Krzysztof Wójtowicz

Redukcje ontologiczne w matematyce: cz. 3: zagadnienie rekonstrukcji fragmentów matematyki

Filozofia Nauki 19/3, 49-62

2011

Filozofia Nauki
Rok XIX, 2011, Nr 3(75)

Krzysztof Wójtowicz

Redukcje ontologiczne w matematyce. Część III
Zagadnienie rekonstrukcji fragmentów matematyki

Ten tekst stanowi trzecią część cyklu prac poświęconych problemowi redukcji ontologicznych w matematyce (pierwsze dwie części, w których zarysowany jest sam problem oraz zaprezentowane są ogólne problemy oraz stanowiska realistyczne, z punktu widzenia których analizowany jest problem redukcji, to [Wójtowicz 2008], [Wójtowicz 2011]). W tej części pracy rozważam problem rekonstrukcji matematyki w teorii słabszej niż ZFC. Nie jest to problem czysto teoretyczny — taka rekonstrukcja faktycznie może zostać przeprowadzona w stosunku do pewnych fragmentów matematyki, co ma istotne znaczenie z punktu widzenia problemu wyboru bazy ontologicznej dla matematyki. W związku z tymi wynikami technicznymi można sformułować problem swoistej względności ontologicznej, który będzie omawiany w części IV. Niniejsza część pracy zawiera również analizę problemu metateoretycznej roli teorii mnogości jako narzędzia formalizacji naszych wnioskowań i znaczenia tego faktu dla problemu redukcji ontologicznych.

1. MATEMATYKA STOSOWANA — PROBLEM REKONSTRUKCJI ARYTMETYKA Z_2

Niewątpliwie ważnym (choć oczywiście nie jedynym) czynnikiem stymulującym rozwój matematyki jest fakt stosowalności matematyki w naukach przyrodniczych. Inspiracje te przenikają całą matematykę, fakt zaś zastosowań jest niewątpliwie jednym z centralnych problemów współczesnej filozofii matematyki. Dlatego tutaj skupię się właśnie na tych fragmentach matematyki, które są bliższe praktyki naukowej. Techniki matematyczne stosowane w naukach empirycznych stanowią stosunkowo luźne skupisko technik, teorii i twierdzeń, które często są konstruowane „na bieżąco”, na potrzeby konkretnych zastosowań. Nie są one bynajmniej budowane w porządku logicznym, z dbałością o pojęciową „czystość” i porządek. Stanowią jedynie narzędzia, o ich wartości zaś świadczy to, czy przydają się w opisie pewnych zjawisk, a nie to, czy uzyskałyby od logika wysokie noty za elegancką strukturę pojęciową i dobrze sformułowaną listę pojęć pierwotnych i aksjomatów.[1]

Ten fakt uważam za znaczący dla dyskusji filozoficznej. Punktem wyjścia tej dyskusji powinno być to, jaka jest faktycznie uprawiana matematyka (a nie jaką jej wizję nosi w swym sercu filozof), i dopiero wychodząc od tego faktu, należy badać problem rekonstrukcji. Standardowym narzędziem formalnej rekonstrukcji matematyki jest teoria mnogości — jest bowiem teorią na tyle silną, że można w niej w wygodny sposób odtworzyć praktycznie wszystkie pojęcia matematyczne i udowodnić twierdzenia znane z praktyki matematycznej. Jednak przyjęcie teorii mnogości jako bazy formalnej wiąże się z pewnymi problemami natury filozoficznej (o nich była mowa w [Wójtowicz 2008]). Naturalne staje się więc postawienie pytania, czy (przynajmniej fragmentaryczna) rekonstrukcja matematyki stosowanej nie może być dokonana w teorii słabszej niż ZFC. Tak faktycznie jest, istnienie zaś takich rekonstrukcji stanowi — w mojej ocenie — fakt bardzo inspirujący filozoficznie. Tutaj skupię się na zagadnieniu rekonstrukcji fragmentów matematyki w ramach programu tzw. matematyki odwrotnej, której wyniki są bardzo ważne z punktu widzenia analizy problemu redukcji ontologicznych.

Inspiracją dla twórców tego programu były wyniki Hilberta i Bernaysa, którzy w pracy [Hilbert, Bernays 1934] pokazali, jak można w pewnej stosunkowo słabej (w porównaniu z ZFC) teorii, a mianowicie w arytmetyce drugiego rzędu Z_2 formalnie zrekonstruować znaczące fragmenty matematyki.[2] Program matematyki odwrotnej został zainicjowany przez Friedmana w latach siedemdziesiątych XX w. [Friedman 1975], najważniejsze zaś wyniki w tym zakresie osiągnął Simpson i jego współpracownicy.[3] Mówiąc w pewnym uproszczeniu, zasadniczym celem badań w zakresie matematyki odwrotnej jest zbadanie, jak silne założenia są konieczne do udowodnienia poszczególnych twierdzeń zwykłej matematyki. Zazwyczaj korzystamy w swobodny sposób z dostępnych założeń,[4] program matematyki odwrotnej ma

---

[1] Nie twierdzę oczywiście, że narzędzia matematyki stosowanej są tworzone *ad hoc* i nie wiążą się z całym gmachem pojęciowym matematyki. Taka teza byłaby w jawny sposób absurdalna. Chcę jedynie podkreślić fakt, że nie są tworzone zgodnie z wyobrażeniami (czy raczej: marzeniami) filozofa, a fakt, że często są tworzone jako narzędzia do konkretnych zastosowań powoduje, że potrzeba ich formalnego, precyzyjnego ujęcia schodzi na dalszy plan. W tej sytuacji problem jednolitej rekonstrukcji staje się bardzo wyraźny.

[2] Mówiąc o rekonstrukcji w Z_2, mam na myśli — podobnie jak w przypadku rekonstrukcji matematyki w teorii mnogości — fakt, że pojęcia matematyczne dają się zdefiniować w języku teorii Z_2 i dają się w ramach niej udowodnić stosowne twierdzenia matematyczne (oczywiście po dokonaniu odpowiednich tłumaczeń — por. dalej).

[3] Podstawowa monografia to [Simpson 1999].

[4] Z logicznego punktu widzenia te granice są ustalone przez ZFC (choć w codziennej praktyce

natomiast charakter swoistej metamatematycznej refleksji, uprawianej w „odwrotnym" kierunku: zamiast dowodzić nowe twierdzenia na podstawie przyjętych założeń, jako „daną" naszych badań i punkt wyjścia traktujemy właśnie twierdzenia, a celem staje się identyfikacja siły założeń egzystencjalnych (mierzonych siłą aksjomatów istnienia zbiorów — por. dalej) niezbędnych do udowodnienia tych twierdzeń. Chodzi przy tym o znane z codziennej praktyki twierdzenia zwykłej matematyki.[5] Podział matematyki na „zwykłą" i teoriomnogościową jest oczywiście nieostry i do pewnego stopnia umowny, jednak będę się do niego odwoływał, idąc za Simpsonem, który charakteryzuje matematykę teoriomnogościową jako obejmującą te fragmenty matematyki, do badania (i sformułowania) których konieczne jest odwoływanie się do metod, pojęć i środków *stricte* teoriomnogościowych (można tu więc myśleć o np. pozaskończonej iteracji operacji tworzenia zbioru potęgowego, badaniach dotyczących arytmetyki liczb kardynalnych, badaniach dotyczących zależności między rozmaitymi modelami dla ZFC, wynikach dotyczących relatywnej niesprzeczności rozszerzeń teorii mnogości, *etc*.). Matematyce teoriomnogościowej przeciwstawia matematykę nieteoriomnogościową, czyli fragment matematyki

> pierwotny, lub niezależny od wprowadzenia abstrakcyjnych pojęć teoriomnogościowych. Chodzi tutaj o takie gałęzie jak geometria, teoria liczb, rachunek różniczkowy i całkowy, równania różniczkowe, analiza rzeczywista i zespolona, przeliczalna algebra, topologia ośrodkowych przestrzeni metrycznych, logika matematyczna i teoria obliczeń. [Simpson 1999, 1].[6]

Oczywiście, aby można było prowadzić analizy dotyczące zobowiązań ontologicznych i precyzyjnie opisać siłę niezbędnych założeń, konieczne jest przeprowadzenie rekonstrukcji stosownych pojęć matematycznych w jednolitym systemie formalnym. Systemem, który stanowi podstawę analiz jest właśnie wspomniana już wcześniej arytmetyka drugiego rzędu Z_2. Nie będę tu szczegółowo opisywał technicznych szczegółów takiej rekonstrukcji, uważam jednak za konieczne zapoznanie Czytelnika z ogólną ideą i pewnymi podstawowymi faktami dotyczącymi tej problematyki. Styl prezentacji będzie jednak dość swobodny.[7]

---

te granice są znacznie bliżej). Mam tutaj na myśli fakt, że matematyk dowodząc twierdzenia, nie martwi się tym, że akurat skorzystał z aksjomatu istnienia zbioru potęgowego, lematu Kuratowskiego–Zorna czy aksjomatu zastępowania.

[5] A więc nie chodzi tu np. o twierdzenia dotyczące relatywnej niesprzeczności CH z aksjomatem istnienia liczby mierzalnej albo o inne *stricte* teoriomnogościowe twierdzenia, ale o twierdzenia „zwykłe", takie jak twierdzenie Bolzano–Weierstrassa, Banacha–Steinhausa, Stokesa *etc.*

[6] Można tu przytoczyć jeszcze inną charakterystykę podaną przez Simpsona: „*przez zwykłą matematykę rozumiemy będącą w głównym nurcie badań matematycznych matematykę nie-teoriomnogościowa, tj. matematykę, z jakę mieliśmy do czynienia, zanim zabrali sie za nią specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości. (Lub raczej: matematykę taką, jaką byłaby, gdyby nie zabrali się do niej specjaliści od abstrakcyjnej teorii mnogości.)*" [Simpson 1984, 783].

[7] Czytelnik zainteresowany szczegółami technicznymi znajdzie je np. w podstawowej monografii [Simpson 1999], bardziej zaś popularną prezentację np. w [Murawski 1993], [Wójtowicz 2003].

Arytmetyka Z_2 to teoria, w której mowa jest o liczbach naturalnych i o zbiorach liczb naturalnych. W języku L_2 (w którym sformułowana jest teoria Z_2) mamy więc zmienne indywiduowe $x,y,z\ldots$, które reprezentują liczby naturalne, oraz zmienne $X,Y,Z\ldots$, które reprezentują zbiory liczb naturalnych. Zamierzony model dla Z_2 to $(\omega, P(\omega))$, a zatem mamy tam prawdziwe liczby naturalne oraz ich podzbiory.[8] Symbole pozalogiczne języka L_2 to: $+$, $\cdot$, $<$, $\in$, 0, 1.[9] Należy tu dodać, że sama nazwa „arytmetyka drugiego rzędu" jest niezbyt trafna — Z_2 jest bowiem dwusortową teorią pierwszego rzędu.[10]

Aksjomaty Z_2 to:

(i) Standardowe aksjomaty dla dodawania i mnożenia.

(ii) Aksjomat ekstensjonalności: $\forall x(x\in X \Leftrightarrow x\in Y) \Rightarrow X=Y$

(iii) Aksjomat indukcji: $[0\in X \wedge (\forall x\,(x\in X \Rightarrow (x+1)\in X)] \Rightarrow \forall x\, x\in X$.

oraz schemat aksjomatów istnienia zbiorów:

(iv) (CA)[11]: $\exists X\forall x\,(x\in X \Leftrightarrow \varphi(x))$,

dla wszystkich formuł φ z języka L_2, w których zmienna X nie jest wolna.

Ostatni schemat stwierdza, że dla wszystkich formuł φ języka arytmetyki Z_2 istnieje pewien zbiór, składający się dokładnie z tych elementów, które spełniają formułę φ. Dlatego też jest szczególnie ważny z punktu widzenia dyskusji dotyczącej zobowiązań ontologicznych. Schematowi (CA) można nadać słabszą postać, postulując istnienie zbiorów dla węższej klasy formuł. W ogólnym wypadku taki osłabiony schemat można więc sformułować tak:

(CA-F): $\exists X\forall x\,(x\in X \Leftrightarrow \varphi(x))$,

dla wszystkich formuł φ z interesującej nas klasy formuł F (X nie może być tu zmienną wolną).

Taki schemat jest słabszy, niż ogólny schemat (CA), gdyż zakłada tylko istnienie zbiorów definiowanych formułami z klasy F. Nie zakłada więc istnienia wszystkich

---

[8] Modelem jest $(\omega, P(\omega))$, czyli zakresem zmienności zmiennych $x,y,z\ldots$ są liczby naturalne, zakresem zaś zmienności zmiennych $X,Y,Z\ldots$ — zbiory liczb naturalnych. Mówiąc o „prawdziwych liczbach naturalnych" (nie jest to oczywiście termin techniczny) chcę wyrazić fakt, że zamierzoną interpretacją są liczby 1,2,3… a nie elementy dowolnego (także niestandardowego) modelu dla arytmetyki PA. Sytuacja jest tu podobna do sytuacji arytmetyki Peano, gdzie również mówimy o modelu zamierzonym.

[9] Czyli symbole dla odpowiednio: dodawania, mnożenia, mniejszności, należenia, zera i jedynki.

[10] W szczególności nie jest ona teorią tak silną, jak teorie drugiego rzędu, nie jest kategoryczna, ma niestandardowe modele (podobnie jak arytmetyka pierwszego rzędu PA). Taki niestandardowy model ma postać (M, G), gdzie M jest modelem dla PA, G zaś jest klasą podzbiorów M (czyli $G\subseteq P(M)$).

[11] CA to skrót od *Comprehension Axiom*.

zbiorów definiowalnych formułami z języka Z_2. Mówiąc swobodnie — istnieje mniej zbiorów. Taka modyfikacja — polegająca m.in. na osłabieniu przyjmowanych aksjomatów egzystencjalnych — prowadzi do teorii słabszych niż Z_2, spośród których niektóre okazują się bardzo naturalne z matematycznego punktu widzenia. Przedmiotem badań matematyki odwrotnej są właśnie te teorie, czyli podsystemy Z_2.[12]

W języku L_2 możliwe jest znalezienie formalnej reprezentacji wielu pojęć matematycznych. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, odbywa się to w ten sposób, że definiowalne są odpowiedniki (swoiste kody) dla zwykłych obiektów matematycznych. Dzięki temu można sformułować odpowiedniki zwykłych twierdzeń matematycznych (z zakresu np. algebry, równań różniczkowych, analizy funkcjonalnej *etc.*) Pomijam tutaj szczegóły techniczne tych kodowań, istotny dla naszej dyskusji jest natomiast sam fakt, że kodowania te mogą zostać wykonane w języku L_2 (zaś odpowiednie podsystemy Z_2 są odpowiednio silne, aby udowodnić istnienie badanych obiektów).[13]

Dzięki tej rekonstrukcji pojęć matematycznych w języku Z_2, możliwe jest też sformułowanie odpowiedników interesujących nas twierdzeń i badanie dowodliwości tych twierdzeń w podsystemach Z_2. Oczywiście to, jakie twierdzenia dają się udowodnić w danym podsystemie Z_2, zależy od siły tego podsystemu, a tę mierzymy właśnie siłą założeń egzystencjalnych wyrażonych w schemacie aksjomatów (CA-F). Podstawowym celem badań w zakresie matematyki odwrotnej jest zidentyfikowanie siły założeń niezbędnych dla dowodzenia konkretnych twierdzeń matematycznych. Problem, będący przedmiotem zainteresowania, można więc postawić w sposób następujący:

(P) W jakim najsłabszym podsystemie Z_2 można udowodnić dane twierdzenie matematyczne α?

Dla podsystemów Z_2 można wprowadzić naturalną miarę ich siły — będzie to siła założeń egzystencjalnych dotyczących istnienia zbiorów — czyli po prostu to, jak szeroka klasa formuł występuje w przyjmowanym schemacie CA-F. Problem (P) można więc również sformułować jako:

(P*) Jakie aksjomaty istnienia zbiorów CA-F trzeba przyjąć, aby możliwe było udowodnienie danego twierdzenia matematycznego α?

---

[12] Powiemy, że teoria S^* jest podsystemem teorii S ($S^* \subseteq S$), gdy każde twierdzenie, dające się udowodnić w ramach S^* daje się też udowodnić w teorii S.

[13] Na przykład liczby całkowite są kodowane jako klasy równoważności par liczb naturalnych; liczby wymierne jako klasy równoważności par liczb całkowitych; liczby rzeczywiste jako ciągi liczb wymiernych spełniających warunek zbieżności Cauchy'ego *etc.* Następnie możemy zdefiniować ciągi liczb rzeczywistych, potem funkcje ciągłe (jako zbiory czwórek liczb rzeczywistych, które interpretujemy jako częściowe informacje dotyczące wartości funkcji, tzn. jeśli taki zbiór F ma reprezentować funkcję f, to $(c,d,u,v) \in F \Rightarrow u \leq f(x) \leq v$, gdy $c<x<d$.). Dalej rozszerzamy tę procedurę kodowania na kolejne obiekty matematyczne (przestrzenie metryczne, przestrzenie Hilberta *etc.*).

Hierarchia podsystemów Z_2, uporządkowana ze względu na siłę aksjomatów istnienia zbiorów okazuje się dość naturalna z punktu widzenia praktyki matematycznej. Pewnym grupom twierdzeń zwykłej matematyki odpowiadają bowiem podsystemy Z_2, w których twierdzenia te można formalnie zrekonstruować i udowodnić. Ta hierarchia obejmuje stosunkowo szeroką klasę klasycznych twierdzeń matematycznych — zaliczających się (zgodnie z przyjętą wcześniej charakterystyką) do matematyki nieteoriomnogościowej. Badania w ramach matematyki odwrotnej pozwalają więc na precyzyjną klasyfikację siły aksjomatów istnienia zbiorów, niezbędnych dla udowodnienia interesujących nas twierdzeń matematycznych. Jest to szczególnie ważne do dyskusji realizm-antyrealizm, w ramach której problem identyfikacji zobowiązań ontologicznych jest badany intensywnie.[14] Warto podkreślić, że jest to rekonstrukcja w systemie pojęć opierającym się na znacznie słabszych założeniach niż teoria mnogości. Ta rekonstrukcja jest zdecydowanie bardziej złożona (mamy bowiem do dyspozycji słabsze środki, i rekonstrukcja okazuje się bardziej kłopotliwa). Pojawia się fundamentalny problem — co istnienie takiej rekonstrukcji mówi nam o naturze obiektów matematycznych?[15] Problem ten podjęty zostanie później, teraz zaś wyniki matematyki odwrotnej zostaną poddane analizie z punktu widzenia różnych wersji matematycznego realizmu.

2. DYSKUSJA

2.1. Z punktu widzenia platonizmu Gödla

Mówiąc w pewnym uproszczeniu, punktem wyjścia argumentacji Gödla na rzecz matematycznego realizmu jest praktyka matematyczna i konstatacja, że w matematyce celem jest rozwiązywanie otwartych problemów — także poprzez (m.in.) wzmacnianie założeń. Gödel w swej argumentacji na rzecz realizmu matematycznego nie powołuje się jednak bynajmniej na fakt zastosowań matematyki w naukach empirycznych.[16] Przywołana wyżej rekonstrukcja (fragmentów) matematyki w podsyste-

[14] Np. problem stosowalności matematyki i rekonstrukcji technik matematycznych stosowanych w naukach empirycznych jest kluczowy dla koncepcji Fielda ([Field 1980]); por. też analizy Hellmana dotyczące granic nominalistycznej rekonstrukcji technik matematyki stosowanej w [Hellman 1989].

[15] Przy takiej rekonstrukcji, podstawowymi obiektami stają się liczby naturalne (i zbiory tych liczb). Jeśli będziemy traktować te liczby naturalne jako obiekty *per se* (a nie jako pewne zbiory, a mianowicie skończone liczby porządkowe), to bazowa staje się zupełnie inna klasa obiektów niż w przypadku rekonstrukcji w ZFC.

[16] „*Można powiedzieć, że 99,9% współczesnej matematyki zawiera się w pierwszych trzech szczeblach hierarchii mnogościowej. A zatem z praktycznego punktu widzenia, cała matematyka może zostać zredukowana do skończonej ilości aksjomatów. Jest to jednak jedynie pewien historyczny zbieg okoliczności (historical accident), który nie ma znaczenia dla samej zasady. Co więcej, nie jest całkiem nieprawdopodobne, że taki właśnie charakter współczesnej matematyki ma związek*

mach Z_2 nie ma więc — z punktu widzenia argumentacji Gödla — istotnego znaczenia. Przypuszczam, że nawet gdyby cała matematyka niezbędna w zastosowaniach w naukach empirycznych mogła zostać zrekonstruowana w jakimś słabszym od ZFC systemie, fakt ten nie stanowiłyby dla Gödla argumentu przeciwko przyjęciu bogatej ontologii mnogościowej i nie zmieniłby jego poglądu na charakter uniwersum matematycznego. Zdaniem Gödla bowiem, celem badań matematycznych jest rozwiązywanie problemów, wzbogacanie wiedzy matematycznej, i to uzasadnia sięganie po silne założenia (a nie zastosowanie matematyki w naukach empirycznych). Teoria mnogości jest zaś właśnie tą teorią, w ramach której (m.in. poprzez wprowadzanie nowych, silnych założeń — np. aksjomatów dotyczących istnienia dużych liczb kardynalnych) można rozwiązywać otwarte problemy matematyczne — na przykład problemy teorii liczb, nierozstrzygalne w samej arytmetyce. Gödel był przekonany o tym, że w rozwiązywaniu problemów teorii liczb może być przydatne użycie silnych aksjomatów teorii mnogości. Twierdził np., że „*Dzisiejsza matematyka nie nauczyła się jeszcze korzystać z aksjomatów teorii mnogości dla rozwiązywania problemów teorii liczb. […] Teoriomnogościowa teoria liczb, […] czeka na swoje odkrycie*” [Gödel 1951, 307-308]. O aksjomatach istnienia dużych liczb kardynalnych pisał zaś: „[*T]e aksjomaty zwiększają ilość rozstrzygalnych problemów nawet w zakresie teorii równań diofantycznych*” [Gödel 1947/64, 264].[17] Przyjmowanie nowych, silnych założeń jest w pełni uzasadnione, jeśli tylko pozwoli to na uzyskanie nowych wyników.[18] Mówiąc metaforycznie, brzytwa Ockhama winna być stępiona, jeśli dzięki temu można będzie rozwiązać nowe problemy matematyczne.

Zdaniem Gödla, uniwersum matematyczne jest opisane przez teorię mnogości, więc ograniczanie naszej uwagi do słabszych teorii nie ma sensu. Każda taka słaba teoria T opisuje jakąś dziedzinę matematyczną, będącą po prostu fragmentem uniwersum matematycznego, w którym — mówiąc swobodnie — „zamieszkują” wszystkie byty matematyczne. Ten fragment uniwersum można scharakteryzować, odwołując się do teorii mnogości. Gödel przyznałby być może, że problem zobowią-

z inną jej cechą, a mianowicie niemożliwością udowodnienia pewnych podstawowych twierdzeń, takich jak np. hipoteza Riemanna, pomimo wieloletnich wysiłków” [Gödel 1951, 307].

[17] Pisał o tym w wielu miejscach: „[*I]stnieją też zdania arytmetyczne, które nie mogą być udowodnione nawet w ramach analizy, ale jedynie poprzez zastosowanie metod w których odwołujemy się do bardzo dużych nieskończonych liczb kardynalnych*” [Gödel *1933o, 47]. *„[I]stnieją problemy teorioliczbowe, które mogą być rozwiązane tylko przy użyciu analitycznych lub teoriomnogościowych technik*” [*Gödel 1931?, 35].

[18] W szczególności, Gödel sądził, że rozwiązanie problemu kontinuum może być możliwe dzięki aksjomatom dużych liczb kardynalnych. Przewidywania te były jednak błędne. Za pomocą odkrytej przez Cohena metody *forcingu* udowodniono, że aksjomaty dużych liczb kardynalnych nie pozwalają na rozstrzygnięcie problemu kontinuum. Okazuje się bowiem, że z założeniami o istnieniu takich liczb daje się pogodzić zarówno CH, jak i ¬CH (są z nimi niesprzeczne). Warto przypomnieć, że Gödel sam poszukiwał aksjomatów, które umożliwiłyby rozwiązanie problemu kontinuum (są to tzw. *square axioms* ([*Gödel 1970a, 1970b]), które jednak nie dotyczyły dużych liczb kardynalnych.

zań ontologicznych stosowanych teorii *T* jest ciekawym zagadnieniem metateoretycznym, ale nie uznałby tego problemu za istotny dla naszego rozumienia tego, czym jest (obiektywnie istniejące) matematyczne uniwersum. Platonik przyjmujący silne założenia (jak Gödel) uważa, że odwoływanie się do argumentu z niezbędności skutkuje tym, że nie dostrzega się pewnych ważnych pytań dotyczących rzeczywistości matematycznej. Z punktu widzenia takiego stanowiska, argumentacja oparta na koncepcji Quine'a (i tym samym ograniczenie realistycznej interpretacji do matematyki stosowanej) prowadzi do zniekształconego poglądu na matematyczną rzeczywistość.

Reasumując, wyniki dotyczące rekonstrukcji matematycznego instrumentarium w ramach teorii słabszych od ZFC nie miałyby — z punktu widzenia stanowiska Gödla — istotnego znaczenia. Stanowiłyby techniczną ciekawostkę, ale — z punktu widzenia „Programu Poszukiwania Prawdy o Świecie Matematycznym" — nie byłyby brane pod uwagę.

2.2. Z punktu widzenia realizmu Quine'a

Z punktu widzenia stanowiska Quine'a, sprawa wygląda oczywiście zupełnie inaczej. Ponieważ jedyne racje, jakie przemawiają za przyjęciem stanowiska realistycznego opierają się na analizie roli matematyki w naukach empirycznych, więc również dyskusja problemu redukcji ontologicznych musi być prowadzona w tym kontekście. Teoria mnogości jest teorią o wiele za silną z punktu widzenia potrzeb matematyki stosowanej, można tu mówić o swoistej „nadwyżkowości".[19] Rekonstrukcja technik matematycznych stosowanych w naukach empirycznych (a mówiąc innymi słowy — redukcja ontologiczna) powinna zatem odbywać się relatywnie do możliwie najsłabszej teorii, przy możliwie najsłabszych ontologicznie założeniach, dotyczących istnienia obiektów matematycznych. Narzędziem takich ilościowych analiz ontologicznych, pozwalających na zidentyfikowanie zobowiązań ontologicznych jest właśnie rekonstrukcja w ramach Z_2. Inaczej więc niż z punktu widzenia stanowiska Gödla (i — jak zobaczymy — FBP), dla stanowiska Quine'a wyniki prezentowane wyżej mają bardzo istotne znaczenie, wyniki zaś matematyki odwrotnej dają niejako gotowe kryterium ilościowe dotyczące siły założeń ontologicznych koniecznych dla rekonstrukcji fragmentów matematyki stosowanej.

---

[19] *„Ta część matematyki, która jest potrzebna w naukach empirycznych ma ten sam status, co reszta nauki. Pozaskończone rozgałęzienia mają ten sam status, o ile pełnią rolę upraszczającego usystematyzowania (simplificatory rounding out), jednak reszta ma status niezinterpretowanych systemów"* [Quine 1984, 788]. *„Uznaję nieprzeliczalne nieskończoności tylko dlatego, że są one konieczne dla systematyzacji zagadnień. Obiekty wykraczające poza te potrzeby, np. Beth$_\omega$ lub liczby nieosiągalne uważam za matematyczną rozrywkę i za pozbawione statusu ontologicznego*" [Quine 1986, 400].

2.3. Z punktu widzenia stanowiska FBP

Z punktu widzenia ogólnej strategii argumentacji na rzecz stanowiska FBP, przytoczone wcześniej wyniki dotyczące rekonstrukcji fragmentów matematyki w pewnych systemach formalnych należy uznać za pozbawione znaczenia. Zasadniczą tezą FBP jest teza ontologicznego maksymalizmu. Akceptacja tez dotyczących istnienia obiektów matematycznych nie zależy od wyników analiz dotyczących tego, czy dana teoria matematyczna stosuje się w naukach empirycznych, czy też nie. Argumentacja na rzecz stanowiska FBP nie odwołuje się do zastosowań matematyki, ale do tej naczelnej „maksymalistycznej metareguły". Mówiąc swobodnie, w przeciwieństwie do stanowiska swoistego minimalizmu ontologicznego, którego wyrazem jest brzytwa Ockhama, stanowisko FBP głosi regułę „im więcej obiektów matematycznych, tym lepiej". Nie ma przy tym znaczenia, czy dana teoria matematyczna ma jakiekolwiek zastosowania w naukach empirycznych, bo linia argumentacji na rzecz FBP przebiega zupełnie inaczej.[20] Z punktu widzenia stanowiska FBP, fragment matematyki pojawiający się w zastosowaniach nie jest w żaden naturalny sposób wyróżniony — równie dobrze (czy raczej: równie źle) można byłoby rozważać te teorie matematyczne, które badane są szczególnie intensywnie w ośrodkach matematycznych w Australii albo w Małopolsce. A zatem fakt, że pewna klasa pojęć matematycznych daje się zrekonstruować w ramach pewnej teorii nie ma znaczenia z punktu widzenia dyskusji dotyczącej redukcji ontologicznych. Żadna teoria matematyczna nie ma wyróżnionego statusu — nie jest nią ani ZFC, ani też Z_2 (czy podsystemy Z_2), nie ma więc sensu poszukiwać żadnej wyróżnionej teorii redukującej. Pytanie zaś o wskazanie takiej ontycznie pierwotnej klasy obiektów ma negatywną odpowiedź: po prostu nie można wskazać klasy obiektów matematycznych, którym można byłoby przypisać taki status. Można powiedzieć, że z punktu widzenia stanowiska FBP, uniwersum, w którym interpretowana jest Z_2 istnieje niejako „obok", w sposób niezależny od uniwersum mnogościowego (i — zgodnie z maksymalistycznym duchem FBP), niezależnie od innych obiektów matematycznych.[21]

Pojawia się tu subtelny problem: czy mamy tutaj do czynienia z różnymi uniwersami, ale tylko uniwersami teoriomnogościowymi, czy też raczej są do uniwersa

---

[20] Por. część II. Można powiedzieć, że argumentacja Balaguera stanowi raczej swoisty eksperyment myślowy badający postać jedynego (potencjalnie) dopuszczalnego stanowiska realistycznego. W świetle maksymalizmu stanowiska FBP, problem zastosowań nie ma dla tej argumentacji żadnego znaczenia.

[21] Warto dodać, że ta uwaga dotyczy również różnych wariantów teorii mnogości. Na pytanie, czy teorią matematyczną prawdziwie opisującą uniwersum matematyczne jest ZFC czy ZF+¬AC, czy jest prawdziwa hipoteza kontinuum, czy jej negacja *etc.*, zwolennik stanowiska FBP odpowie, że żadna z tych teorii nie opisuje prawdziwie matematycznego uniwersum — czy raczej: że każda z nich opisuje pewien fragment matematycznego uniwersum. Różne warianty teorii mnogości opisują więc różne fragmenty matematycznego świata. Szczegółowa analiza stanowiska FBP i pojawiających się z w związku z nim wątpliwości zawarta jest w pracy [Wójtowicz 2003].

matematyczne *per se*, nieredukujące się do uniwersów teoriomnogościowych? Pytanie to nie dotyczy wyłącznie problemu redukcji do teorii mnogości, ale można je postawić w szerszym kontekście. Czy np. liczby naturalne istnieją jako takie, niezależnie od liczb całkowitych, czy też są po prostu szczególnego typu liczbami całkowitymi?[22] Czy liczby wymierne istnieją niezależnie od rzeczywistych (czy też są to pewnego szczególnego typu liczby rzeczywiste)? Jakie są między tymi klasami bytów relacje ontyczne? Czy liczby naturalne istnieją samoistnie, ale mają swój odpowiednik („kopię”) wewnątrz zbioru liczb całkowitych (a te z kolei wewnątrz liczb rzeczywistych… *etc.*), czy też istnieją tylko jako fragment **R**?[23]

3. TEORIA MNOGOŚCI JAKO METAŚRODOWISKO

W przypadku zwykłych pojęć matematycznych można zasadnie twierdzić, że pojęcia te potrafimy rozumieć *per se*, bez odwoływania się do ich teoriomnogościowej rekonstrukcji. Nie budzi żadnych wątpliwości fakt, że matematyka była uprawiania bez teoriomnogościowej formalizacji.[24] Jednak w dyskusji dotyczącej podstaw matematyki obowiązuje teoriomnogościowy paradygmat. Pojęcia metalogiczne są zdefiniowane standardowo w teorii mnogości (poczynając od definicji spełniania

[22] Przy formalnej rekonstrukcji w teorii mnogości nie ma tu problemu — liczby naturalne to skończone liczby porządkowe, liczby zaś całkowite to klasy abstrakcji par liczb naturalnych, takich, że…*etc.*, więc jest jasne, że to nie są te same obiekty — możemy je natomiast utożsamić za pomocą odpowiedniego, kanonicznego włożenia. To jednak nie daje nam odpowiedzi na pytanie o naturę ontyczną tych obiektów. Co więcej, uważam, że można zasadnie twierdzić, iż nasza pierwotna intuicja nie jest raczej taka, że liczby naturalne to po prostu nieujemne liczby całkowite (a liczby wymierne, to takie liczby rzeczywiste, które dają się przedstawić w postaci ułamka *etc.*).

[23] Sądzę, że takie pytania są stosunkowo naturalne z punktu widzenia codziennej praktyki matematycznej. Matematycy pracują w naturalnym środowisku pojęciowym, definiują pojęcia matematyczne i prowadzą rozumowania w „naturalnym języku matematycznym”, nie podejmując bynajmniej problemu, czy liczby, rozmaitości, przestrzenie Hilberta to elementy hierarchii teoriomnogościowej czy jakiejś innej hierarchii. Są raczej skłonni do przyjęcia „naturalnego nastawienia ontologicznego”, czyli traktowania obiektów matematycznych *per se*, niezależnie od istnienia redukcji. W jednym z artykułów Feferman pisze: „*Tak długo, jak nauka przyjmuje system liczb rzeczywistych jako dany, filozofowie nauki muszą w końcu postawić sobie podstawowe pytanie podstaw współczesnej matematyki: „Czym, tak naprawdę, są liczby rzeczywiste?”*” [Feferman 1998]. Czy redukcje do podsystemów Z_2 (lub jakichkolwiek innych formalnych systemów) dają odpowiedź na to pytanie? W praktyce matematycznej interesuje nas raczej rozwiązywanie problemów, a nie redukowanie pojęć do bazowej klasy. W tym sensie stanowisko Quine’a — choć można je uznać za swoiste lekarstwo na „ontologiczne ekscesy” — jest odległe od praktyki matematycznej.

[24] Pojęcia matematyczne (różniczkowalności, ciągłości, prawdopodobieństwa, krzywizny powierzchni, całki oznaczonej *etc.*) były badane na długo przed powstaniem teorii mnogości, w sposób całkiem niezależny od tego, jak wyglądają ich (późniejsze!) teoriomnogościowe reprezentacje. Twierdzenie, iż ówcześni matematycy tak naprawdę (nie wiedząc o tym) badali pewne zbiory, jest silnym twierdzeniem dotyczącym ontycznej natury obiektów matematycznych. Nie sądzę, aby można je było łatwo uzasadnić.

Tarskiego).[25] Kiedy prowadzimy formalne badania na temat np. tego, co wynika z danej teorii, to w nieuchronny sposób odwołujemy się do pojęć np. teoriomodelowych, *scil.* teoriomnogościowych. Sformalizowanie metamatematyki w teorii mnogości ma ogromne zalety, bo pojęcia konsekwencji logicznej, prawdy, możliwości, niesprzeczności *etc.* zyskują precyzyjną definicję i mogą być poddawane „obróbce formalnej" (prowadzącej do bardzo nietrywialnych i wyrafinowanych rezultatów). Nasze intuicyjne rozważania dotyczące podobieństwa struktur, siły teorii, siły wyrażeniowej, definiowalności pojęć, wynikania logicznego mogą zostać doprecyzowane w ramach paradygmatu teoriomnogościowego. Jako przykład można podać twierdzenie o pełności: fakt, że każda niesprzeczna teoria ma model dowodzi się w teorii mnogości, nie dbając bynajmniej o to, by ten model był jakkolwiek naturalny; twierdzenia o zwartości dowodzi się przez ultraprodukt, czyli konstrukcję o „bardzo teoriomnogościowej" naturze (ingeruje bowiem pewnik wyboru). Można więc powiedzieć, że dzięki przyjęciu takiego właśnie bogatego systemu pojęć mamy możliwość precyzyjnego zdefiniowania pojęcia, które rozumiemy w sposób nieformalny, a mianowicie tego, co to znaczy, że pewne zdanie matematyczne wynika z danych przesłanek. Definicja Tarskiego umożliwia podanie definicji (i stanowi zarazem swoisty wzorzec dla całej klasy semantyk). Teoria mnogości umożliwia precyzyjne postawienie i wyjaśnienie tego zagadnienia.[26]

Fakt, że badania metalogiczne prowadzone są w ramach teorii mnogości, narzuca pewną perspektywę metodologiczną i ontologiczną.[27] Ma to istotne znaczenie także z punktu widzenia dyskusji ontologicznej. Naturalny zdawać się wówczas może pogląd, że baza ontologiczna dla matematyki jest po prostu identyczna z bazą ontologiczną dla teorii mnogości (czyli że to teoria mnogości dostarcza poprawnej ontologii dla matematyki). Co więcej, wydaje się, że w dyskusji dotyczącej podstaw matematyki pojawia się taki „teoriomnogościowy odruch" — skłonni jesteśmy bowiem wszelkie pojęcia interpretować w ramach paradygmatu teoriomnogościowego.[28]

---

[25] Są autorzy, którzy kwestionują to ujęcie, ale są oni w mniejszości.

[26] Problem formalizacji pojęć metalogicznych stanowi szczególny przypadek pewnego ogólniejszego problemu: jak się ma preformalne rozumienie pojęć matematycznych do ich formalizacji? W jakim sensie mamy do czynienia z tymi samymi pojęciami? W jakim sensie pewnego rodzaju konstrukcja teoriomnogościowa jest odzwierciedleniem pojęcia krzywej, rozmaitości, prawdopodobieństwa *etc.*? Co stanowi kryterium takiej tożsamości? Zauważmy, że przecież takie kryterium nie może być sformułowane *wewnątrz* teorii mnogości.

[27] Mówiąc nieco żartobliwie, niemal już na poziomie odruchu bezwarunkowego sformułowanie „α wynika z T" interpretujemy jako stwierdzenie, że w każdym modelu dla T spełnione jest zdanie α (zaś stwierdzenie, że α jest sprzeczne z β, interpretujemy jako stwierdzenie, że nie istnieje model, w którym prawdziwe byłoby jednocześnie α i β). Tym samym okazuje się, że „lądujemy" w teoriomnogościowym sposobie myślenia.

[28] Zwolennicy myślenia teoriokategoryjnego są w mniejszości, choć sądzę, że ich głosy są coraz bardziej słyszalne.

Sądzę jednak, że mimo to warto rozważyć alternatywny sposób myślenia. Byłoby rzeczą niewłaściwą, gdyby już sam wybór narzędzi formalizacji dyskursu metateoretycznego rozstrzygał problem wyboru bazy ontologicznej. Wybór narzędzi formalizacji dyskursu metateoretycznego powinien być bowiem neutralny z punktu widzenia dyskusji.[29]

Dotykamy tutaj problemu znalezienia neutralnego języka (meta)ontologicznego: w ramach jakiego systemu pojęć możemy prowadzić rozważania dotyczące wzajemnej interpretowalności różnych teorii czy wzajemnej redukowalności różnych ontologii? Byłoby oczywiście źle, gdyby sam wybór języka rozstrzygał dyskusję (albo nawet sugerował wybór którejś z możliwości) — podobnie jak byłoby niewłaściwe, gdyby np. przyjęta definicja obiektu abstrakcyjnego nie była neutralna wobec sporu o istnienie tych obiektów. Ideałem byłoby znalezienie neutralnego języka dyskursu, w ramach którego moglibyśmy rozważać np. problem tłumaczenia z jednego języka na drugi czy ontologicznej redukcji jednego typu obiektów do obiektów innego typu.

Oczywiście, w stosunku do tego języka dyskursu można również postawić pewne pytania o charakterze metateoretycznym, a w stosunku do tych pytań dalsze *etc.* — pojawia się doskonale znany problem regresu *ad infinitum*. Trzeba podjąć decyzję, czy na poziomie tego (meta)dyskursu uznamy, że używane przez nas pojęcia mają dostatecznie uchwytny sens. Gdyby ten dyskurs odbywał się w systemie pojęć teorii mnogości, to od razu ustawiałoby pewną perspektywę ontologiczną i narzucałoby pewne rozstrzygnięcia. Nie byłaby to sytuacja właściwa. Najwygodniej byłoby mieć do dyspozycji dostatecznie ogólny, silny język, w którym moglibyśmy mówić o zbiorach, ale także o innych kategoriach ontologicznych dotyczących matematyki. Być może w takim języku mówilibyśmy o zbiorach, ale też kolekcjach, bytach, systemach, strukturach, faktach, sytuacjach matematycznych, stanowiące ontologiczne

---

[29] Jako podobny przykład rozważmy problem rekonstrukcji pojęć modalnych. Mamy pewne intuicyjne rozumienie tych pojęć, i rozumowania modalne były prowadzone nieformalnie na długo, zanim zostały poczynione jakiekolwiek próby formalizacji. Pierwsze formalizacje miały charakter syntaktyczny — „oficjalna" dziś semantyka Kripkego została podana kilkadziesiąt lat po sformułowaniu wersji syntaktycznych. Pojęcie możliwego świata, podstawowe w semantyce, to po prostu pojęcie teoriomodelowe, jako struktury relacyjnej. Ogólne intuicje, związane z pojęciem możliwego stanu rzeczy (możliwego świata) zostają tutaj sformalizowane w teorii mnogości: możliwy świat to struktura relacyjna, czyli czwórka uporządkowana, w której wyróżniono pewną klasę podzbiorów…*etc*, zdania zaś dotyczące możliwości są interpretowane jako zdania dotyczące pewnej klasy światów dostępnych.

Czy to znaczy, że — z punktu widzenia dyskusji ontologicznej — faktycznie pojęcie możliwego świata powinniśmy traktować jako pojęcie teoriomnogościowe? Czy wygoda tej teoriomnogościowej semantyki dla pojęć modalnych świadczy o tym, że modalny realista powinien uznać możliwe światy po prostu za pewnego typu zbiory (opisane w ZFC)? Nie sądzę bynajmniej, aby taki wniosek był uprawniony. To, że my pewne pojęcia modelujemy w teorii mnogości nie stanowi rozstrzygającego argumentu na temat mnogościowego charakteru korelatów ontycznych tych pojęć. Nie jest wcale jasne, czy takie modelowanie trafnie ujmuje istotę tego, czym możliwe światy są.

korelaty pojęć, zdań, teorii matematycznych *etc*. Taki wymarzony język to intuicyjnie uchwytny, ale zarazem nieredukowalny do teorii mnogości język ontologiczny.[30]

Jednak, aby móc prowadzić debatę ontologiczną, musimy zaakceptować fakt, że konieczne będzie w niej oparcie się na intuicyjnym rozumieniu pewnych pojęć, w szczególności pojęcia np. „obiektu matematycznego który nie jest zbiorem".[31] W przeciwnym razie dyskusja byłaby rozstrzygnięta już na poziomie wyboru języka. Pojawia się tu oczywiście ryzyko niedookreśloności języka dyskursu i pewnej nieuchwytności pojęć *etc*. Jednak, aby w ogóle móc prowadzić analizy filozoficzne, trzeba podjąć to ryzyko i zgodzić się na prowadzenie dyskusji w języku niedoprecyzowanym, rozumianym tylko intuicyjnie, bez wyposażenia w formalną aparaturę, jakiej dostarcza nam teoria mnogości. W przeciwnym razie musielibyśmy od razu złożyć broń i stwierdzić, że problem redukcji ontologicznej nie może nawet zostać jasno sformułowany.

BIBLIOGRAFIA

Feferman S.

[1998] „Why a Little Bit Goes a Long Way: Logical Foundations of Scientifically Applicable Mathematics", w: *In the light of logic*, New York, Oxford University Press, 284-298.

Field H.

[1980] *Science Without Numbers*, Oxford, Basil Blackwell.

Friedman H.

[1975] „Some systems of second order arithmetic and their use", w: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vancouver, 1974), Vol. 1, Canadian Mathematical Congress, Montreal, 235-242.

Gödel K.

[*1931?] „Uber unentscheidbare Sätze", tłumaczenie w: [Gödel 1995], 30-35.

[*1933o] „The present situation in the foundations of mathematics", w: [Gödel 1995], 45-53.

[30] Podobny problem metodologiczny występuje przy okazji dyskusji pomiędzy tradycyjnym realizmem matematycznym a strukturalizmem. Już samo sformułowanie problemu jest trudne, ponieważ trudno o neutralny język, który byłby dostatecznie zrozumiały intuicyjnie, a zarazem dostatecznie silny i precyzyjny, aby można w nim było prowadzić analizy dotyczące zależności między ontologiami zbiorów i struktur. Trudności te — polegające na tym, że nie można rozpocząć dyskusji, mając do dyspozycji gotowy, neutralny system pojęć, na gruncie którego dopiero można byłoby sformułować i analizować stanowiska realizmu obiektowego i strukturalizmu — podkreślają także sami strukturaliści (np. [Shapiro 1997]). Parsons zauważa, że stanowisko strukturalistyczne jest bardzo trudne do precyzyjnego wyartykułowania, a mimo to sprawia ono bardzo naturalne wrażenie [Parsons 1990, 334]. Jest to — jak sądzę — szczególny przypadek trudności analizy problemu w tym artykule: pewne tezy (a nawet stanowiska) mogą wydawać się intuicyjne bardzo zasadne, mimo iż bardzo trudne (lub wręcz niemożliwe) jest podanie dla nich precyzyjnego sformułowania.

[31] Oczywiście, takie pojęcia nie mogą być zdefiniowane wewnątrz teorii mnogości, która — z definicji — mówi tylko o zbiorach.

[1947/64] „What is Cantor's Continuum Problem?", *American Mathematical Monthly*, 54, 515-525. W rozszerzonej wersji przedrukowane w: [Benacerraf Putnam 1964], 258-273 (a także w: [Gödel 1990], 254-270).

[*1951] „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications", w: [Gödel 1995], 304-323.

[*1970a] „Some considerations leading to the probable conclusion, that the true power of the continuum is $\aleph_2$", w: [Gödel 1995], 420-421.

[*1970b] „A proof of Cantor's continuum hypothesis from a highly plausible axiom about orders of growth", w: [Gödel 1995], 422-423.

[1990] *Collected Works*, vol. 2, Feferman S. i. in. (red.), Oxford University Press.

[1995] *Collected Works*, vol. 3., Feferman S. i. in (red.), Oxford University Press.

Hellman G.

[1989] *Mathematics without Numbers*, Oxford Clarendon Press.

Hilbert D., Bernays P.

[1934] *Grundlagen der Mathematik*, Band I, Springer-Verlag.

Murawski R.

[1993] „Rozwój programu Hilberta", *Wiadomości Matematyczne*, XXX, 51-72.

Parsons C.

[1990] „The structuralist view of mathematical objects", *Synthese*, 84, 303-346.

Quine W. V. O.

[1984] „Review of Parsons C. *Mathematics in Philosophy*", Journal of Philosophy, (81), 783-794.

[1986b] „Reply to Charles Parsons", w: Hahn L., Schlipp P. A. (red.), *The philosophy of W. V. Quine*, La Salle, II: Open Court), 396-403.

Shapiro S.

[1997] *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology.* Oxford University Press. New York, Oxford.

Simpson S. G.

[1984] „Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations?", *Journal of Symbolic Logic*, 49, 783-802.

[1999] *Subsystems of Second Order Arithmetic,* Springer-Verlag

Wójtowicz K.

[2003] *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa, Semper.

[2008] „Redukcje ontologiczne w matematyce. Część I", *Filozofia Nauki*, 3-4, 105-118.

[2011] „Redukcje ontologiczne w matematyce. Część II", *Filozofia Nauki*, 2, 29-40.