vee \neg N\alpha_n) \rightarrow (NA \wedge N\alpha_n))$ [logika klasyczna],
2. $\neg\alpha_n \rightarrow ((A \wedge \alpha_n \leftrightarrow N\neg(A \wedge \alpha_n)) \rightarrow N(A \wedge \alpha_n))$ [T8, T11, 1],
3. $\neg\alpha_n \rightarrow (C(A \wedge \alpha_n) \rightarrow N(A \wedge \alpha_n))$ [T19, 2],
4. $\neg\alpha_n \rightarrow (CG^+A \rightarrow NG^+A)$ [DefG$^+$, 3].

(b) $\alpha_n \rightarrow (CG^-A \rightarrow NG^-A)$ [por. powyższy dowód],

T31. $\neg NA \rightarrow (GA \rightarrow GCA)$,

1. $\neg A \wedge NA \rightarrow CA$ [T16(b)],
2. $NA \rightarrow (\neg A \rightarrow CA)$ [1],
3. $N\neg A \rightarrow (A \rightarrow C\neg A)$ [A/¬A, 2],
4. $\neg NA \rightarrow (A \rightarrow CA)$ [Rep, T8, T1, 3],

5. $\neg NA \to (A \wedge \alpha_n \to CA \wedge \alpha_n)$	[4],
6. $\neg NA \to (A \wedge \neg\alpha_n \to CA \wedge \neg\alpha_n)$	[4],
7. $\neg NA \to (G^{+}A \to G^{+}CA)$	[5, DefG^{+}],
8. $\neg NA \to (G^{-}A \to G^{-}CA)$	[6, DefG^{-}],
9. $\neg NA \to (GA \to GCA)$	[7, 8].

T32. $\neg NA \to (GCA \to GA)$,

1. $CA \to (\neg A \to NA)$	[T18, $A/\neg A$, T1],
2. $\neg NA \to (CA \to A)$	[1],
3. $\neg NA \to (CA \wedge \alpha_n \to A \wedge \alpha_n)$	[2],
4. $\neg NA \to (CA \wedge \neg\alpha_n \to A \wedge \neg\alpha_n)$	[2],
5. $\neg NA \to (G^{+}CA \to G^{+}A)$	[3, DefG^{+}],
6. $\neg NA \to (G^{-}CA \to G^{-}A)$	[4, DefG^{-}],
7. $\neg NA \to (GCA \to GA)$	[6, 7].

T33. $\neg NA \to (GA \leftrightarrow GCA)$ [T31, T32],

T34. $\neg NA \to (GA \to CGA)$,

1. $\neg NA \to (A \wedge B \to (A \wedge B \leftrightarrow \neg NA \vee \neg NB))$	[logika klasyczna],
2. $\neg NA \to (A \wedge B \to (A \wedge B \leftrightarrow \neg N(A \wedge B))$	[Rep, T11(a), (b), 2],
3. $\neg NA \to (A \wedge B \to C(A \wedge B))$	[Rep, T19, 2],
4. $\neg NA \to (A \wedge \alpha_n \to C(A \wedge \alpha_n))$	[3],
5. $\neg NA \to (A \wedge \neg\alpha_n \to C(A \wedge \neg\alpha_n))$	[3],
6. $\neg NA \to (G^{+}A \to CG^{+}A)$	[4, DefG^{+}],
7. $\neg NA \to (G^{-}A \to CG^{-}A)$	[4, DefG^{-}],
8. $\neg NA \to (GA \to CGA)$	[6, 7].

T35. $\neg NA \to (CGA \to GA)$,

1. $(A \wedge B \leftrightarrow (\neg NA \vee \neg NB)) \to (\neg NA \to A \wedge B)$	[logika klasyczna],
2. $(A \wedge B \leftrightarrow \neg N(A \wedge B)) \to (\neg NA \to A \wedge B)$	[Rep, T11, 2],
3. $C(A \wedge B) \to (\neg NA \to A \wedge B)$	[Rep, T19, 2],
4. $C(A \wedge \alpha_n) \to (\neg NA \to A \wedge \alpha_n)$	[3],
5. $C(A \wedge \neg\alpha_n) \to (\neg NA \to A \wedge \neg\alpha_n)$	[2],
6. $CG^{+}A \to (\neg NA \to G^{+}A)$	[4, DefG^{+}],
7. $CG^{-}A \to (\neg NA \to G^{-}A)$	[5, DefG^{-}],
8. $CGA \to (\neg NA \to GA)$	[6, 7],
9. $(\neg NA \to (CGA \to GA))$	[8].

T36. $\neg NA \to (GA \leftrightarrow CGA)$ [T34, T35],

T37. $\neg NA \to (CGA \leftrightarrow GCA)$ [T33, T36].

Następne tezy pokazują nam, że związki między N oraz G są słabsze niż między N oraz C:

T38. (a) $\alpha_n \rightarrow (NG^{+}A \rightarrow G^{+}NA)$,

1. $\alpha_n \rightarrow (NA \wedge N\alpha_n \rightarrow NA \wedge \alpha_n)$ [logika klasyczna],
2. $\alpha_n \rightarrow (N(A \wedge \alpha_n) \rightarrow NA \wedge \alpha_n)$ [Rep, T11, 2],
3. $\alpha_n \rightarrow (NG^{+}A \rightarrow G^{+}NA)$ [DefG^{+}, 2].

(b) $\neg\alpha_n \rightarrow (NG^{-}A \rightarrow G^{-}NA)$ [por. powyższy dowód, $\alpha_n/\neg\alpha_n$, DefG^{-}],

T39. (a) $N\alpha_n \rightarrow (G^{+}NA \rightarrow NG^{+}A)$,

1. $N\alpha_n \rightarrow (NA \wedge \alpha_n \rightarrow NA \wedge N\alpha_n)$ [logika klasyczna],
2. $N\alpha_n \rightarrow (NA \wedge \alpha_n \rightarrow N(A \wedge \alpha_n))$ [Rep, T11, 2],
3. $N\alpha_n \rightarrow (G^{+}NA \rightarrow NG^{+}A)$ [DefG^{+}, 2].

(b) $N\neg\alpha_n \rightarrow (G^{-}NA \rightarrow NG^{-}A)$ [por. powyższy dowód, $\alpha_n/\neg\alpha_n$, DefG^{-}],

T40. (a) $\alpha_n \wedge N\alpha_n \rightarrow (NG^{+}A \leftrightarrow G^{+}NA)$ [T38a, T39a],

(b) $\neg\alpha_n \wedge N\neg\alpha_n \rightarrow (NG^{-}A \leftrightarrow G^{-}NA)$ [T38b, T39b].

Twierdzenie 8.*
Implikacje odwrotne do T30 i T31 nie są schematami formuł prawdziwych:

(i) $(CG^{+}A \rightarrow NG^{+}A) \rightarrow \neg\alpha_n$ (por. T30a),

(ii) $(CG^{-}A \rightarrow NG^{-}A) \rightarrow \alpha_n$ (por. T30b),

(iii) $(GA \rightarrow GCA) \rightarrow \neg NA$ (por. T31).

Na koniec prezentacji wybranych tez systemu LCG sformułujemy jeszcze parę praw dotyczących iteracji symboli G^{+} i G^{-}. Powiedzmy, że wyrażenie $(G)^k$ symbolizuje k — elementowy sekwens wystąpień funktora G, rozumiany tak, że dla $k \geq 0$:

Def(G) $(G)^0 A \leftrightarrow A$,

$(G)^{k+1} A \leftrightarrow G(G)^k A$.

Dla wygody, koniunkcję zdań elementarnych o następujących po sobie poziomach minimalnych od n do n+k będziemy notować: $\alpha_n \wedge \ldots \wedge \alpha_{n+k}$, wyrażenie: $\neg\alpha_n \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_{n+k}$ będzie zaś oznaczać koniunkcję negacji owych zdań.

Możemy dalej zauważyć, że:

T41. (a) $(G^{+})^m A \leftrightarrow A \wedge \alpha_n \wedge \ldots \wedge \alpha_{n+(m-1)}$, gdzie m>0 oraz

(b) $(G^{-})^m A \leftrightarrow A \wedge \neg\alpha_n \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_{n+(m-1)}$, gdzie m>0

[DefG^{+}, DefG^{-}, Def(G)].

Dowodliwe są także:

T42. (a) $(G^{+})^{m}A \leftrightarrow (G^{+})^{m-1}A\wedge\alpha_{n+(m-1)}$, gdzie m>0 [T41a],

(b) $(G^{-})^{m}A \leftrightarrow (G^{-})^{m-1}A\wedge\neg\alpha_{n+(m-1)}$, gdzie m>0 [T41b].

oraz:

T43. (a) $(G^{+})^{m} A \leftrightarrow (G^{+})^{j}A \wedge (G^{+})^{k-1} \alpha_{n+j}$, gdzie k,j>0 oraz j+k=m;

1. $A\wedge\alpha_n\wedge\ldots\wedge\alpha_{n+(j-1)}\wedge\alpha_{n+j}\wedge\ldots\wedge\alpha_{n+j+(k-1)} \leftrightarrow A\wedge\alpha_n\wedge\ldots\wedge\alpha_{n+(j-1)}\wedge\alpha_{n+j}\wedge\ldots\wedge\alpha_{n+j+(k-1)}$
2. $(G^{+})^{j+k}A \leftrightarrow (G^{+})^{j}A \wedge \alpha_{n+j} \wedge \ldots \wedge \alpha_{n+j+(k-1)}$ [1, T41a],
3. $(G^{+})^{m}A \leftrightarrow (G^{+})^{j}A \wedge (G^{+})^{k-1} \alpha_{n+j}$ [2, T41a, j+k=m].

(b) $(G^{-})^{m} A \leftrightarrow (G^{-})^{j}A \wedge (G^{-})^{k-1} \neg\alpha_{n+j}$, gdzie k,j>0 oraz j+k=m.

[por. powyższy dowód przy użyciu T41b].

Dla dokładniejszej charakterystyki G-zmian rozważmy także mieszane sekwensy funktorów G^{+} i G^{-} notowane: $(G^{+}G^{-})^{k}$ oraz $(G^{-}G^{+})^{k}$ i zdefiniowane w taki sam sposób jak sekwens $(G)^{k}$ w Def(G). W tym wypadku dogodnie będzie mówić o sekwensach długości k składających się z koniunkcji zdań elementarnych i negacji takich zdań, o następujących po sobie poziomach minimalnych. Takimi sekwensami są dla przykładu wyrażenia:

$$(\alpha_1\wedge\neg\alpha_2),\ (\alpha_1\wedge\neg\alpha_2)\wedge(\alpha_3\wedge\neg\alpha_4),\ (\alpha_2\wedge\neg\alpha_3)\wedge(\alpha_4\wedge\neg\alpha_5)\wedge(\alpha_6\wedge\neg\alpha_7),$$

a także:

$$(\neg\alpha_1\wedge\alpha_2),\ (\neg\alpha_1\wedge\alpha_2)\wedge(\neg\alpha_3\wedge\alpha_4),\ (\neg\alpha_2\wedge\alpha_3)\wedge(\neg\alpha_4\wedge\alpha_5)\wedge(\neg\alpha_6\wedge\alpha_7).$$

Dla dowolnie ustalonego $n \geq 1$, dla każdego $k\geq1$ możemy indukcyjnie zdefiniować takie sekwensy:

Def(∧seq). (a) $(\alpha_n\wedge\neg\alpha_{n+1})^{1} \leftrightarrow \alpha_n\wedge\neg\alpha_{n+1}$,

$(\alpha_n\wedge\neg\alpha_{n+1})^{k+1} \leftrightarrow (\alpha_n\wedge\neg\alpha_{n+1})^{k}\wedge(\alpha_{n+2k}\wedge\neg\alpha_{n+2k+1})$ oraz

(b) $(\neg\alpha_n\wedge\alpha_{n+1})^{1} \leftrightarrow \neg\alpha_n\wedge\alpha_{n+1}$,

$(\neg\alpha_n\wedge\alpha_{n+1})^{k+1} \leftrightarrow (\neg\alpha_n\wedge\alpha_{n+1})^{k}\wedge(\neg\alpha_{n+2k}\wedge\alpha_{n+2k+1})$.

Liczba k może być nazywana *długością danego sekwensu*, n zaś — *początkiem sekwensu*. Wobec tego, że jeśli A jest wyrażeniem poziomu n oraz m>n, to A jest także wyrażeniem poziomu m, dla każdego n i $k\geq1$ dowolny sekwens otrzymany na podstawie powyższej definicji ma wyznaczony poziom minimalny: $lv((\alpha_n\wedge\neg\alpha_{n+1})^{k})= lv((\neg\alpha_n\wedge\alpha_{n+1})^{k}) = n+2k-1$.

Pierwsze trzy z przytoczonych przykładów są sekwensami opisanymi przez Def(∧seq) (a) o długości k odpowiednio: 1, 2 oraz 3. Ich początkiem n są odpowiednio: 1, 1, 2 zaś poziomami minimalnymi: 2, 4, 7. Następne przykłady są sekwensami opisanymi przez Def($\wedge$seq)(b) o tych samych długościach, punktach początkowych i poziomach minimalnych co przykłady poprzednio opisane.

Za pomocą definicji Def($\wedge$seq) łatwo możemy zauważyć, że dla każdego $k\geq 1$:

T44. (a) $(G^+G^-)^k A \leftrightarrow A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^k$, gdzie $lv(A)=n-1$;

Dowód indukcyjny ze względu na k:

(1) dla k=1 — teza może być otrzymana wprost z $DefG^+$, $DefG^-$;

(2) hipoteza indukcyjna:

1.1 $(G^+G^-)^k A \leftrightarrow A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^k$

[do otrzymania: $(G^+G^-)^{k+1} A \leftrightarrow A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^{k+1}$]

1.2 $G^-(G^+G^-)^k A \leftrightarrow G^-(A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^k)$ [G-reguła, 1.1]

1.3 $G^+G^-(G^+G^-)^k A \leftrightarrow G^+G^-(A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^k)$ [G-reguła, 1.2]

1.4 $(G^+G^-)^{k+1} A \leftrightarrow A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^k\wedge(\neg\alpha_{n+2k}\wedge\alpha_{n+2k+1})$

[$DefG^-$, $DefG^+$, $lv(A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^k) = lv((\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^k) = n+2k-1$]

1.5 $(G^+G^-)^{k+1} A \leftrightarrow (A\wedge(\neg\alpha_n \wedge \alpha_{n+1})^{k+1})$ [Def($\wedge$seq)(a), 1.4]

(b) $(G^-G^+)^k A \leftrightarrow A\wedge(\alpha_n \wedge \neg\alpha_{n+1})^k$.

[por. powyższy dowód przy użyciu Def($\wedge$seq)(b)].

(4) PARĘ UWAG W SPRAWIE ZWIĄZKÓW LCG Z WYBRANYMI ZDANIOWYMI LOGIKAMI ZMIANY

Jak już zostało to wcześniej odnotowane, struktury semantyczne opisane w (2) stanowią także semantykę zamierzoną dla logiki LNC — rachunku zdaniowego z dwoma pierwotnymi funktorami modalnymi: C i N, który został omówiony w [Świętorzecka 2006]. Formalizm LNC może być wyrażony w języku (rodzinie języków) o tej samej budowie co LC z tą różnicą, że funktor N (czytany: *następnie jest tak, że...*) występuje tu jako drugi termin pierwotny.[11] Używa się w nim także dwuargumentowego funktora $\uparrow$ (czytanego: .... *zmienia się w....*), który wprowadzony jest za pomocą definicji:

Def$\uparrow$. $A\uparrow B \leftrightarrow A \wedge NB \wedge (A\underline{\vee}B)$.[12]

Rachunek LNC wyznaczają aksjomaty o postaciach tautologii klasycznego rachunku zdań oraz o schematach:

Ax1.' $N\neg A \leftrightarrow \neg NA$,

Ax2'. $N(A\rightarrow B) \rightarrow (NA\rightarrow NB)$,

Ax3'. $CA \rightarrow C\neg A$,

[11] Konsekwentnie, definicja zbioru n-formuł (Def4) powinna być uzupełniona o warunek: (v) Jeśli A jest n-formułą, to NA jest n-formułą.

[12] Do Def5 dodamy kolejny warunek: (xi) $\varphi\models^n A\uparrow B$ wtw, gdy $\varphi\models^n A$ i $\varphi\not\models^n B$ i $\varphi\not\models^{n+1} A$ i $\varphi\models^{n+1} B$.

Ax4'. $CA \rightarrow (A \rightarrow N\neg A)$,
Ax5'. $A\uparrow\neg A \rightarrow CA$,
Ax6'. $\neg A\uparrow A \rightarrow CA$,
Ax7'. $CNA \rightarrow NCA$

razem z takimi samymi pierwotnymi regułami inferencji jak w rachunku LC (tj. *modus ponens*, ($\neg$C-r): $A \vdash \neg CA$, (Rep): $A[B], B\leftrightarrow B' \vdash A[B']$).

Jak można zauważyć, obydwie proponowane formalizacje C-zmian (tj. LC i LNC) są wzajemnie równoważne:

Twierdzenie 9.*
Rachunki LC i LNC są dedukcyjnie równoważne.

W związku z równoważnością dedukcyjną rachunków LC i LNC oczywiste jest, że równoważne są także ich rozszerzenia o definicje funktorów G^+ i G^-.

Odnotujmy jeszcze parę uwag wynikających z wykazanej równoważności, a dotyczących stosunków między LC i wybranymi zdaniowymi logikami zmiany, do których zaliczymy: trzy wersje rachunku And Next von Wrighta (wersję orginalną oraz aksjomatyzacje Clifforda i Wajszczyka), rachunek F — Clifforda i logikę LZD — Wajszczyka. Relacje między LC a wymienionymi logikami są takie same, jak w przypadku LNC — przyjmując odpowiednie definicje, pozwalające porównywać między sobą języki branych pod uwagę formalizacji, można zauważyć, że LC jest: (a) definicyjnie silniejsza od oryginalnej wersji And Next von Wrighta[13], (b) definicyjnie równoważna rachunkom And Next w sformułowaniach Clifforda i Wajszczyka oraz logice F[14], a także (c) definicyjnie słabsza od LZD.[15] Systemy LC i LNC są w tym sensie różne od wymienionych rachunków temporalnych, że są nieregularne — usunięcie modalności nie generuje logiki klasycznej. Tę nieregularność powoduje w LC aksjomat Ax1, w LNC zaś — aksjomat Ax3'. W konsekwencji, niesprzeczność LC i LNC nie może być dowodzona przez usunięcie funktora C. Z semantycznego punktu widzenia porównywane formalizacje temporalne różnią się od LC i LNC pod wieloma istotnymi względami (o niektórych z nich powiedzieliśmy w [Świętorzecka 2006]). Bardziej wnikliwe rozważania na ten temat powinny być jednak poprzedzone dowodem — silniejszego niż Twierdzenie S — twierdzenia o pełności dla LCG

[13] W języku rachunku And Next jedynym modalnym funktorem pierwotnym jest dwuargumentowy spójnik: T (czytany: ....*and next*.....) (por. [Wright 1965]). Definicjami umożliwiającymi porównanie odpowiednich formalizmów byłyby wyrażenia: ATB=: $A\wedge NB$ oraz NA=: $(B\vee\neg B)TA$.

[14] W rachunku F jedynym modalnym terminem pierwotnym jest jednoargumentowy spójnik F czytany: *on the next occasion*…. (por. [Clifford 1966]). W tym przypadku należałoby przyjąć metajęzykową definicję: FA=: NA.

[15] Właściwie chodzi jedynie o fragment logiki zmian dychotomicznych: $\triangleright$−LZD, w której jedynym terminem pierwotnym jest jednoargumentowy spójnik $\triangleright$ — *w bardzo niedalekiej przyszłości będzie tak, że*….(por. [Wajszczyk 1995]). Podobnie jak w przypadku formalizmu Clifforda, należałoby wziąć pod uwagę przekład wyznaczony przez metadefinicję: $\triangleright$A=:NA.

w zamierzonych strukturach semantycznych. Zagadnienie konstrukcji takiego dowodu pozostawiamy w ramach prezentowanej pracy kwestią otwartą.

ZAKOŃCZENIE

W wyniku prowadzonych analiz została przedstawiona formalizacja dwóch rodzajów zmienności sytuacji inspirowana klasyczną koncepcją zmiany substancjalnej. Pierwszy z nich, który nazwaliśmy *C-zmianami*, a który związany jest z aktualnym istnieniem sytuacji, opisaliśmy za pomocą jedynego terminu pierwotnego naszej formalizacji — modalnego spójnika zmiany C (będącego skrótem wyrażenia: *zmienia się to, że…*). W ramach skonstruowanego rachunku LC zdefiniowaliśmy spójnik, który może mieć interpretację temporalną — funktor N, czytany: *następnie jest tak, że…* W ten sposób zrealizowaliśmy założenie związane z przyjęciem tzw. leibnicjańskiej koncepcji czasu, zgodnie z którym czas jest ontologicznie wtórny względem zmiany. Na gruncie rachunku LC zdefiniowaliśmy następnie pojęcie *G-zmiany*. Zmienność tego rodzaju związana jest ze wzrostem złożoności sytuacji globalnych, który spowodowany jest z kolei rozszerzającym się uniwersum sytuacji elementarnych. Możliwość opisu owej zmienności za pomocą odpowiedniego definicyjnego rozszerzenia rachunku LC została zagwarantowana przez ideę konstrukcji rodziny takich języków zdaniowych, że każdy następny n+1-język różni się od poprzedniego n-języka słownikiem bogatszym o wyrażenia opisujące nowe sytuacje elementarne. W wyniku definicyjnego rozszerzenia LC o funktory G^+ i G^- opisujące G — zmiany, otrzymaliśmy LCG — logikę zmian, dla której wykazaliśmy, że jest ona spełniona w klasie wyznaczonych wcześniej struktur. (Jak się okazuje, logika LCG jest także pełna w tej klasie, jednak dowód twierdzenia o pełności wykracza poza ramy niniejszego artykułu). Na gruncie logiki LCG przedstawiliśmy następnie dowody niektórych tez (T1-T44) pokazujących wybrane własności C- i G-zmian oraz zależności między nimi. Na koniec sformułowaliśmy twierdzenie o dedukcyjnej równoważności rachunku LC z formalizacją LNC — zdaniową logiką zmiany, która operuje dwoma terminami pierwotnymi — terminami zmiany i następstwa (czasowego), a następnie szkicowo porównaliśmy go z wybranymi temporalnymi logikami zmiany: And Next von Wrighta, F — Clifforrda oraz LZD — Wajszczyka.

BIBLIOGRAFIA

Arystoteles (1990), *Fizyka*, [w:] *Dzieła wszystkie*, tłum. K. Leśniak, t.2, Warszawa, PWN, s. 23-206;

Augustynek Z. (1975), *Natura czasu*, Warszawa, PWN;

Borkowski L., Słupecki J. (1985), *Elementy logiki formalnej i teorii mnogości*, Warszawa, PWN;

Clifford J. (1966), *Tense logic and the logic of change*, „Logique et Analyse", nr 34, s. 219-230;

Leibniz G.W. (1969), *Wyznanie wiary filozofa*, Warszawa, PWN;

Koj L., Modrzejewska A. (2002), *Próbne ujęcie podstaw ewentyzmu*, „Studia metafilozoficzne", t.2, Lublin, TN KUL, s. 375-423;

Świętorzecka K. (2006), *Propozycja formalizacji pojęcia zmiany — rachunek LNC*, [w:] *Myśli o języku, nauce i wartościach. Księga pamiątkowa w sześćdziesiątą rocznicę urodzin Prof. Jacka J. Jadackiego*, red. Strawiński W., Grygianiec M., Brożek A., Warszawa, Wydawnictwo Naukowe Semper, s.168-179;
Wajszczyk J. (1995), *Logika a czas i zmiana*, Olsztyn, Wyższa Szkoła Pedagogiczna;
Wolniewicz B. (1968), *Rzeczy i fakty. Wstęp do pierwszej filozofii Wittgensteina*, Warszawa, PWN;
von Wright G.H. (1965), *And Next*, "Acta Philosophica Fennica", fasc. 18.

DODATEK

Ad Twierdzenie 1.
Dowody:

(i) Załóżmy, że: $CA \to C\neg A$ nie jest prawdziwa, wówczas $\exists\varphi\ \exists n \geq lv(A)$ ($\varphi \vDash^{n} CA$ oraz $\varphi \nvDash^{n} C\neg A$) [Def5,6,7]. Wtedy $\varphi^* \vDash^{k} CA$ oraz $\varphi^* \nvDash^{k} C\neg A$. Stąd: ($\varphi^* \vDash^{k} A$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} \neg A$) lub ($\varphi^* \vDash^{k} \neg A$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} A$). A także: ($\varphi^* \nvDash^{k} \neg A$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} A$) oraz ($\varphi^* \nvDash^{k} A$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} \neg A$). Teraz zakładamy: ($\varphi^* \vDash^{k} A$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} \neg A$). Z tego oraz alternatywy: ($\varphi^* \nvDash^{k} A$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} \neg A$) otrzymujemy sprzeczność: $\varphi^* \vDash^{k} A$, $\varphi^* \nvDash^{k} A$. Jeżeli założymy: ($\varphi^* \vDash^{k} \neg A$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} A$), wówczas na podstawie alternatywy: ($\varphi^* \nvDash^{k} \neg A$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} A$) także mamy sprzeczność: $\varphi^* \vDash^{k+1} A$, $\varphi^* \nvDash^{k+1} A$.

(ii) Założenie: $C(A \wedge B) \to CA \vee B$ nie jest prawdziwa, co znaczy, że: $\exists\varphi\ \exists n \geq \max(lv(A), lv(B))$ ($\varphi \vDash^{n} C(A \wedge B)$ oraz $\varphi \nvDash^{n} (CA \vee CB)$ [Def5,6,7]. Stąd: 1. $\varphi^* \vDash^{k} C(A \wedge B)$ oraz 2. $\varphi^* \vDash^{k} CA \vee CB$. Na mocy Def5, 1 jest równoważny z: 3. ($\varphi^* \vDash^{k} (A \wedge B)$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} \neg(A \wedge B)$) lub ($\varphi^* \vDash^{k} \neg(A \wedge B)$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} (A \wedge B)$), 2 zaś jest równoważny z: 4. $\varphi^* \nvDash^{k} CA$ oraz $\varphi^* \nvDash^{k} CB$, co jest także równoważne z: 5. $\varphi^* \vDash^{k} A$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} A$ oraz 6. $\varphi^* \nvDash^{k} A$ lub $\varphi^* \vDash^{k+1} A$ oraz 7. $\varphi^* \vDash^{k} B$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} B$ oraz 8. $\varphi^* \nvDash^{k} B$ lub $\varphi^* \vDash^{k+1} B$. Teraz załóżmy pierwszy człon alternatywy 3: 1.1 ($\varphi^* \vDash^{k} (A \wedge B)$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} \neg(A \wedge B)$).[16] Z 1.1 otrzymujemy: 1.2 $\varphi^* \vDash^{k} A$, 1.3 $\varphi^* \vDash^{k} B$, 1.4 $\varphi^* \nvDash^{k+1} A$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} B$. W związku z 6 oraz 1.2 prawdą jest, że: 1.5 $\varphi^* \vDash^{k+1} A$. Z 1.5 oraz 1.4 mamy: 1.6 $\varphi^* \nvDash^{k+1} B$. Następnie na mocy 1.6 oraz 8: 1.7 $\varphi^* \nvDash^{k} B$ — i tak otrzymujemy sprzeczność 1.7 oraz 1.3. Teraz bierzemy drugi człon alternatywy 3: 2.1 $\varphi^* \vDash^{k} \neg(A \wedge B)$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} (A \wedge B)$, co jest równoważne z: 2.2 $\varphi^* \nvDash^{k} A$ lub $\varphi^* \nvDash^{k} B$ oraz 2.3 $\varphi^* \vDash^{k+1} A$ oraz 2.4 $\varphi^* \vDash^{k+1} B$. Z 2.3 oraz 5 mamy: 2.5 $\varphi^* \vDash^{k} A$. Teraz użyjemy 2.5 oraz 2.2, aby otrzymać: 2.6 $\varphi^* \nvDash^{k} B$. Z 2.6 oraz 7 wynika sprzeczność z 2.4: 2.7 $\varphi^* \nvDash^{k+1} B$.

(iii) Zakładamy, że: $\neg A \wedge B \wedge CA \wedge \neg CB \to C(A \wedge B)$ nie jest prawdziwa, tj.: $\exists\varphi\ \exists n \geq \max(lv(A), lv(B))$ ($\varphi \vDash^{n} \neg A$ oraz $\varphi \vDash^{n} B$ oraz $\varphi \vDash^{n} CA$ oraz $\varphi \vDash^{n} \neg CB$ oraz $\varphi \nvDash^{n} C(A \wedge B)$)[Def5,6,7]. Stąd: 1. $\varphi^* \nvDash^{k} A$; 2. $\varphi^* \vDash^{k} B$; 3. $\varphi \vDash^{k} CA$; 4. $\varphi^* \nvDash^{k} CB$; 5. $\varphi^* \nvDash^{k} C(A \wedge B)$. Za pomocą Def5 oraz 3 mamy: 6. ($\varphi^* \vDash^{k} A$ oraz $\varphi^* \nvDash^{k+1} A$) lub ($\varphi^* \nvDash^{k} A$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} A$). Z 4 wynika to, że: 7. ($\varphi^* \nvDash^{k} B$ lub $\varphi^* \vDash^{k+1} B$) oraz z 5 mamy: 8. $\varphi^* \vDash^{k} (A \wedge B)$ lub $\varphi^* \nvDash^{k+1} (A \wedge B)$. Z 6 oraz 1 otrzymujemy: 9. $\varphi^* \vDash^{k+1} A$. Następnie 2 oraz 7 implikują: 10. $\varphi^* \vDash^{k+1} B$. Z 9 oraz 10 mamy: 11. $\varphi^* \vDash^{k+1} (A \wedge B)$. W związku z alternatywą 8 oraz 11 możemy napisać: 12. $\varphi^* \vDash^{k} A$, co jest sprzeczne z 1.

(iv) Załóżmy, że: $\neg A \wedge \neg B \wedge CA \wedge CB \to C(A \wedge B)$ nie jest prawdziwa, stąd: $\exists\varphi\ \exists n \geq \max(lv(A), lv(B))$ ($\varphi \vDash^{n} \neg A$ oraz $\varphi \vDash^{n} \neg B$ oraz $\varphi \vDash^{n} CA$ oraz $\varphi \vDash^{n} CB$ oraz $\varphi \nvDash^{n} C(A \wedge B)$) [Def5,6,7]. Dlatego: 1. $\varphi^* \nvDash^{k} A$; 2. $\varphi^* \nvDash^{k} B$; 3. $\varphi^* \vDash^{k} CA$; 4. $\varphi^* \vDash^{k} CB$; 5. $\varphi^* \nvDash^{k} C(A \wedge B)$. Z 3 wynika to, że: 6. ($\varphi^* \vDash^{k} A$ oraz $\varphi^* \nvDash^{k+1} A$) lub ($\varphi^* \nvDash^{k} A$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} A$). Za pomocą 4 otrzymujemy: 7. ($\varphi^* \vDash^{k} B$ oraz $\varphi^* \nvDash^{k+1} B$) lub ($\varphi^* \nvDash^{k} B$ oraz $\varphi^* \vDash^{k+1} B$). Z 1 oraz 6 mamy: 8. $\varphi^* \vDash^{k+1} A$ oraz z 2 i 7: 9. $\varphi^* \vDash^{k+1} B$. Stąd, 8 oraz 9 implikują: 10. $\varphi^* \vDash^{k+1} (A \wedge B)$. Ponownie za pomocą

[16] Stosujemy sposób numerowania wierszy poddowodu z [Słupecki, Borkowski 1985].

Def5 możemy wyprowadzić z 5: 11. ($\varphi^*\models^k(A\wedge B)$ lub $\varphi^*\not\models^{k+1}(A\wedge B)$). Z 10 oraz 11 otrzymujemy: 12. $\varphi^*\models^k(A\wedge B)$ co jest sprzeczne z 1.

(v) Zakładamy, że: $\neg A\wedge CA\wedge\neg B\to C(A\vee B)$ nie jest prawdziwa, tj.: $\exists\varphi\ \exists n\geq\max(lv(A),lv(B))$ ($\varphi\models^n\neg A$ oraz $\varphi\models^n CA$ oraz $\varphi\models^n\neg B$ oraz $\varphi\not\models^n C(A\vee B)$) [Def5,6,7]. Dlatego: 1.$\varphi^*\not\models^k A$; 2. $\varphi^*\models^k CA$; 3. $\varphi^*\not\models^k B$; 4. $\varphi^*\not\models^k C(A\vee B)$. Z 2 wynika, że: 5. ($\varphi^*\models^k A$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1}A$) lub ($\varphi^*\not\models^k A$ oraz $\varphi^*\models^{k+1}A$). Z 5 oraz 1 wyprowadzamy: 6. $\varphi^*\models^{k+1}A$. Def5 oraz 4 implikują: 7.$\varphi^*\models^k(A\vee B)$ lub $\varphi^*\not\models^{k+1}(A\vee B)$. Z 6 mamy: 8. $\varphi^*\models^{k+1}(A\vee B)$ co razem z 7 daje: 9. $\varphi^*\models^k(A\vee B)$. Za pomocą 9 oraz 1 otrzymujemy sprzeczność z 3: 10. $\varphi^*\models^k B$.

(vi) Zakładamy, że: $C(A\leftrightarrow B)\to CA\veebar CB$ nie jest prawdziwa, co znaczy, że: $\exists\varphi\ \exists n(\max(lv(A),lv(B))$ ($\varphi\models^n C(A\leftrightarrow B)$ oraz $\varphi\not\models^n(CA\veebar CB)$). Stąd:

1. $\varphi^*\models^k C(A\leftrightarrow B)$
2. $\varphi^*\not\models^k (CA\veebar CB)$
3. ($\varphi^*\models^k (A\leftrightarrow B)$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1} (A\leftrightarrow B)$) lub ($\varphi^*\not\models^k (A\leftrightarrow B)$ oraz $\varphi^*\models^{k+1} (A\leftrightarrow B)$) [Def5, 1]
4. $\varphi^*\models^k ((CA\wedge CB)\vee(\neg CA\wedge\neg CB))$ [Def5, 2]

1.1 $\varphi^*\models^k (A\leftrightarrow B)$
1.2 $\varphi^*\not\models^{k+1} (A\leftrightarrow B))$ [założenie — por. alternatywa 3]
1.1.1 $\varphi^*\models^k (CA\wedge CB)$ [założenie — por. alternatywa 4]
1.1.2 $\varphi^*\models^k CA$
1.1.3 $\varphi^*\models^k CB$ [1.1.1]
1.1.4 ($\varphi^*\models^k A$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1}A$) lub ($\varphi^*\not\models^k A$ oraz $\varphi^*\models^{k+1}A$) [Def5, 1.1.2]
1.1.5 ($\varphi^*\models^k B$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1}B$) lub ($\varphi^*\not\models^k B$ oraz $\varphi^*\models^{k+1}B$) [Def5, 1.1.3]

1.1.1.1 ($\varphi^*\models^k A$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1}A$)	[zał —1.1.4]	2.1.1.1 ($\varphi^*\not\models^k A$ oraz $\varphi^*\models^{k+1}A$)	[zał — 1.1.4]
1.1.1.2 $\varphi^*\models^k A$		2.1.1.2 $\varphi^*\not\models^k A$	
1.1.1.3 $\varphi^*\not\models^{k+1}A$	[1.1.1.1]	2.1.1.3 $\varphi^*\models^{k+1}A$	[2.1.1.1]
1.1.1.4 $\varphi^*\models^k B$	[1.1; 1.1.1.2]	2.1.1.4 $\varphi^*\not\models^k B$	[1.1; 2.1.1.2]
1.1.1.5 $\varphi^*\not\models^{k+1}B$	[1.1.5;1.1.1.4]	2.1.1.5 $\varphi^*\models^{k+1}B$	[2.1.1.4; 1.1.5]
1.1.1.6 $\varphi^*\models^{k+1} (A\leftrightarrow B))$	[1.1.1.3;1.1.1.5]	2.1.1.6 $\varphi^*\models^{k+1} (A\leftrightarrow B))$	[2.1.1.3; 2.1.1.5]
	sprz: 1.1.1.6,1.2		sprz: 2.1.1.6; 1.2

2.1.1 $\varphi^*\models^k (\neg CA\wedge\neg CB)$ [założenie — por. 4]
2.1.2 $\varphi^*\models^k \neg CA$
2.1.3 $\varphi^*\models^k \neg CB$ [2.1.1]
2.1.4 $\varphi^*\not\models^k A$ lub $\varphi^*\models^{k+1}A$
2.1.5 $\varphi^*\models^k A$ lub $\varphi^*\models^{k+1}A$ [Def5, 2.1.2]
2.1.6 $\varphi^*\not\models^k B$ lub $\varphi^*\models^{k+1}B$
2.1.7 $\varphi^*\models^k B$ lub $\varphi^*\models^{k+1}B$ [Def5; 2.1.3]

3.2.1.1 $\varphi^*\not\models^k A$	[zał-2.1.4]	4.2.1.1 $\varphi^*\models^{k+1}A$	[zał-2.1.4]
3.2.1.2 $\varphi^*\not\models^k B$	[1.1;3.2.1.1]	4.2.1.2 $\varphi^*\not\models^{k+1}B$	[1.2; 4.2.1.1]
3.2.1.3 $\varphi^*\not\models^{k+1}B$	[3.2.1.2;2.1.7]	4.2.1.3 $\varphi^*\not\models^k B$	[4.2.1.2; 2.1.6]
3.2.1.4 $\varphi^*\models^{k+1}A$	[1.2;3.2.1.3]	4.2.1.4 $\varphi^*\not\models^k A$	[1.1; 4.2.1.4]
3.2.1.5 $\varphi^*\models^k A$	[2.1.5;3.2.1.4]	4.2.1.5 $\varphi^*\not\models^{k+1}A$	[2.1.5; 4.2.1.4]
	sprz: 3.2.1.1, 3.2.1.5.		sprz: 4.2.1.1; 4.2.1.5.

2.1 $\varphi^*\not\models^k (A\leftrightarrow B)$
2.2 $\varphi^*\models^{k+1} (A\leftrightarrow B))$ [założenie — por. 3]
3.2.1 $\varphi^*\models^k (CA\wedge CB)$ [założenie — por. 4]
3.2.2 $\varphi^*\models^k CA$
3.2.3 $\varphi^*\models^k CB$ [3.2.1]
3.2.4 ($\varphi^*\models^k A$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1}A$) lub ($\varphi^*\not\models^k A$ oraz $\varphi^*\models^{k+1}A$) [Def5, 3.2.2]
3.2.5 ($\varphi^*\models^k B$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1}B$) lub ($\varphi^*\not\models^k B$ oraz $\varphi^*\models^{k+1}B$) [Def5, 3.2.3]

5.3.1.1($\varphi^*\models^k A$ oraz $\varphi^*\not\models^{k+1}A$)	[zał-por. 3.2.4]	6.3.1.1 ($\varphi^*\not\models^k A$ oraz $\varphi^*\models^{k+1}A$)	[zał-3.2.4]
5.3.1.2 $\varphi^*\models^k A$		6.3.1.2 $\varphi^*\not\models^k A$	

5.3.1.3 $\varphi^*\nvDash^{k+1}A$	[5.3.1.1]	6.3.1.3 $\varphi^*\vDash^{k+1}A$	[6.3.1.1]
5.3.1.4 $\varphi^*\nvDash^{k} B$	[2.1; 5.3.1.2]	6.3.1.4 $\varphi^*\vDash^{k} B$	[2.1; 6.3.1.2]
5.3.1.5 $\varphi^*\vDash^{k+1}B$	[3.2.5;5.3.1.4]	6.3.1.5 $\varphi^*\nvDash^{k+1}B$	[6.3.1.4; 3.2.5]
5.3.1.6 $\varphi^*\nvDash^{k+1} (A\leftrightarrow B))$	[5.3.1.3;5.3.1.5]	6.3.1.6 $\varphi^*\nvDash^{k+1} (A\leftrightarrow B))$	[6.3.1.3; 6.3.1.5]
	sprz: 5.3.1.6;2.2.		sprz: 6.3.1.6; 2.2.

4.2.1 $\varphi^*\vDash^{k} (\neg CA\wedge\neg CB)$ [założenie — por. 4]
4.2.2 $\varphi^*\vDash^{k} \neg CA$
4.2.3 $\varphi^*\vDash^{k} \neg CB$ [4.2.1]
4.2.4 $\varphi^*\nvDash^{k}A$ lub $\varphi^*\vDash^{k+1}A$
4.2.5 $\varphi^*\vDash^{k} A$ lub $\varphi^*\nvDash^{k+1}A$ [Def5,4.2.2]
4.2.6 $\varphi^*\nvDash^{k}B$ lub $\varphi^*\vDash^{k+1}B$
4.2.7 $\varphi^*\vDash^{k} B$ lub $\varphi^*\nvDash^{k+1}B$ [Def5; 4.2.3]

7.4.1.1 $\varphi^*\nvDash^{k}A$	[zał — por. 4.2.4]	7.4.2.1 $\varphi^*\vDash^{k+1}A$	[zał. — por. 4.2.4]
7.4.1.2 $\varphi^*\vDash^{k} B$	[2.1; 7.4.1.1]	7.4.2.2 $\varphi^*\vDash^{k+1}B$	[2.2; 7.4.2.1]
7.4.1.3 $\varphi^*\vDash^{k+1}B$	[7.4.1.2; 4.2.6]	7.4.2.3 $\varphi^*\vDash^{k}B$	[7.4.2.2; 4.2.7]
7.4.1.4 $\varphi^*\vDash^{k+1}A$	[2.2; 7.4.1.3]	7.4.2.4 $\varphi^*\nvDash^{k}A$	[2.1; 7.4.2.3]
7.4.1.5 $\varphi^*\vDash^{k}A$	[4.2.5; 7.4.1.4]	7.4.2.5 $\varphi^*\nvDash^{k+1}A$	[4.2.5; 7.4.2.4]
	sprz: 7.4.1.1, 7.4.1.5.		sprz: 7.4.2.1; 7.4.2.5.

Ad Twierdzenie 2.

(i) Niech n=2 oraz: $\varphi^1(A)$, $\varphi^1(B)=1$, $\varphi^2(A)=1$, $\varphi^2(B)=0$; (ii) Niech n=2 oraz: $\varphi^1(A)=0$, $\varphi^1(B)=1$, $\varphi^2(A)=1$, $\varphi^2(B)=0$; (iii) Niech n=2 oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^1(B)=0$, $\varphi^2(A)=0$, $\varphi^2(B)=1$; (iv) Niech n=2 oraz: $\varphi^1(A)=0$, $\varphi^1(B)=0$, $\varphi^2(A)=1$, $\varphi^2(B)=0$; (v) Niech n=2 oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^1(B)=1$, $\varphi^2(A)=1$, $\varphi^2(B)=0$; (vi) Niech n=2 oraz: $\varphi^1(A)=0$, $\varphi^1(B)=1$, $\varphi^2(A)=0$, $\varphi^2(B)=0$; (vii) Niech n=2 oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^1(B)=1$, $\varphi^2(A)=0$, $\varphi^2(B)=1$.; (viii) Porównaj: (ii); (ix) Porównaj: (vii).

Ad Twierdzenie 3.

Dowody można skonstruować w sposób standardowy. Rozważmy jedynie (ii) oraz specjalny przypadek (iii) — schemat inferencyjny: CA, $A\leftrightarrow B\vDash CB$:

(ii) Zakładamy nie wprost, że: A jest prawdziwe oraz $\neg CA$ nie jest prawdziwe. Na mocy Def5, 6, 7 możemy następnie napisać: 1. $\forall_\varphi\forall_{k\geq lv(A)}\ \varphi\vDash^{k}A$, 2. $\exists_\varphi\exists_{k\geq lv(A)}\ \varphi\vDash^{k} \neg CA$. W związku z 2: 3. $\exists_\varphi\exists_{k\geq lv(A)}\ \varphi\vDash^{k} CA$. Stąd mamy: 4. ($\varphi^*\vDash^{k}A$ oraz $\varphi^*\nvDash^{k+1}A$) lub ($\varphi^*\nvDash^{k}A$ oraz $\varphi^*\vDash^{k+1}A$). Obydwa człony alternatywy 4 razem z 1 prowadzą do sprzeczności.

(iii) Załóżmy, że formuły: CA oraz $A\leftrightarrow B$ są prawdziwe oraz CB nie jest prawdziwa [dowód nie wprost]. Stąd mamy: 1. $\forall_\varphi\forall_{k\geq lv(A)}\ \varphi\vDash^{k}CA$, 2. $\forall_\varphi\forall_{k\geq max(lv(A),lv(B))}\ \varphi\vDash^{k} A\leftrightarrow B$, 3. $\exists_\varphi\exists_{k\geq lv(B)}\ \varphi\nvDash^{k} CB$. W związku z 3 możemy napisać: 4. $\varphi^*\nvDash^{k}B$ lub $\varphi^*\vDash^{k+1}B$ oraz 5. $\varphi^*\vDash^{k}B$ lub $\varphi^*\nvDash^{k+1}B$. Z 1 oraz 2 mamy: 6. ($\varphi^*\vDash^{k}A$ oraz $\varphi^*\nvDash^{k+1}A$) lub ($\varphi^*\nvDash^{k}A$ oraz $\varphi^*\vDash^{k+1}A$), 7. $\varphi^*\vDash^{k}(A\leftrightarrow B)$, 8. $\varphi^*\vDash^{k+1}(A\leftrightarrow B)$. Najpierw bierzemy: 1.1 ($\varphi^*\vDash^{k}A$ oraz $\varphi^*\nvDash^{k+1}A$) [6]. Wówczas mamy: 1.2 $\varphi^*\vDash^{k}B$ [1.1, 7] i następnie: 1.3 $\varphi^*\nvDash^{k+1}B$ [1.2, 4]. Stąd: 1.4 $\varphi^*\vDash^{k+1}A$ [1.3, 8] — to jest sprzeczne z: $\varphi^*\nvDash^{k+1}A$ z 1.1. Teraz bierzemy: 2.1 ($\varphi^*\nvDash^{k}A$ oraz $\varphi^*\vDash^{k+1}A$) [6], z tego zaś mamy: 2.2 $\varphi^*\vDash^{k+1}B$ [2.1, 8]. Stąd: 2.3 $\varphi^*\vDash^{k} B$ [2.2, 5], a następnie: 2.4 $\varphi^*\vDash^{k}A$ [2.3, 7] — to jest sprzeczne z: $\varphi^*\nvDash^{k}A$ z 2.1.

Ad Twierdzenie S.

Dowód jest indukcyjny — wszystkie aksjomaty są logicznie prawdziwe [Twierdzenie 1], reguły pierwotne zachowują prawdziwość logiczną [Twierdzenie 3].

Ad L1(a)-(d).

(a) —

1.$A\wedge B\wedge\neg CA\wedge CB\rightarrow C(A\rightarrow B)$ [T3], 2. $A\wedge\neg CA\wedge\neg C(A\rightarrow B)\rightarrow\neg B\vee\neg CB$ [1], 3. $(A\rightarrow B)\wedge A\rightarrow B\vee CB$, 4. $(A\rightarrow B)\wedge\neg C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg CA\rightarrow(\neg B\vee\neg CB)\wedge(B\vee CB)$ [2,3], 5. $(A\rightarrow B)\wedge\neg C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg CA\rightarrow(B\wedge\neg CB)\vee(\neg B\wedge CB)$ [4].

(b) —

1. $\neg A\wedge CA\wedge\neg B\wedge\neg CB\rightarrow C(A\rightarrow B)$ [T4], 2. $\neg A\wedge CA\wedge\neg C(A\rightarrow B)\rightarrow B\vee CB$ [1], 3. $\neg A\wedge CA\wedge B\wedge CB\rightarrow C(A\rightarrow B)$ [T5], 4. $\neg A\wedge CA\wedge\neg C(A\rightarrow B)\rightarrow\neg B\vee\neg CB$ [3], 5. $\neg A\wedge CA\wedge\neg C(A\rightarrow B)\rightarrow(B\vee CB)\wedge(\neg B\vee\neg CB)$ [2,4], 6. $(A\rightarrow B)\wedge\neg C(A\rightarrow B)\wedge\neg A\wedge CA\rightarrow(B\wedge\neg CB)\vee(\neg B\wedge CB)$ [5].

(c) —

1. $C(A\rightarrow B)\rightarrow CA\vee CB$ [T7], 2. $C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg B\rightarrow CA\vee CB$ [1], 3. $C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg CA\rightarrow B\vee CB$, 4. $\neg(A\rightarrow B)\rightarrow\neg B\vee\neg CB$ [logika klasyczna], 5. $\neg(A\rightarrow B)\wedge C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg CA\rightarrow(B\vee CB)\wedge(\neg B\vee\neg CB)$ [3,4], 6. $\neg(A\rightarrow B)\wedge C(A\rightarrow B)\wedge A\wedge\neg CA\rightarrow(B\wedge\neg CB)\vee(\neg B\wedge CB)$ [5].

(d) — na mocy logiki klasycznej.

Ad Twierdzenie 4.

(i) wyprowadzalność N-reguły:

1. $\models A$ [założenie], 2. $\models\neg CA$ [$\neg$C-reguła,1], 3. $\models A\wedge\neg CA$ [1,2], 4. $\models(A\wedge\neg CA)\vee(\neg A\wedge CA)$ [3], 5. $\models NA$ [Rep,DefN,4].

(ii) wyprowadzalność $\rightarrow$N-reguły:

1. $\models A\rightarrow B$ [założenie], 2. $\models N(A\rightarrow B)$ [ponieważ (i)], 3. $\models NA\rightarrow NB$ [T9, 2].

Ad Twierdzenie 5.

(i) dla: $NA\rightarrow A$ — niech $n=2$ oraz: $\varphi^1(A)=0$, $\varphi^2(A)=1$, dla: $A\rightarrow NA$ — niech $n=2$ oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^2(A)=0$;

(ii) dla: $NNA\rightarrow NA$ — niech $n=3$ oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^2(A)=0$, $\varphi^3(A)=1$, dla: $NA\rightarrow NNA$ — niech $n=3$ oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^2(A)=1$, $\varphi^3(A)=0$;

(iii) Niech $n=3$ oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^2(B)=1$, $\varphi^2(D)=0$, $\varphi^3(D)=1$, (iv) Niech $n=3$ oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^2(B)=1$, $\varphi^2(D)=1$, $\varphi^3(D)=0$; (v) Niech $n=2$ oraz: $\varphi^1(A)=0$, $\varphi^1(B)=1$, $\varphi^2(A)=1$, $\varphi^2(B)=1$.

Ad Twierdzenie 6.

(i) Niech $n=2$ oraz: $\varphi^1(A)=1$, $\varphi^2(A)=1$. Dla $G=G^+$: $\varphi^2(\alpha_2)=0$, dla $G=G^-$: $\varphi^2(\alpha_2)=1$;

(ii) Niech $n=2$ oraz: $\varphi^2(A)=0$. Dla $G=G^+$: $\varphi^2(\alpha_2)=0$, dla $G=G^-$: $\varphi^2(\alpha_2)=1$;

(iii) Niech $n=2$ oraz: $\varphi^2(A)=1$, $\varphi^2(B)=1$. Dla $G=G^+$: $\varphi^2(\alpha_2)=0$, dla $G=G^-$: $\varphi^2(\alpha_2)=1$;

(iv) (a): Niech $n=3$ oraz: $lv(A)=1$, $lv(B)=2$. $\varphi^3(A)=1$, $\varphi^3(B)=1$. Dla $G=G^+$: $\varphi^3(\alpha_2)=0$, $\varphi^3(\alpha_3)=1$, dla $G=G^-$: $\varphi^3(\alpha_2)=1$; $\varphi^3(\alpha_3)=0$; (b): Niech $n=3$ oraz: $lv(A)=1$, $lv(B)=2$. $\varphi^3(A)=1$, $\varphi^3(B)=0$. Dla $G=G^+$: $\varphi^3(\alpha_2)=0$, $\varphi^3(\alpha_3)=1$, dla $G=G^-$: $\varphi^3(\alpha_2)=1$; $\varphi^3(\alpha_3)=0$; (c) Niech $n=3$ oraz: $lv(A)=2$, $lv(B)=1$. $\varphi^3(A)=1$, $\varphi^3(B)=1$. Dla $G=G^+$: $\varphi^3(\alpha_2)=0$, $\varphi^3(\alpha_3)=1$, dla $G=G^-$: $\varphi^3(\alpha_2)=1$; $\varphi^3(\alpha_3)=0$.

Ad Twierdzenie 7.

1. $\vdash A\leftrightarrow B$ [założenie], 2. $\vdash A\wedge\alpha_n\leftrightarrow B\wedge\alpha_n$ [Rep,1], 3. $\vdash A\wedge\neg\alpha_n\leftrightarrow B\wedge\neg\alpha_n$ [Rep,1], 4. $\vdash GA\leftrightarrow GB$ [DefG^+, DefG^-, 2,3].

Ad Twierdzenie 8.

(i) Niech $n=2$ oraz: $\varphi^2(\alpha_2)=1$, $\varphi^3(\alpha_2)=1$, $\varphi^3(A)=1$; (ii) Niech $n=2$ oraz: $\varphi^2(\alpha_2)=0$, $\varphi^3(\alpha_2)=0$, $\varphi^3(A)=1$; (iii) Niech $n=2$ oraz: $\varphi^2(A)=0$, $\varphi^3(A)=1$. Dla $G=G^+$: $\varphi^2(\alpha_2)=1$, dla $G=G^-$: $\varphi^2(\alpha_2)=0$.

Ad Twierdzenie 9.

Rozważane rachunki mają te same pierwotne reguły inferencji, wystarczy więc wykazać, że aksjomaty je charakteryzujące są w nich odpowiednio wyprowadzalne. Jak zauważamy:

(a) każdy aksjomat rachunku LNC jest tezą logiki LC: Ax1’-Ax4’ oraz Ax7’ są odpowiednio tezami logiki LC: T8, T9, Ax1, T18, T17; aksjomaty Ax5’ i Ax6’ można otrzymać z T16a i b na podstawie definicji Def$\uparrow$;

(b) każdy aksjomat LC jest tezą logiki LNC: Ax1 występuje w LC jako aksjomat Ax3’.

W dowodach wyprowadzalności pozostałych aksjomatów rachunku LC na gruncie LNC są użyteczne następujące tezy LNC, których szczegółowe dowody są podane w [Świętorzecka 2006]:

T1’. $CA\leftrightarrow C\neg A$ [Ax3’]

T2’. $CA\rightarrow(\neg A\rightarrow NA)$ [Ax4’,T1’]

T3’. $CA\rightarrow(A\leftrightarrow N\neg A)$ [Ax4’, T2’]

T4’. $\neg A\uparrow A \leftrightarrow\neg A\wedge NA$ [Def$\uparrow$]

T5’. $CA\rightarrow A\uparrow\neg A\vee\neg A\uparrow A$ [T3’,Ax1’,T4’]

T6’. $CA\leftrightarrow A\uparrow\neg A\vee\neg A\uparrow A$ [T5’, Ax5’, Ax6’]

T7’. $CA\leftrightarrow(A\leftrightarrow N\neg A)$ [T6’, Def$\uparrow$].

T8’. $NA \leftrightarrow (A\wedge\neg CA) \vee (\neg A\wedge CA)$ [T3’, Ax1’, Ax6’, Def$\uparrow$, Ax5’,T1’]

T9’. $N(A\wedge B)\leftrightarrow NA\wedge NB$[Ax2’].

T10’. $N(A\vee B)\leftrightarrow NA\vee NB$ [T9,Ax1’]

T11’. $NCA\rightarrow CNA$ [T7’,T9’,Ax2’, Ax1’],

T12’. $NCA\leftrightarrow CNA$ [Ax7, T11]

Aksjomat Ax2 w LNC jest w LNC tezą z nr 13:

T13’. $C(A\wedge B)\rightarrow CA\vee CB$ [Ax2]

1. $(A\wedge B\wedge\neg N(A\wedge B)) \vee (\neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B)) \rightarrow (A\wedge B\wedge N\neg(A\wedge B)) \vee (\neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B))$ [logika klasyczna, Ax1’] $\vdash$ 2. $(A\wedge B\wedge\neg N(A\wedge B)) \vee (\neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B)) \rightarrow (A\wedge B\wedge N(\neg A\vee\neg B)) \vee ((\neg A\vee\neg B)\wedge N(A\wedge B))$ [1] $\vdash$ 3. $(A\wedge B\wedge\neg N(A\wedge B)) \vee (\neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B)) \rightarrow (A\wedge B\wedge(N\neg A\vee N\neg B)) \vee ((\neg A\vee\neg B)\wedge(NA\wedge NB))$ [2, T9’, T10’] $\vdash$ 4. $(A\wedge B\wedge\neg N(A\wedge B)) \vee (\neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B)) \rightarrow (A\wedge B\wedge N\neg A) \vee (A\wedge B\wedge N\neg B) \vee (\neg A\wedge NA\wedge NB) \vee (\neg B\wedge NA\wedge NB)$ [3] $\vdash$ 5. $C(A\wedge B) \rightarrow C(A\vee B)$ [Rep, 4, T6’].

Zachowując przyjętą w oryginalnym sformułowaniu numerację tez rachunku LNC, zauważmy:

T14’. $C(A\vee B)\rightarrow CA\vee CB$

1.$C(\neg A\wedge\neg B)\rightarrow C\neg A\vee C\neg B$ [T13’ $(A/\neg A,\ B/\neg B)$], 2. $C\neg(A\vee B)\rightarrow C\neg A\vee C\neg B$ [1], 3. $C(A\vee B)\rightarrow CA\vee CB$ [T1’];

T15’. $(A\vee B)\wedge N(E\vee D)\leftrightarrow(A\wedge NE)\vee(A\wedge ND)\vee(B\wedge NE)\vee(B\wedge ND)$ [T10’]

T16’. $(A\wedge NB)\wedge(E\wedge ND)\leftrightarrow(A\wedge E)\wedge N(B\wedge D)$ [T9’]

T17’. $(A\wedge NB)\wedge ND\leftrightarrow A\wedge N(B\wedge D)$ [T9’],

a następnie sformułujmy dowody wyrażeń będących w LC aksjomatami odpowiednio Ax3-Ax6:

T18’. $\neg A\wedge B\wedge CA\wedge\neg CB\rightarrow C(A\wedge B)$ [Ax3]

1.$\neg A\wedge B\wedge((A\wedge\neg NA) \vee (\neg A\wedge NA))\wedge\neg CB \rightarrow \neg A\wedge B\wedge NA\wedge\neg CB$ [logika klasyczna], 2. $\neg A\wedge B\wedge CA\wedge\neg CB \rightarrow \neg A\wedge B\wedge NA\wedge\neg((B\wedge\neg NB) \vee (\neg B\wedge NB))$ [Rep, T6’, 1], 3. $\neg A\wedge B\wedge NA\wedge\neg((B\wedge\neg NB)\vee(\neg B\wedge NB)) \rightarrow \neg A \wedge B \wedge NA \wedge NB \wedge (\neg B\vee NB) \wedge (B\vee\neg NB)$ [logika klasyczna]; 4. $\neg A\wedge B\wedge NA\wedge(\neg B\vee NB) \wedge (B\vee\neg NB) \rightarrow \neg A \wedge B \wedge NA \wedge NB$ [logika klasyczna], 5. $\neg A \wedge B \wedge CA \wedge \neg CB \rightarrow \neg A \wedge B \wedge NA \wedge NB$ [2,3,4]; 6. $\neg A \wedge B \wedge NA \wedge NB \rightarrow \neg(A\wedge B) \wedge NA \wedge NB$ [logika klasyczna], 7. $\neg A \wedge B \wedge CA \wedge \neg CB \rightarrow \neg(A\wedge B) \wedge N(A\wedge B)$ [5,6, Rep, T9’], 8. $\neg A \wedge B \wedge CA \wedge \neg CB\rightarrow (\neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B)) \vee (A\wedge B\wedge\neg N(A\wedge B))$ [7], 9. $\neg A\wedge B\wedge CA\wedge\neg CB \rightarrow C(A\wedge B)$ [Rep, T6’, 8];

T19’. $\neg A\wedge\neg B\wedge CA\wedge CB\rightarrow C(A\wedge B)$ [Ax4]

1.$\neg A\wedge\neg B\wedge((A\wedge\neg NA)\vee(\neg A\wedge NA))\wedge CB \rightarrow \neg A\wedge\neg B\wedge NA\wedge CB$ [logika klasyczna], 2. $\neg A\wedge\neg B\wedge CA\wedge CB \rightarrow \neg A\wedge\neg B\wedge NA\wedge((B\wedge\neg NB)\vee(\neg B\wedge NB))$ [Rep,T6’,1]; 3. $\neg A\wedge\neg B\wedge NA\wedge((B\wedge\neg NB)\vee(\neg B\wedge NB)) \rightarrow \neg A\wedge\neg B\wedge NA\wedge NB$ [logika klasyczna], 4. $\neg A\wedge\neg B\wedge CA\wedge CB \rightarrow \neg A\wedge\neg B\wedge N(A\wedge B)$ [Rep, T9’, 3], 5. $\neg A\wedge\neg B\wedge CA\wedge CB \rightarrow \neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B)$ [4], 6. $\neg A\wedge\neg B\wedge CA\wedge CB \rightarrow (\neg(A\wedge B)\wedge N(A\wedge B))\vee(A\wedge B\wedge\neg N(A\wedge B))$ [5], 7. $\neg A\wedge\neg B\wedge CA\wedge CB \rightarrow C(A\wedge B)$ [Rep, T6’, 6];

T20’. $\neg A\wedge CA\wedge\neg B\rightarrow C(A\vee B)$ [Ax5]

1.$\neg A\wedge((A\wedge\neg NA)\vee(\neg A\wedge NA))\wedge\neg B \rightarrow \neg A\wedge NA\wedge\neg B$ [logika klasyczna], 2. $\neg A\wedge CA\wedge\neg B \rightarrow \neg A\wedge NA\wedge\neg B$ [Rep, T6’,1], 3. $\neg A\wedge CA\wedge\neg B \rightarrow \neg(A\vee B)\wedge NA$ [2], 4. $\neg A\wedge CA\wedge\neg B \rightarrow \neg(A\vee B)\wedge(NA\vee NB)$ [3], 5. $\neg A\wedge CA\wedge\neg B \rightarrow \neg(A\vee B)\wedge N(A\vee B)$ [Rep, T10’,4], 6. $\neg A\wedge CA\wedge\neg B \rightarrow C\,(A\vee B)$ [Rep, T6’, 5];

T21’. $C(A\leftrightarrow B) \rightarrow CA\underline{\vee}CB$ [Ax6]

1. $((A\leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg(NA\leftrightarrow NB)) \rightarrow \neg((A\leftrightarrow\neg NA) \leftrightarrow (B\leftrightarrow\neg NB))$ [logika klasyczna], 2. $((A\leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg N(A\leftrightarrow B)) \rightarrow \neg((A\leftrightarrow\neg NA)\leftrightarrow(B\leftrightarrow\neg NB))$ [T11’, T9’, 1], 3. $((A\leftrightarrow B) \leftrightarrow N\neg(A\leftrightarrow B)) \rightarrow \neg((A\leftrightarrow N\neg A) \leftrightarrow (B\leftrightarrow N\neg B))$ [Rep, Ax1’, 2], 4. $C(A\leftrightarrow B) \rightarrow \neg(CA\leftrightarrow CB)$ [Rep, T7’, 3], 5. $C(A\leftrightarrow B) \rightarrow CA\underline{\vee}CB$ [4].