Krystyna Misiuna

O paradoksach związanych z nieostrością pojęć

Filozofia Nauki 17/4, 5-10

2009

Filozofia Nauki
Rok XVII, 2009, Nr 4(68)

Krystyna Misiuna

O paradoksach związanych z nieostrością pojęć

Pierwszą obszerną monografią poświęconą nieostrości pojęć w literaturze polskiej jest książka Joanny Odrowąż-Sypniewskiej zatytułowana *Zagadnienie nieostrości* z interesującym *Wstępem* napisanym przez Jacka Juliusza Jadackiego. Poniższy esej, chociaż może być włączony do literatury poświęconej temu zagadnieniu, koncentruje się tylko na paradoksach związanych z użyciem pojęć nieostrych i na jednym z możliwych sposobów ich rozwiązania. Inspiracją dla jego napisania był jubileusz Jacka Jadackiego*, lecz esej ten nie został opublikowany aż do chwili obecnej, za co odpowiedzialność ponosi wyłącznie jego autorka.

Rozważmy sytuację, w jakiej znajduje się logik podejmujący zadanie zbudowania semantyki języka naturalnego, w którym występują pojęcia nieostre. Przyjmijmy dwa wstępne założenia:

1. Celem, jaki stawia sobie logik, jest dostarczenie takiej interpretacji paradoksów związanych z pojęciami nieostrymi, która uczyni te paradoksalne, w powszechnym odczuciu, rozumowania wnioskowaniami formalnie bądź materialnie błędnymi.

2. Punktem wyjścia są dla niego (dla niej) fakty dotyczące komunikacji językowej, a w szczególności illokucyjne akty komunikacyjne. Ekspertami są zatem dla wspomnianego wyżej logika istoty ludzkie wyrażające swoje przekonania za pomocą wypowiedzi zawierających pojęcia nieostre.

W najprostszym przypadku jesteśmy odbiorcami informacji pochodzącej od dwóch ekspertów. Zakładamy, że eksperci używają predykatów nieostrych zgodnie

* Prof. Jacek Jadacki, współzałożyciel (ze Zdzisławem Augustynkiem) i pierwszy redaktor naczelny „Filozofii Nauki” (obecnie redaktor działu „Archiwum”) obchodził jubileusz sześćdziesięciolecia w 2006 r.

z ich językowym znaczeniem w języku polskim, co oznacza, że ich opinie mogą być rozbieżne tylko wtedy, gdy orzekają dany predykat o przedmiocie należącym do zakresu niezdeterminowania tego predykatu. Nie musimy o nich zakładać, że są to ludzie nieomylni, lecz tak jak wszyscy, w miarę kompetentni użytkownicy języków naturalnych, potrafią empirycznie odróżniać przedmioty, które zdecydowanie należą do zakresu danego predykatu, od tych, które zdecydowanie nie należą do takiego zakresu. Na przykład przedmiot zdecydowanie czerwony od przedmiotu, który nie jest zdecydowanie czerwony; człowieka, który jest zdecydowanie łysy, od tego, który zdecydowanie nie jest łysy itd. Opierając się na tych założeniach, rozważmy dwie informacje klasycznie sprzeczne pochodzące od dwóch różnych ekspertów A i B:

A: Tomasz jest łysy;

B: Tomasz nie jest łysy.

Informacje te są sprzeczne, gdy interpretujemy 'nie' jako negację logiki klasycznej, której algebraiczny sens wyraża Boolowskie dopełnienie. Jednakże możemy o wypowiedziach A i B myśleć nie jako o zdaniach klasycznie sprzecznych, lecz jako o takich, w których predykat 'jest łysy' został doprecyzowany na dwa różne sposoby, każdorazowo zachowując znaczenie przysługujące mu w języku polskim. W zdaniu A Tomasz, jako przypadek graniczny człowieka łysego, został włączony do zakresu tego predykatu, a w zdaniu B -- został z niego wyłączony. Taka interpretacja wypowiedzi A i B sugeruje, że negacja występująca w zdaniach orzekających predykaty nieostre o przedmiotach należących do obszaru niezdeterminowania posiada inne własności niż negacja klasyczna. Przyjmijmy jako kolejne następujące założenie.

3. Dysponujemy logiką 4-wartościową z wartościami logicznymi: t, f, T, $\perp$, opartą na kracie podwójnej FOUR.

Definiujemy funkcję l(X), odnoszącą się odpowiednio do ekspertów A i B:

Def.: Dla każdego zdania atomowego X, które wypowiadane jest w akcie komunikacyjnym przez A lub B:

$l_A(X) = t$, jeśli A wypowiada zdanie X.
$l_A(X) = f$, jeśli A wypowiada zdanie $\neg X$.
$l_A(X) = \perp$ w pozostałych przypadkach.

$l_B(X) = t$, jeśli B wypowiada zdanie X.
$l_B(X) = f$, jeśli B wypowiada zdanie $\neg X$.
$l_B(X) = \perp$ w pozostałych przypadkach.

Jeśli A lub B wypowiada zdanie, to wypowiada je w jakimś akcie komunikacyjnym, a tym samym wyraża takie lub inne przekonanie. Jeśli ekspert wypowiada ciąg słów bez intencji wyrażenia przekonania, jego wypowiedzi nie jest przyporządkowywana klasyczna wartość logiczna, lecz wartość $\perp$, którą interpretujemy jako 'nie jest znane jako prawdziwe i nie jest znane jako fałszywe'.

Następnym pytaniem jest to, jaką wartość przyporządkować tym zdaniom atomowym, które wyrażają informacje niezgodne. Zasadniczo istnieją dwie strategie, które prowadzą do rozwiązania tego problemu. Jeśli klasyczne wartości logiczne dla zdania X wyznaczone przez funkcje $l_A(X)$ i $l_B(X)$ są niezgodne, to albo możemy uznać zdanie X za takie, które nie jest znane jako prawdziwe i nie jest znane jako fałszywe, albo uznać zdanie X za takie, które jest znane jako prawdziwe i jest znane jako fałszywe. Formalnym wyrazem tych dwóch stanowisk są odpowiednio następujące równości:

Def.1: $O(X) = l_A(X) \otimes l_B(X)$.

Def.2: $O(X) = l_A(X) \oplus l_B(X)$.

Operacje $\otimes$ i $\oplus$ występujące w tych definicjach rozumiane są zgodnie z następującymi wzorami: $a \otimes b = \inf\{a, b\}$, $a \oplus b = \sup\{a, b\}$ w porządku $\leq_k$ kraty podwójnej FOUR.

Tak zdefiniowana operacja O(X) gwarantuje, że jeśli na przykład $l_A(X) = t$, a $l_B(X) = f$, to $O(X) = \perp$ (zgodnie z Def.1), natomiast $O(X) = T$ (zgodnie z Def.2). Z kolei gdy jedna z wartości jest klasyczna, a druga $\perp$, to $O(X) = \perp$ (zgodnie z Def.1), natomiast O(X) przyjmuje odpowiednią wartość klasyczną (zgodnie z Def.2). Inaczej mówiąc, w przypadku konfliktu klasycznych wartości logicznych nie uznajemy żadnej wartości na mocy Def.1, natomiast uznajemy obie wartości na mocy Def.2. Przyjmijmy teraz nasze czwarte założenie.

4. Formę logiczną zdań (w tym zdań atomowych) wypowiadanych w aktach komunikacyjnych będziemy utożsamiali ze zdaniami (w szczególności ze zdaniami atomowymi) języka 1-go rzędu L.

Zdefiniujemy funkcję interpretacji 'v' ze zbioru zdań języka L w zbiór wartości logicznych kraty FOUR. Niech przy tym 'f ' będzie funkcją ze zbioru zdań atomowych Atom w zbiór wartości FOUR:

f: Atom $\to \{t, f, T, \perp\}$.

Funkcja 'f' rozszerza się do funkcji 'v' będącej homomorfizmem algebry formuł **Fm** języka L w poniższą algebrę z operacjami odpowiadającymi spójnikom zdaniowym języka L:

v: $\mathbf{Fm} \to (\{t, f, T, \perp\}, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow)$.

Funkcję interpretacji dla zdań z kwantyfikatorami zdefiniujemy przez infimum i supremum, zakładając, że każdy przedmiot z dziedziny zmiennych związanych posiada nazwę w zbiorze nazw N:

$v(\forall x A(x)) = \bigwedge a \in N\ v(A(a))$;
$v(\exists x A(x)) = \bigvee a \in N\ v(A(a))$.

Definicja interpretacji zamierzonej: Zdefiniowaną wyżej interpretację ‘v’ będziemy nazywali interpretacją zamierzoną, jeśli dla każdego zdania atomowego X języka L spełniony jest warunek: v(X) = O(X), gdzie O(X) jest zdefiniowane zgodnie z Def.1 podaną wyżej.

Wykazanie formalnej błędności paradoksów związanych z nieostrością skłania nas do zdefiniowania relacji konsekwencji innej niż klasyczna relacja konsekwencji. Zdefiniujemy w związku z tym niemonotoniczną relację konsekwencji w następujący sposób:

Definicja niemonotonicznej relacji konsekwencji: $\Gamma \models_{O,<} \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda interpretacja zamierzona będąca modelem formuł Γ, który zarazem posiada minimalną liczbę wartościowań nieklasycznych, jest modelem formuły α.

O,< – kontrmodelem będziemy nazywali taki model formuł Γ w sensie zdefiniowanym wyżej, który nie jest modelem wniosku α. Wskazanie kontrmodelu jest więc równoznaczne z wykazaniem, że nie zachodzi relacja konsekwencji między formułami ze zbioru Γ a formułą α.

Rozważmy dwa następujące paradoksalne rozumowania oznaczone poniżej jako (I) i (II).

(I) Człowiek, który nie ma włosów na głowie, jest łysy.
Dla każdego n: Jeśli człowiek, który ma n włosów na głowie jest łysy, to człowiek, który ma (n + 1) włosów na głowie, jest łysy.
∴ Człowiek, który ma 100.000 włosów na głowie, jest łysy.

(II) Człowiek, który nie ma włosów na głowie, jest łysy.
Człowiek, który ma 100.000 włosów na głowie, nie jest łysy.
∴ Istnieje liczba n taka, że człowiek, który ma n włosów na głowie, jest łysy, a człowiek, który ma (n + 1) włosów na głowie, nie jest łysy.

Nie możemy poprzestać na rozważeniu tylko jednego z powyższych rozumowań, gdyż konkluzja paradoksu (I) jest klasyczną negacją wniosku paradoksu (II) i na odwrót. Niech formy logiczne paradoksów (I) i (II), wyrażone w języku 1-go rzędu L, będą oznaczone odpowiednio przez **(I), (II).**

(I) **B(a, 0)**

$[B(a,0) \Rightarrow B(a,1)] \wedge [B(a,1) \Rightarrow B(a,2) \wedge \ldots \wedge [B(a,n) \Rightarrow B(a,n+1)]$
$\wedge \ldots \wedge [B(a, 100.000 - 1) \Rightarrow B(a, 100.000)]$
$\therefore B(a, 100.000)$.

(II) **B(a, 0)**
$\neg B(a, 100.000)$

$\therefore$ **[B(a, 0) $\wedge$ ¬B(a, 1)] $\vee$ [B(a, 1) $\wedge$ ¬B(a, 2)] $\vee$…$\vee$[B(a, n) $\wedge$ ¬B(a, n +1)] $\vee$…$\vee$[B(a, 100.000 — 1) $\wedge$ ¬B(a, 100.000)].**

Litera ‘B’ zastępuje w powyższych sformułowaniach predykat dwuargumentowy ‘jest łysy z’, natomiast ‘a’ symbolizuje dowolne imię własne, na przykład imię ‘Jan’ lub ‘Tomasz’.

Rozważmy wniosek paradoksu (II), który został wyrażony jako skończona alternatywa, której członami są koniunkcje postaci:

$$B(a, n) \wedge \neg B(a, n+1) \text{ gdzie } 0 \leq n \leq 100.000$$

Zakładamy, że eksperci używają predykatu ‘jest łysy’ zgodnie z jego językowym znaczeniem w języku polskim; tym samym ich przyporządkowania wartości logicznych są zgodne w przypadku zdań atomowych występujących w obu przesłankach paradoksu (II) i są równe odpowiednio: ‘t’ (w pierwszej przesłance) i ‘f ‘(w drugiej przesłance). Co do wniosku tego paradoksu, to możemy przyjąć, że istnieje co najmniej jedna taka liczba ‘n’ z powyższego przedziału, że opinie ekspertów co do klasycznych wartości logicznych zdań atomowych będących składnikami powyższej koniunkcji, będą rozbieżne. W związku z tym interpretacja zamierzona O zdefiniowana przez operację $\otimes$ przyjmie odpowiednio wartości:

$O(B(a,n)) = \perp$ i $O(B(a, n+1)) = \perp$ dla co najmniej jednego ‘n’: $0 \leq n \leq 100.000$.

Dla tych wartości ‘n’, które są bliższe 0, oraz dla tych wartości ‘n’, które są bliższe 100.000 wartość powyższej koniunkcji będzie równa f, gdyż przy interpretacji zamierzonej O jeden składnik tej koniunkcji będzie prawdziwy, a drugi będzie fałszywy. Opinie ekspertów będą zgodne co do wartości logicznych zdań atomowych: dla wartości bliższych 0 zdania te będą oceniane jako prawdziwe, natomiast zdania takie będą oceniane jako fałszywe dla wartości bliższych 100.000. Ostatecznie wartość logiczną rozważanej alternatywy obliczymy jako $\sup\{f, \perp\}$ ze względu na porządek $\leq_t$, które równe jest $\perp$. Pokazaliśmy tym samym, że istnieje O,< -kontrmodel paradoksu (II), a zatem że paradoks (II) jest formalnie błędny.

Paradoks (I) jest natomiast materialnie błędny, gdyż jego przesłanka główna ma wartość $\perp$ przy interpretacji zamierzonej O zdefiniowanej przez operację $\otimes$. Zakładamy, że przesłanka ta ma postać koniunkcji, której składnikami są następujące implikacje:

$$B(a,n) \Rightarrow B(a, n+1) \text{ gdzie } 0 \leq n \leq 100.000$$

Jeśli eksperci używają predykatu ‘jest łysy’ zgodnie z jego językowym znaczeniem przysługującym mu w języku polskim, to otrzymamy:
dla co najmniej jednego ‘n’: $(t \Rightarrow \perp) = \perp$;
dla co najmniej jednego ‘n’: $(\perp \Rightarrow \perp) = t$;
dla co najmniej jednego ‘n’: $(\perp \Rightarrow f) = t$.

Wartość koniunkcji będącej główną przesłanką paradoksu (I) obliczymy jako inf{t, ⊥} = ⊥.

Rozważmy teraz, jak paradoks 'człowieka łysego' analizowany jest w terminach semantyki superwaluacyjnej. Główna przesłanka paradoksu (I) jest superfałszywa, ponieważ przy każdej dopuszczalnej precyzacji predykatu 'jest łysy' zdanie będące jej poprzednikiem jest superprawdziwe, a zdanie będące jej następnikiem jest superfałszywe. Tym samym na gruncie semantyki superwaluacyjnej paradoks (I) jest wnioskowaniem materialnie błędnym. Jednakże paradoks (II) jest na gruncie semantyki superwaluacyjnej zarówno materialnie, jak i formalnie poprawny, gdyż zarówno jego przesłanki, jak też wniosek są superprawdziwe. Jest tak dlatego, że przy każdej dopuszczalnej precyzacji tylko jeden składnik wniosku paradoksu (II) jest prawdziwy, chociaż za każdym razem inny, co czyni dysjunkcję prawdziwą przy każdej dopuszczalnej precyzacji, a zatem superprawdziwą. Nie możemy więc, opierając się na założeniach semantyki superwaluacyjnej, rozwiązać paradoksu (II). Jeśli paradoksy (I) i (II) uważamy za rozumowania paradoksalne, to jest tak dlatego, że prowadzą one od przesłanek, które uważamy intuicyjnie za prawdziwe do wniosków, które intuicyjnie uważamy za fałszywe. Ponadto paradoksalność tych rozumowań związana jest z tym, że na gruncie logiki klasycznej oba te rozumowania są formalnie poprawne, gdyż nie istnieje klasyczny kontrmodel ani dla paradoksu (I), ani też dla paradoksu (II).

LITERATURA

Arieli O., Avron A. (1998), *The value of four values*, „Artificial Intelligence", 102, s. 97-141.

Misiuna, K. (2003), *Pojęcie prawdy w języku naturalnym*, Warszawa: Wydział Filozofii i Socjologii.

Odrowąż-Sypniewska, J. (2000), *Zagadnienie nieostrości*, Warszawa, Wydział Filozofii i Socjologii.

Williamson, T. (1994), *Vagueness*, London: Routledge.