Krzysztof Wójtowicz

Redukcje ontologiczne w matematyce: cz. 2: strategie argumentacyjne na rzecz realizmu

Filozofia Nauki 19/2, 29-40

2011

Filozofia Nauki
Rok XIX, 2011, Nr 2(74)

Krzysztof Wójtowicz

Redukcje ontologiczne w matematyce. Część II
Strategie argumentacyjne na rzecz realizmu

Ten tekst stanowi drugą część pracy poświęconej problemowi redukcji ontologicznych w matematyce.[1] Problem jest dobrze postawiony jedynie w ramach tak czy inaczej rozumianego stanowiska realistycznego. Jednak sam termin „realizm matematyczny" jest terminem na tyle ogólnym i wieloznacznym, że trudno z przyjęcia samej tezy realizmu wyprowadzać jakiekolwiek wnioski dotyczące redukcji ontologicznych. Różne sformułowania, jak i różne sposoby argumentacji na rzecz matematycznego realizmu prowadzić będą do różnych tez dotyczących redukcji ontologicznych. Ta część pracy zawiera prezentację trzech wariantów stanowiska realistycznego (realizmu Gödla, realizmu Quine'a i „pełnokrwistego platonizmu" Balaguera) oraz wstępne uwagi dotyczące analizy głównego problemu pracy z punktu widzenia tych stanowisk (szczegółowe analizy znajdują się w części III).[2]

1. REALIZM GÖDLA

Gödel we współczesnej filozofii matematyki stanowi swoisty wzorzec platonika-racjonalisty, przekonanego o obiektywności prawd matematycznych i o niezależnym od podmiotu poznającego istnieniu obiektów matematycznych. Gödel odrzuca stanowisko konceptualistyczne, w myśl którego obiekty matematyczne mają status kon-

[1] Część I ukazała się jako [Wójtowicz 2008a].

[2] Z konieczności prezentacje są tu bardzo szkicowe, ta zaś część pracy ma charakter w zasadzie jedynie uzupełniający. Szczegółową prezentację stanowiska Gödla Czytelnik znajdzie w pracy [Wójtowicz 2002] oraz w [Wójtowicz 2003]. Stanowisko Quine'a omówione jest i poddane szerokiej analizie w pracy [Wójtowicz 2003], stanowisko zaś Balaguera w pracy [Wójtowicz 2003] oraz [Wójtowicz 2008].

strukcji mentalnych,[3] odrzuca też neopozytywistyczną koncepcję matematyki jako składni języka nauki.[4] Jego zdaniem, matematyka ma pewien obiektywny przedmiot badań, jest nim właśnie „królestwo bytów matematycznych”.

> Pojęcia i klasy mogą być traktowane jako rzeczywiste obiekty: klasy jako 'wielości rzeczy', zaś pojęcia jako własności rzeczy i relacje między rzeczami istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji. Wydaje mi się, że założenie o istnieniu takich obiektów jest równie uzasadnione jak założenie o istnieniu obiektów fizycznych [Gödel 1944, 220].

Obiekty matematyczne są oczywiście obiektami abstrakcyjnymi, istnieją niezależnie od świata fizycznego i od działalności poznawczej matematyków, są abstrakcyjne, nie oddziałują przyczynowo, nie przysługuje im lokalizacja czasoprzestrzenna. Prawdy matematyczne zaś dotyczą pojęć, które „*tworzą obiektywną rzeczywistość, której nie możemy tworzyć ani zmieniać, ale jedynie postrzegać i opisywać*” [Gödel 1951, 320].[5] Dlatego też Gödel odróżniał matematykę obiektywną lub właściwą — tworzącą system zdań „*prawdziwych w absolutnym sensie, bez dodatkowych założeń*” [Gödel 1951, 305] — od matematyki subiektywnej, składającej się ze zdań dowodliwych. Dowodliwość nie wyczerpuje bowiem pojęcia prawdziwości.

Gödel nie przyjął oczywiście swojego stanowiska *ad hoc.* Poglądy Gödla dotyczące matematyki harmonizują z jego ogólnym światopoglądem filozoficznym. Gödel bowiem twierdził, że zadaniem filozofii jest analiza podstawowych pojęć metafizyki i że filozofia może się z tego zadania dobrze wywiązać. Jako optymista w tym zakresie twierdził, że po dostatecznie dobrym wyjaśnieniu pojęć dyskusja filozoficzna będzie mogła być prowadzona z matematyczną ścisłością [Gödel 1951, 322]. Ten swoisty optymizm poznawczy, przekonanie o tym, że możliwe jest racjonalne rozwiązanie dobrze postawionych problemów matematycznych, jest ważnym składnikiem filozoficznego światopoglądu Gödla.[6] Za wyraz tego światopoglądu można uznać właśnie realizm w stosunku do liczb naturalnych, które — mówiąc swobodnie — tkwią u prapoczątków działalności matematycznej. Chcemy oczywiście poznać je w sposób możliwie pełny. Okazuje się jednak, że sama teoria liczb nie pozwala na rozwiązanie wszystkich problemów dotyczących liczb naturalnych. Musimy odwo-

---

[3] Jako ilustrację można przypomnieć stanowisko Gödla w sprawie definicji niepredykatywnych, których prawomocność kwestionowana była z pozycji konstruktywistycznych, inspirowanych intuicjonizmem. Gödel jednak twierdzi, że „*[J]eśli definiowane obiekty istnieją niezależnie od naszych konstrukcji, nie ma nic absurdalnego w stwierdzeniu, że istnieją obiekty definiowalne wyłącznie w terminach ogółu obiektów, do których należą*” [Gödel 1944, 219]. Odwołuje się więc do założenia o obiektywnym, niezależnym od nas istnieniu matematycznego uniwersum.

[4] Tej krytyce poświęcona jest jego praca [Gödel 1953/59, 360].

[5] „*Twierdzenia matematyczne [...] nie dotyczą właściwości struktur fizycznych ale raczej własności pojęć, w terminach których opisujemy te struktury. To jednak pokazuje, że własności tych pojęć są czymś równie obiektywnym i niezależnym od naszego wyboru, co własności fizyczne materii.*” [Gödel 1953/59, 360].

[6] Wang określał stanowisko Gödla mianem „racjonalistycznego optymizmu”, który dotyczył nie tylko problemów matematycznych, ale także metafizycznych.

ływać się do silniejszych założeń, które pozwolą na odkrycie nowych prawd o liczbach naturalnych — takimi założeniami są w szczególności założenia teoriomnogościowe. Tych silniejszych technik nie możemy jednak traktować czysto instrumentalnie: założenia teoriomnogościowe, które przyjmujemy, aby uzyskać nową wiedzę dotyczącą samych liczb naturalnych, również dotyczą obiektywnej rzeczywistości matematycznej i są dla uzyskania tej wiedzy niezbędne. Techniki teorii mnogości przenikają całą matematykę, umożliwiają rozwiązywanie otwartych problemów matematycznych (choć oczywiście teoria mnogości podlega stosownym ograniczeniom metalogicznym), unifikację matematyki i oparcie jej na jednolitym systemie pojęć. Gödel odwołuje się do analogii z fizyką: również tam założenie o istnieniu ciał fizycznych jest niezbędne dla sformułowania zadowalającej teorii świata fizycznego.

Rozwiązywanie wszelkich problemów matematycznych może odbywać się więc z wykorzystaniem pełnego repertuaru środków teorii mnogości. Teoria mnogości nie jest jednak jedynie pomocniczym narzędziem rozwiązywania problemów matematycznych. Fakt, że wykorzystujemy silne aksjomaty teorii mnogości, aby rozwiązać otwarte problemy matematyczne, wiąże się z uznaniem, iż opisują one obiektywną matematyczną rzeczywistość.

Gödel uważał więc teorię mnogości za podstawową teorię matematyczną, a za podstawowe pojęcia matematyczne uważał pojęcia zbioru i należenia. W ramach tego stanowiska postulowana jest więc tylko jedna kategoria bytów matematycznych — jest to jednak kategoria bardzo bogata. Z punktu widzenia platonizmu Gödla problem redukcji ontologicznej matematyki ma więc stosunkowo proste rozwiązanie: obiekty matematyczne są zbiorami, uniwersum matematyczne zaś to po prostu uniwersum teoriomnogościowe. W nim znajdują się wszystkie obiekty matematyczne.

Jak wygląda platońskie uniwersum Gödla? Czy jest to jedno uniwersum, czy raczej „wiązka" uniwersów? Można bowiem rozważyć formę realizmu, w myśl której istnieją różne (mówiąc bardzo swobodnie — „równoległe") uniwersa zbiorów, w których realizowane są różne pojęcia (koncepcje) zbioru. Żadne z tych pojęć nie byłoby jednak wyróżnione i nie można byłoby sformułować uniwersalnego pojęcia zbioru (takie jest właśnie jedno z założeń stanowiska „pełnokrwistego platonizmu", które jest przedmiotem analiz w dalszej części artykułu). Tego typu maksymalistyczny pogląd może wydawać się atrakcyjny — zwłaszcza w świetle wyników dotyczących relatywnej niesprzeczności rozmaitych zdań teoriomnogościowych.[7] Pogląd ten wiąże się, z jednej strony, ze swoistego rodzaju maksymalizmem ontologicznym (istnieją wszelkie możliwe realizacje różnych rozumień pojęcia zbioru), ale i zarazem z minimalizmem epistemologicznym — żadne z tych pojęć nie jest wyróżnione. Tym samym zastanawianie się nad tym, czy np. hipoteza *continuum* jest prawdziwa,

[7] Najbardziej znanym przykładem takiego zdania jest hipoteza kontinuum, która głosi, że moc zbioru liczb rzeczywistych jest najmniejszą mocą nieprzeliczalną. Istnieje jednak wiele innych przykładów zdań niezależnych od ZFC, dotyczących arytmetyki liczb kardynalnych, deskryptywnej teorii mnogości *etc.*

czy nie, jest zajęciem pozbawionym sensu — prawdziwość jest bowiem zawsze zrelatywizowana do pewnej koncepcji zbioru, a w tym ujęciu wszystkie takie koncepcje są równoprawne.[8]

Stanowisko Gödla jest tu zdecydowanie inne. Jest tylko jedno uniwersum mnogościowe, jest tylko jedno adekwatne dla niego (zrealizowane w tym uniwersum) pojęcie „zbioru", a naszym zadaniem jest możliwe pełne jego zrozumienie i opisanie. Należy podkreślić, że ważną rolę w argumentacji Gödla dotyczącej realizmu matematycznego (w przypadku stanowiska Gödla — teoriomnogościowego) odegrało jego przekonanie o tym, że problemy matematyczne są zasadniczo rozstrzygalne. Każdy dobrze postawiony problem matematyczny może zostać rozwiązany, także jeśli konieczne byłoby wzmocnienie podstawowych założeń. Matematyka nie da się zamknąć w jednym systemie formalnym, ma charakter niewyczerpywalny: można dodawać do niej nowe aksjomaty, pozwalające na rozwiązywanie otwartych problemów.[9] Gödel twierdził, że nierozstrzygalność pewnych zagadnień matematycznych ma związek z niedostatecznie głęboką analizą podstawowych pojęć matematycznych, w matematyce zaś nie ma prawd zasadniczo niepoznawalnych.[10] Jako przykład można wymienić np. dołączanie do teorii liczb pewnych intuicyjnie oczywistych i prawdziwych zdań (np. zdanie Gödla). Ważniejsze jednak w kontekście problemu redukcji jest fakt odwoływania się do założeń teoriomnogościowych. Teoria mnogości jest w takim ujęciu teorią podstawową, do której — mówiąc obrazowo — należy zwracać się z prośbą o rozwiązanie otwartych problemów.

---

[8] Wśród specjalistów nie ma zgody co do tego, czy ma sens mówienie o obiektywnym pojęciu zbioru. Niektórzy twierdzą, że ma i że warto poszukiwać nowych aksjomatów, które ten sens będą mogły wyostrzyć. Inni twierdzą, że w świetle licznych wyników dotyczących relatywnej niesprzeczności taki pogląd nie jest zasadny i nie ma sensu mówić o żadnym wyróżnionym pojęciu zbioru (taką opinię wyraża np. [MacLane 1992]. Podobną opinię wyraża także Mostowski, twierdząc, iż w przyszłości możemy mieć istotnie różne intuicje dotyczące pojęcia zbioru i w zależności od potrzeb przyjmować aksjomaty odpowiadające naszym aktualnym potrzebom i zainteresowaniom [Mostowski 1979]. Zauważmy przy tym, że nie jest w pełni jasne, jakie są najsłabsze warunki nakładane na obiekty, aby można je było uznać za zbiory (lub — innymi słowy — za obiekty utworzone za pomocą operacji *teoriomnogościowych*). Czy musi np. obowiązywać pewnik wyboru? Schemat aksjomatów zastępowania? Aksjomat regularności?

[9] Oczywiście, na mocy twierdzenia Gödla o niezupełności, wiemy, że żaden taki system nie dostarczy ostatecznych odpowiedzi na wszystkie stawiane pytania. Możemy jednak poszukiwać nowych aksjomatów, których przyjęcie poszerzy naszą wiedzę (por. [Wójtowicz 2002]). Warto przypomnieć, że o istnieniu zdań niezależnych od arytmetyki PA wiedziano już od 1931, ale pierwszy przykład takiego zdania o konkretnej treści matematycznej podali dopiero Paris i Harrington w 1977 ([Paris, Harrington 1977]).

[10] Przychodzi tu na myśl słynne stwierdzenie Hilberta, iż w matematyce nie ma żadnego *ignorabimus*.

2. QUASI-EMPIRYZM QUINE'A

Quine deklaruje się jako naturalista: analizy filozoficzne winny być uprawiane w kontekście wyników nauk szczegółowych.[11] Tak też jest w przypadku filozofii matematyki — argumentacja Quine'a na rzecz realizmu matematycznego w silny sposób zależy od analiz dotyczących roli matematyki w naukach empirycznych.

Punktem wyjścia argumentacji Quine'a jest analiza roli matematyki w naukach empirycznych. Zajmuje tu stanowisko zdecydowanie różne niż neopozytywiści, zdaniem których zdania matematyczne mają czysto analityczny charakter i stanowią jedynie zbiór konwencji dotyczących języka nauki, pozbawionych pozajęzykowego odniesienia. Quine odrzuca podział zdań na analityczne i syntetyczne, który stanowi podstawę tej tezy.[12] Quine odrzuca również tezę (którą określa mianem „drugiego dogmatu empiryzmu"), że dobrze określoną treść empiryczną (czyli metodę empirycznej weryfikacji) można przypisać poszczególnym zdaniom teorii naukowej. Zdaniem Quine'a nie ma metody weryfikacji pojedynczych zdań, sens empiryczny zaś jest przypisywany zdaniom naukowym w kontekście całej teorii.[13] Jednostką sensu empirycznego staje się więc — w holistycznym ujęciu Quine'a — cała teoria, włącznie z instrumentarium matematycznym i logicznym.[14]

Teoria naukowa tworzy więc swoistą sieć przekonań, w skład której wchodzą nie tylko zdania obserwacyjne i teoretyczne, ale również matematyczne. Prawdy matematyczne nie różnią się więc zasadniczo od prawd empirycznych, gdyż ulokowane

---

[11] Quine jest zwolennikiem metafilozoficznej tezy naturalizmu i, jego zdaniem, argumentacja filozoficzna winna uwzględniać wyniki nauk szczegółowych i analiz metanaukowych, dotyczących naszej wiedzy (w szczególności wiedzy naukowej). Filozofia, w opinii Quine'a, nie ma uprzywilejowanego statusu poznawczego, Quine odrzuca więc roszczenia filozofii o charakterze fundacjonistycznym. Filozofia nie poprzedza z teoretycznego punktu widzenia nauk szczegółowych, raczej odwołuje się do ich wyników, włączając je w pewien szerszy kontekst, swoisty obraz świata. Widoczne jest tu także przekonanie Quine'a, że brak jest wyraźnej granicy między wiedzą naukową a filozoficzną, włączone są one bowiem w nasz system („sieć") przekonań o świecie.

[12] „*[J]esteśmy skłonni zakładać ogólnie, że prawdziwość zdań daje się rozłożyć na komponent językowy i komponent faktualny. Przy tym założeniu wydaje się racjonalne sądzić, że w przypadku pewnych zdań ów komponent faktualny powinien być zerowy: byłyby to właśnie zdania analityczne. Lecz przy całej apriorycznej racjonalności tego pomysłu linia graniczna pomiędzy zdaniami analitycznymi i syntetycznymi po prostu nie została poprowadzona. Przekonanie, że rozróżnienie to jest w ogóle wykonalne jest nieempirycznym dogmatem empirystów, ich metafizycznym arktykułem wiary*". [Quine 1953, 57-58].

[13] „*Żadne poszczególne świadectwo doświadczenia nie jest związanie z jakimś określonym zdaniem z wnętrza pola; związek ten ma co najwyżej charakter pośredni, za sprawą równowagi pola jako całości*." [Quine 1953, 65]. Quine posługuje się metaforą pola siły, aby ukazać holistyczny charakter weryfikacji teorii empirycznej i istnienie związków między wszystkimi fragmentami teorii.

[14] „*Nauka jest strukturą jednolitą i w zasadzie ta struktura jako całość, nie zaś jej zdania składowe z osobna, jest tym, co doświadczenie potwierdza lub podważa*". [Quine 1951, 171].

są w naszej całościowej siatce przekonań.[15] Pytania o istnienie obiektów fizycznych, teoretycznych i abstrakcyjnych są pytaniami tej samej klasy.[16]

Holistyczne ujęcie Quine'a implikuje, że nie jest uzasadniony częściowy realizm, w myśl którego korelaty ontologiczne posiadają tylko niektóre terminy występujące w teorii empirycznej (a mianowicie terminy odnoszące się do obiektów fizycznych), natomiast terminy matematyczne występujące w teorii fizycznej są pozbawione interpretacji. Tym samym, konsekwentne jest uznanie istnienia wszystkich obiektów, o których mówi dana teoria empiryczna (a więc — być może — także i matematycznych, jeśli o nich w tej teorii jest mowa). To nakłada na nas obowiązek podania kryterium, które pozwalałoby na stwierdzenie, kiedy teoria odnosi się do obiektów danego typu. *Prima facie* bowiem ontologia leżąca u podłoża pewnego systemu przekonań nie musi być wyraźnie określona. „*Ontologia zwykłego człowieka jest niejasna i nieporządna pod dwoma względami. Obejmuje ona wiele domniemanych przedmiotów, które są niejasno lub nieadekwatnie określone. Ale co ważniejsze, nie jest jasny jej zakres; nie sposób nawet ogólnie stwierdzić, które z tych niejasno określonych przedmiotów wolno w ogóle przypisać ontologii danego człowieka, co traktować jako rzeczy przez niego przyjmowane*" [Quine 1981, 38]. Podobna trudność ze zidentyfikowaniem ontologii pojawia się w wypadku teorii naukowych: musimy bowiem rozstrzygnąć, kiedy używane przez nas zwroty faktycznie mają przedmiotowe odniesienie, a kiedy mają charakter jedynie pomocniczy. Rozwiązanie tej trudności stanowi kryterium, w myśl którego swoistym wskaźnikiem istnienia jest kwantyfikacja (por. np. [Quine 1969]).[17]

Sam fakt, że teorie fizyczne odwołują się do instrumentarium matematycznego, nie stanowi jeszcze rozstrzygającego argumentu na rzecz matematycznego realizmu. Jednak podstawę argumentacji Quine'a na rzecz matematycznego realizmu stanowi obserwacja, że matematyka stanowi zasadniczą, nieusuwalną część teorii fizycznych. Skoro jednak matematyka stanowi nieusuwalną część teorii fizycznych, więc przyj-

---

[15] „*Całokształt naszej tzw. wiedzy czy też przekonań, od najbardziej przypadkowych prawd geografii i historii aż po najgłębsze prawa fizyki atomistycznej, a nawet czystej matematyki i logiki formalnej, jest tworem człowieka i styka się z doświadczeniem tylko wzdłuż swoich krawędzi. Mówiąc inaczej, nauka jako całość podobna jest do pola siły, którego warunkami brzegowymi jest doświadczenie. Konflikt z doświadczeniem na brzegach pola powoduje odpowiednie przystosowania w jego wnętrzu. Niektórym ze zdań zostaje przypisana inna wartość logiczna [...].*" [Quine 1953, 65].

[16] „*W granicach nauk przyrodniczych istnieje continuum poziomów, od twierdzeń, które są sprawozdaniami z obserwacji, do tych, które wyrażają podstawowe idee, powiedzmy, teorii kwantów czy teorii względności. [...] twierdzenia ontologii, a nawet twierdzenia matematyki i logiki są kontynuacją tego continuum, kontynuacją, która jest zapewne jeszcze bardziej odległa od obserwacji niż główne zasady teorii kwantów czy teorii względności. Różnice w tej dziedzinie są [...] jedynie różnicami stopnia, a nie rodzaju.*" [Quine 1951, 171].

[17] W tej pracy nie podejmuję problemu założeń o charakterze „ideologicznym", obecnych w koncepcji Quine'a, w szczególności założenia, że niejako kanoniczną logiką jest logika elementarna (zaś „kanoniczną" postać teorii odkrywamy dopiero po jej przeformułowaniu do teorii w logice elementarnej.)

mowane przez Quine'a kryterium identyfikacji zobowiązań ontologicznych nakłada na nas obowiązek uznania także istnienia obiektów matematycznych. Z punktu widzenia tego stanowiska, pytanie o prawdziwość zdań matematycznych (nie chodzi tu tylko o czysto formalną dowodliwość!) jest równie sensowne i dobrze postawione, jak pytanie o prawdziwość dowolnej innej hipotezy naukowej. Argumentacja Quine'a na rzecz realizmu matematycznego skonstruowana jest więc według następującego schematu:

1. Matematyka jest niezbędna w nauce. Teorie empiryczne w nieusuwalny sposób muszą odwoływać się do matematycznego instrumentarium i mówić o obiektach matematycznych.
2. Skoro interpretujemy teorie naukowe w sposób realistyczny, to należy uznać istnienie wszystkich obiektów, do których odnosi się kwantyfikacja w danej teorii. A zatem powinniśmy w szczególności uznać istnienie obiektów matematycznych.

Argument ten nosi nazwę „argumentu z niezbędności" (*indispensability argument*).

Przyjęcie stanowiska realistycznego w stosunku do teorii empirycznej nakłada więc na nas obowiązek uznania także zobowiązań ontologicznych tej teorii „w świecie obiektów matematycznych". Quine interpretuje matematyczne zdania egzystencjalne *at face value*, bezpośrednio — a nie jako pozbawione treści zdania pomocnicze (jak chciałby to czynić matematyczny instrumentalista).

Należy tu podkreślić, że zasięg argumentu z niezbędności jest ograniczony do tych fragmentów matematyki, które znajdują zastosowanie w teoriach empirycznych. Tym samym teza realizmu matematycznego może być tak uzasadniana tylko w stosunku do matematyki stosowanej (przy całej nieostrości tego pojęcia).

Fakt ten ma podstawowe znaczenie dla analizowanego przez nas problemu redukcji ontologicznej. Zgodnie bowiem z tym, co powiedzieliśmy wcześniej, teoria mnogości jest teorią bardzo silną, na swój sposób nadwyżkową w stosunku do zwykłej praktyki matematycznej. Zdaniem Quine'a, teorie matematyki czystej mogą pełnić co najwyżej rolę porządkującą, mogą służyć do upraszczania i ujednolicania teorii matematyki stosowanej, poza tym stanowią jedynie systemy niezinterpretowane. Nie będzie więc zasadne uznanie teorii mnogości za adekwatną bazę ontologiczną dla matematyki stosowanej, ponieważ jej założenia egzystencjalne zdecydowanie wykraczają poza to, co jest ugruntowane na mocy argumentu z niezbędności.

Pojawia się więc problem identyfikacji bazy ontologicznej dla matematyki stosowanej. W tak ogólnym sformułowaniu problem ten nie jest jednak postawiony dostatecznie jasno. W fizyce mamy bowiem do czynienia z całym spektrum teorii — w szczególności też z całym spektrum teorii matematycznych. Należy pamiętać o tym, że kryterium zobowiązań ontologicznych jest zawsze zrelatywizowane do danej teorii (matematycznej, empirycznej bądź jakiejkolwiek innej) i ma lokalny charakter. Kryterium to możemy zastosować do danej interesującej nas teorii T, ale nie możemy go w prosty sposób zastosować do całej rodziny teorii (o ile wcześniej nie zostaną podjęte pewne zabiegi rekonstrukcyjne — czyli *de facto* sprowadzenie tych teorii do pewnej teorii o fundamentalnym charakterze). Jeśli więc nasze stanowisko realistyczne opieramy na argumencie z niezbędności, to prowadzi nas to do formułowania „lokalnych" argumentów na rzecz stanowiska realistycznego w odniesieniu do różnych teorii matematycznych.

Jednak problem realizmu matematycznego i poszukiwania bazy ontologicznej dla matematyki nie ma charakteru lokalnego. Takie ujęcie byłoby z pewnością sprzeczne z praktyką matematyczną i z faktem, że mamy poczucie jedności matematyki jako pewnej dyscypliny, poczucie tego, że cała matematyka stanowi — obrazowo mówiąc — jeden gmach, a nie luźne skupisko budynków. Pomimo faktu, iż istnieją różne, bardzo wyspecjalizowane i opierające się na specyficznych założeniach teorie matematyczne, to sądzimy, że nie opisują one różnych, istniejących w niezależny od siebie sposób klas obiektów, ale dotyczą jednego uniwersum matematycznego. Poczucie to jest bardzo naturalne w świetle faktu, że o niektórych obiektach matematycznych, jak np. o liczbach rzeczywistych, mowa jest niemal w każdej teorii matematycznej. Pewne idee (np. pojęcie ciągłości, różniczkowalności) przenikają niemal całą matematykę (choć różne dyscypliny matematyczne koncentrują się na różnych aspektach i przypadkach szczególnych). Poczucie swoistej jedności matematyki mamy niezależnie od tego, czy mamy świadomość istnienia rekonstrukcji formalnej w ramach ZFC. Co więcej, moim zdaniem, takie poczucie jedności matematyki jest czymś pierwotnym w stosunku do istnienia ewentualnej rekonstrukcji i stanowi raczej motywację dla poszukiwania rekonstrukcji i unifikacji niż konsekwencję jej odnalezienia. Naturalne jest więc w szczególności dążenie do tego, aby narzędzia matematyczne (potrzebne w zastosowaniach) rekonstruować w możliwie jednolitym systemie pojęć. Pozwoliłoby to na znalezienie wspólnej bazy ontologicznej dla całej matematyki, a nie wielu lokalnych baz z osobna, dla każdej teorii matematycznej, która pojawia się w zastosowaniach. Taki postulat jest zgodny zarówno z praktyką matematyczną, jak i z potrzebą unifikacji aparatu pojęciowego. Pojawia się więc pytanie o wspólny dla matematyki stosowanej system pojęć. Zauważmy, że np. w mechanice kwantowej stosujemy (mówiąc w uproszczeniu) metody analizy funkcjonalnej, w kosmologii zaś geometrii różniczkowej, czyli dyscyplin dość różnych. Chcielibyśmy jednak poszukiwać bazy ontologicznej wspólnej dla wszystkich tych dziedzin matematyki stosowanej.

Problem nie jest oczywiście postawiony w sposób w pełni precyzyjny: granica między matematyką stosowaną a teoretyczną jest płynna i nieostra. Wydaje się jednak, że nienajgorszym przybliżeniem będzie przywoływane w części I rozróżnienie na matematykę teoriomnogościową i nieteoriomnogościową, wyrastającą ze zwykłej praktyki matematycznej.[18] Taki roboczy podział uważam za rozsądny, i myślę, że pozwoli on na lepszą identyfikację zobowiązań ontologicznych matematyki stosowanej.

---

[18] Problem bardziej szczegółowo omawiam w części III.

3. „PEŁNOKRWISTY PLATONIZM” BALAGUERA

Koncepcja Balaguera to stanowisko radykalnego, maksymalistycznego realizmu. Sam autor określa ją mianem *full-blooded platonism* (dalej będę się posługiwał skrótem FBP), aby podkreślić, że — jego zdaniem — tylko takie stanowisko zasługuje na miano konsekwentnego realizmu. Wersja realizmu zaproponowana przez Balaguera zasługuje na uwagę, ponieważ w jawny sposób wyartykułował on intuicje, które podziela wielu matematyków, a które odnoszą się do świata matematycznego jako świata nieograniczenie bogatego. Można powiedzieć, że jest to próba ujęcia — w ramach koncepcji filozoficznej — „potocznego” doświadczenia złożoności i bogactwa matematycznego uniwersum. Tak rozumiane stanowisko ontologicznego maksymalizmu może jawić się więc jako ciekawa propozycja filozoficzna.[19] Koncepcja Balaguera ma zupełnie inny charakter niż realizm Gödla (którego zdaniem istnieje tylko jedno uniwersum matematyczne o teoriomnogościowym charakterze) czy Quine’a (który akceptował stanowisko realizmu ograniczonego dla bytów matematyki stosowanej). Balaguer natomiast przyjmuje zasadę „anty-brzytwy Ockhama”: byty (matematyczne) należy mnożyć w miarę możliwości.

Podstawowa teza stanowiska FBP-realizmu głosi, że istnieją wszystkie logicznie możliwe obiekty matematyczne. Swobodnie mówiąc, istniejące obiekty matematyczne wyczerpują wszystkie dostępne możliwości. W takim sformułowaniu teza ta nie jest jednak zbyt precyzyjna. Balaguer uszczegóławia ją w postaci tezy, że każda niesprzeczna teoria matematyczna odnosi się do pewnego bytu matematycznego (ew. pewnej klasy takich bytów). Swobodnie mówiąc, każda niesprzeczna teoria matematyczna opisuje pewien fragment uniwersum matematycznego. Jeśli więc o danej teorii matematycznej wiemy, że jest niesprzeczna, to możemy też stwierdzić, że opisuje pewien fragment matematycznego świata (czyli dostarcza wiedzy na temat tego fragmentu).[20]

Warto poświęcić parę słów rozumieniu pojęcia niesprzeczności przez Balaguera, gdyż ma to znaczenie z punktu widzenia prezentowanych dalej analiz problemu re-

---

[19] Warto tu zauważyć, że realistyczna koncepcja Balaguera jest jedną z dwóch prezentowanych w jego głównej pracy [Balaguer 1998] koncepcji. Drugą jest stanowisko radykalnego antyrealizmu… Wydawać się to może zaskakujące, jednak koncepcja Balaguera jest sformułowana w kontekście silnych tez metafilozoficznych. Balaguer uważa bowiem, że problem istnienia obiektów matematycznych jest zasadniczo nierozstrzygalny. Nie jest więc możliwe podanie dobrych argumentów za ani przeciw matematycznemu realizmowi, można jedynie formułować hipotetyczne warianty stanowiska antyrealistycznego i realistycznego. Tak rzeczywiście robi Balaguer; tutaj przedmiotem zainteresowania jest oczywiście tylko jego wersja stanowiska realistycznego.

[20] Odwołując się do tego argumentu, Balaguer stara się rozwiązać problem wiedzy matematycznej: nie musimy wyjaśniać, jak „kontaktujemy się ze światem abstraktów”, wystarczy wyjaśnić, skąd dowiadujemy się o niesprzeczności pewnej teorii. Balaguer zakłada bowiem, że każda niesprzeczna teoria T ma odniesienie pozajęzykowe, a więc opisuje jakiś fragment matematycznego świata, *eo ipso* dostarcza wiedzy matematycznej.

dukcji ontologicznych. Otóż Balaguer nie odwołuje się do teoriomodelowej definicji niesprzeczności. Ta definicja ma charakter teoriomnogościowy: wszystkie pojęcia metalogiczne (pojęcie modelu, spełniania *etc.*) są definiowane w teorii mnogości; twierdzenia metateoretyczne (np. twierdzenie o zwartości czy pełności logiki elementarnej) są dowodzone w ramach teorii mnogości. Balaguer uważa, że pojęcie niesprzeczności może być uznane za pojęcie pierwotne, niezależne od jego formalnej, teoriomodelowej definicji. Nawiązuje w ten sposób do koncepcji Fielda ([Field 1991]), którego zdaniem teoriomodelowa definicja niesprzeczności nie stanowi adekwatnej formalizacji intuicji, jakie wiążemy z tym pojęciem.[21] To, że jesteśmy skłonni pewne teorie matematyczne uznać za niesprzeczne nie wynika bynajmniej ze znajomości teoriomodelowej rekonstrukcji tych teorii. Źródłem naszego przekonania jest bowiem nasze preformalne, intuicyjne pojęcie niesprzeczności. To ono jest źródłem naszej wiedzy, a nie twierdzenia metalogiczne mówiące o istnieniu modeli dla teorii.

Zwolennik stanowiska FBP przyjmuje więc tezę o istnieniu wszystkich możliwych obiektów matematycznych. Teza ta nie jest w mojej ocenie sformułowana w jasny sposób, jednak moim celem nie jest tu krytyka stanowiska FBP, ale rozważenie problemu redukcji ontologicznej z jego punktu widzenia. Z samego sformułowania głównych tez FBP wynika, że nie istnieje żadna podstawowa dla całej matematyki teoria (np. teoria mnogości) i że nie można twierdzić, iż wszystkie obiekty matematyczne są obiektami pewnego ustalonego typu (np. zbiorami). W duchu takiego maksymalizmu ontologicznego utrzymane jest przekonanie, że ontologia dla teorii matematycznych nie powinna zależeć od tego, jaką postać można nadać ich formalnym rekonstrukcjom (w teorii mnogości lub innej stosownej teorii). Poszukiwanie teorii redukującej jest motywowane (m.in.) postulatem minimalizacji zobowiązań ontologicznych, tymczasem koncepcja FBP w jawny sposób zakłada właśnie maksymalizację tych założeń — każda teoria niesprzeczna ma bowiem swoją realizację, ma pewien ontologiczny korelat matematyczny. Obiekty matematyczne, takie jak zbiory, liczby naturalne, zespolone, rozmaitości różniczkowalne, przestrzenie probabilistyczne, przestrzenie Hilberta *etc.* istnieją jako niezależne od siebie, wza-

---

[21] Zdaniem Fielda pojęcie niesprzeczności logicznej winno być traktowane jako pojęcie pierwotne, którego sens jest niezależny od sensu pojęcia niesprzeczności semantycznej i niesprzeczności syntaktycznej (a więc ma sens niezależny od pojęć teoriomodelowych i teoriodowodowych (podobne tezy głosi Etchemendy, zdaniem którego teoriomodelowa charakteryzacja pojęcia konsekwencji logicznej nie jest adekwatnym uchwyceniem naszego preteoretycznego rozumienia pojęcia konsekwencji, [Etchemendy 1990]). Field twierdzi, że niesprzeczność teorii T nie sprowadza się ani do tego, że T ma model, ani do tego, że nie daje się w niej dowieść sprzeczności. Zachodzą jednak następujące zależności: (i) Jeśli T ma model to jest niesprzeczna w sensie Fielda; (ii) Jeśli T jest niesprzeczna w sensie Fielda, to nie da się udowodnić w niej sprzeczności. Oczywiście, w przypadku teorii pierwszego rzędu mamy tu równoważności (na mocy pełności logiki pierwszego rzędu), ale — zdaniem Fielda — jest to tylko przypadkowa cecha logiki pierwszego rzędu. Argumentacja Fielda nie jest, moim zdaniem, zbyt przekonująca; poddaję ją analizie w pracy [Wójtowicz 2001].

jemnie nieredukowalne byty. Teoria mnogości nie jest niczym wyróżniona, jest jedną z wielu teorii matematycznych i nie ma żadnych powodów, aby nadawać jej wyróżniony status. Takiego statusu nie ma zresztą żadna teoria matematyczna, jednak redukcja ontologii matematyki do bytów pewnego typu zakładałaby taki właśnie wyróżniony status pewnej teorii. Tym samym, w ujęciu FBP problem redukcji ontologicznej winien być rozwiązany negatywnie: nie ma żadnej teorii redukującej, mamy za to bardzo bogatą klasę bytów matematycznych (stanowiących realizacje niesprzecznych teorii matematycznych).

BIBLIOGRAFIA

Balaguer M.

[1998] *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford University Press, New York, Oxford.

Etchemendy J.

[1990] *The concept of logical consequence*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.

Field H.

[1991] „Metalogic and Modality", *Philosophical Studies*, 62, 1-22.

Gödel K.

[1944] „Russell's Mathematical Logic", w: *The philosophy of Bertrand Russell.* Library of Living philosophers, vol. 5, Schlipp P.A. (red.), Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 123-153. Przedrukowane w: [Benacerraf Putnam 1964], 211-232 (a także w *Collected Works*, vol. 2, Feferman S. i.in. (red.), Oxford University Press, 119-141).

[1951] „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", w: *Collected Works*, vol. 3., Feferman S. i.in (red.), Oxford University Press, 304-323.

[1953/9] „Is mathematics syntax of language?", w: *Collected Works*, vol. 3., Feferman S. i.in (red.), Oxford University Press, 334-363.

Mostowski A.

[1955] „The present state of investigations on the foundations of mathematics", *Rozprawy Matematyczne*, 9.

Paris J., Harrington L.

[1977] „A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic", w: Barwise J. (red.), *Handbook of mathematical logic*, North-Holland.

Quine W.V.O.

[1951] „On Carnap's Views on Ontology", *Philosophical Studies*, 2, 65-72. Przekład polski: „O poglądach Carnapa na ontologię" w: Stanosz B. (red.), *Empiryzm współczesny*, Warszawa, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1991, 163-172.

[1953b] „Two dogmas of empiricism", w: *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, s.20-46, przekład polski: „Dwa dogmaty empiryzmu" w: *Z punktu widzenia logiki*, Warszawa: PWN, 1969, 35-70.

[1969] „Existence and Quantification", w: *Ontological Relativity and Other Essays*, New York: Columbia University Press, 91-113.

[1981] „Things and Their Place in Theories”, w: *Theories and Things*, Cambridge, Mass: The Belknap Press of Harvard University Press, 1-23. Przekład polski: „Rzeczy i ich miejsca w teoriach”, w: Szubka T. (red.), *Metafizyka w filozofii analitycznej*, Lublin, TN KUL, 1995, 31-52.

Wójtowicz K.

[2001] „Some remarks on Hartry Field’s notion of logical consistency”, *Logic and Logical Philosophy*, (9), 2001, 199-212.

[2002] *Platonizm matematyczny. Studium filozofii matematyki Kurta Gödla*, Biblos, Tarnów.

[2003] *Spór o istnienie w matematyce*. Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa.

[2008] *On too strong a form of mathematical realism,* w: *Logic, Methodology and Philosophy of Science at the Warsaw University,* Brożek A. (red.), Wydawnictwo Naukowe *Semper*, 137-146.

[2008a] „Redukcje ontologiczne w matematyce. Część I”*, Filozofia Nauki*, 3-4, 105-118, 2008.