Wojciech Krysztofiak

Logiczna składnia liczebnika: studium kognitywistyczne: cz. 1

Filozofia Nauki 20/1, 59-91

2012

Filozofia Nauki
Rok XX, 2012, Nr 1(77)

Wojciech Krysztofiak

Logiczna składnia liczebnika
Studium kognitywistyczne. Część I*

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja podstawowych założeń, jakie musi spełniać teoretyczny model procesów posługiwania się liczebnikami przez ludzki umysł, który posiada podstawowe umiejętności matematyczne, pozwalające na efektywne rozwiązywanie „prostych” zadań na dodawanie oraz mnożenie liczb naturalnych.[1] Liczebniki są rozumiane jako dowolne wyrażenia (a więc także wyrażenia

* Praca została napisana w ramach projektu sfinansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC — 2011/01/B/HS1/04029.

[1] Niniejszy artykuł nie jest więc zamierzony jako lingwistyczna analiza liczebników. Na gruncie lingwistyki dominują obecnie dwa podejścia w analizie składni, znaczenia i sposobów użycia liczebników: podejście generatywne oraz podejście na gruncie Grice'a teorii implikatur konwersacyjnych. Celem takich analiz jest opis wyłącznie właściwości lingwistycznych (syntaktycznych, semantycznych oraz pragmatycznych) liczebników w rozmaitych językach. Kiedy lingwiści mówią o strukturach głębokich fraz językowych z liczebnikami, to z punktu widzenia kognitywistycznego nie oznacza to, że lingwistyczne struktury głębokie stanowią mentalne reprezentacje przetwarzane przez umysł w aktach liczenia, przeliczania czy rozwiązywania zadań matematycznych. Przykładami lingwistycznych analiz liczebników są prace: [Rutkowski 2000], [Bultinck 2005]. Z kognitywistycznego punktu widzenia, wszelkie tak zwane głębokie struktury lingwistyczne są strukturami powierzchniowymi, jedynie skorelowanymi z kognitywnymi reprezentacjami, przetwarzanymi w procesach poznawczych umysłu. Dodać należy, że dystynkcja na struktury głębokie i powierzchniowe została technicznie wprowadzona wyłącznie na gruncie lingwistyki generatywnej. W tym paradygmacie, strukturami głębokimi są wszelkie struktury pośrednie, generowane na mocy rozmaitych reguł generacji (syntaktycznych oraz semantycznych), które ostatecznie przekształcane są na wypowiedzi danego języka. „Jeżeli […] ostatnie uznamy za «powierzchnię» języka, to struktury, które uzyskujemy bliżej tej powierzchni […] możemy nazwać «powierzchniowymi», a te, które były generowane wcześniej — «głębokimi»” [Tałasiewicz 2006, s. 136]. Innymi słowy, w pracy przyjmuje się założenie, zgodnie z którym reprezentacje poznawcze umysłu są jakoś skorelowane,

cyfrowe) służące umysłowi do odnoszenia się do liczb jako wartości rozmaitych wielkości lub do liczności rozmaitych zbiorów. Czynności posługiwania się liczebnikami można określić jako akty referencji liczebnikowej. Umysł je wykonuje podczas liczenia i przeliczania elementów rozmaitych zbiorów, oszacowywania liczności zbiorów, porównywania tych liczności, oszacowywania wartości liczbowych rozmaitych wielkości oraz ich porównywania. Podstawowy problem niniejszej pracy można więc wyrazić następująco: Jakie procesy kognitywne zachodzą w umyśle wykonującym rozmaite akty referencji liczebnikowej (czynności odnoszenia się do obiektów liczbowych za pośrednictwem liczebników)?

Na gruncie rozmaitych modeli przetwarzania liczebników[2] rozróżnia się dwa moduły organizujące mechanizmy regulujące przebiegi tych procesów. Pierwszym z nich jest moduł cyfrowy, drugim zaś — moduł liczebników werbalnych. Przy czym zakłada się, że oba moduły równocześnie funkcjonują w procesie odnoszenia się umysłu do liczb lub liczności. Pierwszą fazą procesu ujęcia liczebnika jest percepcja określonego bodźca językowego (wyrażenia liczebnikowego zwykle w postaci graficznej lub dźwiękowej), na mocy której umysł aktywuje określone reprezentacje liczebnikowe składające się na moduły: cyfrowy lub liczebników werbalnych. Na mocy określonych mechanizmów syntaktycznego przetwarzania tych reprezentacji, umysł następnie aktywuje reprezentacje semantyczne określonych rodzajów, skorelowane poprzez relacje semantyczne z liczbami oraz licznościami.[3]

na mocy określonego mechanizmu, z reprezentacjami lingwistycznymi. Taki mechanizm umożliwia tworzenie rozmaitych systemów artykulacji językowej reprezentacji poznawczych (na przykład, umożliwia tworzenie rozmaitych sposobów zapisu rachunków logicznych, matematycznych, chemicznych, genetycznych i innych). Struktury głębokie lingwistów można by określić jako mechanizm komunikowania przez umysł zakodowanych w nim reprezentacji poznawczych. Na gruncie kognitywistyki dotychczas nie skonstruowano teorii opisującej struktury gramatyczne reprezentacji mentalnych liczebników.

[2] Arytmetycy kognitywni odróżniają dwa systemy kognitywne uwikłane w rozmaite praktyki matematyczne. Pierwszym z nich jest system przetwarzania liczby („number-processing system"), drugim zaś jest system obliczeniowy („calculation system"). Pierwszy z systemów obejmuje mechanizmy ujmowania i produkowania wyrażeń liczebnikowych, podczas gdy drugi jest odpowiedzialny za wykorzystywanie wiedzy matematycznej w praktykach obliczeniowych [McCloskey, Caramazza, Basili 1985, s. 173].

[3] Skonstruowano wiele modeli przetwarzania liczebników. Pod wpływem ustaleń empirycznych [Anderson, Damasio, Damasio 1990, s. 749-766], stwierdza się, że syntaktyczny moduł cyfrowy może funkcjonować niezależnie od modułu werbalnego. Wymienieni autorzy podają przykład pacjenta, który nie był w stanie zasadniczo czytać słów i pisać liter, a radził sobie z czytaniem i pisaniem cyfr. Podstawowa kontrowersja dotycząca modeli przetwarzania liczebników sprowadza się do kwestii sposobu rozumienia relacji pomiędzy modułami: cyfrowym i werbalnym. W modelu McCloskey'a przyjmuje się, że nie istnieje bezpośredni, asemantyczny mechanizm translacji cyfr na liczebniki werbalne. Taki przekład umysł przeprowadza dopiero za pośrednictwem reprezentacji semantycznych. Badacze ci powołują się na liczne przypadki funkcjonowania pacjentów przetwarzających cyfry (pisemnie) bez umiejętności „łatwego" przetwarzania liczebników werbalnych i *vice versa* [McCloskey, Caramazza, Basili 1985]. Z kolei inny model zakłada asemantyczną relację trans-

Ponieważ proces ujmowania liczebników jest procesem złożonym, obejmującym dwie fazy: przetwarzanie syntaktyczne oraz przetwarzanie semantyczne, model tego procesu powinien składać się z dwóch podmodeli. Pierwszy z nich powinien rekonstruować mechanizmy syntaktycznego przetwarzania reprezentacji liczebników (zarówno werbalnych, jak i cyfrowych), drugi zaś — mechanizmy przetwarzania semantycznych reprezentacji liczb lub liczności. Niniejszy artykuł jest poświęcony jedynie mechanizmom syntaktycznego przetwarzania reprezentacji liczebników.

Motywacją dla podjęcia zaprezentowanego zadania jest pewien „niby-paradoks" syntaktyczny ujawniający się na gruncie analizy powierzchniowych struktur syntaktycznych cyfr. Otóż, z punktu widzenia teorii gramatyki kategorialnej złożone cyfry (arabskie, rzymskie, sumeryjskie i wielu innych systemów cyfrowych) są powierzchniowo wadliwie skonstruowanymi wyrażeniami. Mimo tej „wady", ujawniającej się w warstwie powierzchniowej, są one jednak w sposób jednoznaczny rozumiane i, co więcej, stanowią obiekty językowe, którymi skutecznie umysł manipuluje, posługując się rozmaitymi algorytmami obliczeniowymi (na przykład: pisemne dodawanie, mnożenie, dzielenie). Wyjaśnienie tego faktu jest możliwe wówczas, gdy przyjmie się koncepcję dwoistej struktury cyfry, zgodnie z którą każda cyfra posiada syntaktyczną strukturę głęboką transformowaną — na mocy określonego mechanizmu lingwistycznego — w wypowiedzeniowych aktach referencji liczebnikowej na strukturę powierzchniową stanowiącą jedynie rządek znaków cyfrowych.

Analizy prezentowane w niniejszej pracy podpadają pod ogólny paradygmat kognitywizmu, na który składają się, między innymi, następujące założenia: (i) czynności wypowiedzeniowe wszelkich typów są ewokowane przez umysł na mocy mechanizmu aktywacji określonych reprezentacji mentalnych; (ii) reprezentacje mentalne jako „zapisy informacyjne" w ludzkim mózgu są syntetyzowane, kodowane, aktywowane i dezaktywowane w umyśle rozumianym jako mechanizm generowania wymienionych procesów; (iii) reprezentacje mentalne, będąc „zapisami" w mózgu, posiadają swoje struktury gramatyczne, zwane w pracy *strukturami głębokimi*. Stąd, ilekroć w pracy będzie mowa o strukturach głębokich liczebników (w szczególności cyfr), tylekroć będzie się miało na myśli struktury głębokie reprezentacji mentalnych skorelowanych z liczebnikami używanymi w aktach referencji liczebnikowej.

W pierwszej sekcji jest zaprezentowany „niby-paradoks" struktury powierzchniowej cyfry wraz z opisem powierzchniowych struktur liczebników. Druga sekcja jest poświęcona analizie syntaktycznej struktur głębokich reprezentacji mentalnych liczebników na gruncie gramatyki kategorialnej. Jej wynikiem jest wniosek, zgodnie

---

kodowania pomiędzy reprezentacjami cyfrowymi a reprezentacjami leksykalnymi [Noel, Seron 1993]. Dehaene z kolei przyjmuje istnienie trzech modułów uczestniczących w procesach myślenia numerycznego: moduł reprezentacji cyfrowych, moduł reprezentacji leksykalnych oraz analogowa, semantyczna mentalna linia liczności. Umysł w zależności od zadania matematycznego wybiera któryś z modułów wyznaczających sposoby przetwarzania informacji matematycznej [Dehaene, Akhavein, 1995]. Zob. na temat stopnia weryfikacji eksperymentalnej wymienionych modeli w [Fias, Brysbaert, Geypens, D'Ydewalle 1996].

z którym struktury głębokie liczebników są zapisane przy pomocy specyficznych funktorów odzwierciedlających cechę określaną jako „pozycyjność zapisu cyfrowego”. Trzeci paragraf dotyczy odpowiedzi na pytanie: w jaki sposób należy analizować liczebniki na gruncie gramatyki kategorialnej? Następnie, w czwartej sekcji zostaną wyszczególnione podstawowe, mentalne mechanizmy przetwarzania reprezentacji liczebników z uwagi na ich struktury głębokie. Wyniki uzyskane w artykule mają charakter niesformalizowany. Stanowić one mają „intuicyjną podstawę” pod skonstruowanie formalnej teorii składni liczebników (praca na ten temat ukaże się jako część druga niniejszego artykułu).[4]

1. „PARADOKS” STRUKTURY POWIERZCHNIOWEJ CYFRY

Zgodnie z teorią gramatyk kategorialnych, każde złożone wyrażenie jest zbudowane z wyrażeń prostych oraz odpowiedniego funktora.[5] Cyfra „333” jest jednak sekwencją wyłącznie wyrażeń prostych, mianowicie — potrójną sekwencją cyfry „3”. W zapisie „333” nie występuje więc w sposób eksplicytny żadne wyrażenie funktorowe. Zatem cyfra „333”, tak jak każda złożona cyfra, jest — z punktu widzenia koncepcji Ajdukiewicza — powierzchniowo wadliwie skonstruowanym wyrażeniem, gdyż nie występuje w niej żaden funktor. Co więcej, cyfra „3” na każdym miejscu swojego występowania w złożonej cyfrze „333” posiada odmienne znaczenie. Otóż, „3” na pierwszej pozycji od lewej strony w zapisie „333” oznacza czwartą liczbę na osi setek (liczoną od zera); środkowe „3” w cyfrze „333” oznacza czwartą liczbę na osi dziesiątek i w końcu „3” na skrajnej prawej pozycji odnosi do liczby trzy na osi jedności. Jeśli więc cyfra „333” jest potrójną konkatenacją cyfry „3”, to w tym kontekście cyfra „3” jest użyta każdorazowo w odmiennym znaczeniu. Stąd, w wyrażeniu „333” jego składniki generują ekwiwokację. Z percepcyjnego punktu widzenia, języki cyfr kwestionują więc zasadę funktorowości.

Jeśli jednak przyjmie się filozoficzne założenie, iż zasada funktorowości obowiązuje w każdym języku, że funktorowość stanowi fundamentalną własność każdego języka, to wówczas języki cyfrowe — o ile mają być klasyfikowane jako języki — muszą manifestować tę zasadę w radykalnie odmienny sposób, niż czynią to języki naturalne. Funktorowość jako cecha języka w sensie logicznym może być kwestionowana na gruncie sporu wokół tezy Ramseya głoszącej to, że nie istnieją żadne logiczne racje na rzecz odróżniania podmiotu i predykatu w zdaniu w sensie logicznym.[6] Jeśli bowiem predykat jest funktorem, a podmiot jest nazwą, to nie istnieją

[4] Narzędziem modelującym składnię liczebników jest struktura opisywana przez arytmetykę indeksowanych liczb naturalnych [Krysztofiak 2008, Krysztofiak 2010, Krysztofiak 2011].

[5] Jest to zasada funktorowości, która została sformułowana przez Ajdukiewicza w pracy „O spójności syntaktycznej” [Ajdukiewicz 1935/1985, s. 226].

[6] Postawienie przez Ramseya problemu logicznego kryterium odróżnienia podmiotu od predykatu w zdaniu w sensie logicznym było motywowane znalezieniem logicznego kryterium demarka-

również — akceptując tezę Ramseya — żadne logiczne racje na rzecz odróżniania nazw od funktorów. Według tej koncepcji, to, że pewne wyrażenia są określane jako podmioty (nazwy), a inne jako predykaty (funktory), zależy od metajęzykowych konwencji. Wyrażenia cyfrowe mogłyby więc być ujęte jako wzorcowy przykład czysto konkatenacyjnie złożonych wyrażeń, do których nie stosuje się zasada funktorowości. W obronie zasady funktorowości jako powszechnego pryncypium konstrukcji języków można by jednak przywołać koncepcję, zgodnie z którą funktory występujące w wyrażeniach złożonych wcale nie muszą posiadać postaci prozodycznej.[7] Takie języki, w których zdania w warstwie prozodycznej stanowią wyłącznie konkatenacje nazw, a funktory mają „ukryty", nieprozodyczny charakter, są niekiedy nazywane w literaturze przedmiotu językami typu *Jumblese*. W tych językach predykaty (funktory) nie są artykułowane prozodycznie (za pomocą słów-napisów); stanowią one wyłącznie przestrzenną aranżację nazw-napisów. Różnice w przestrzennym ułożeniu nazw mają manifestować różne ich sposoby konfiguracji. Te rozmaite sposoby konfiguracji w językach typu *Jumblese*, są właśnie funktorami (predykatami) działającymi na nazwy. Dlatego też nie da się podać przykładu funktora-napisu w takich językach.[8] Czy języki cyfrowe są wobec tego językami typu *Jumblese*?

Cyfry są rozumiane w sposób jednoznaczny przez użytkowników języka manifestujących elementarną kompetencję matematyczną. Przejawia się to w tym, że potra-

cji pomiędzy partykulariami i uniwersaliami [Ramsey 1925/1950]. Teza Ramseya jest przede wszystkim krytykowana przez zwolenników tezy Geacha-Strawsona (odwołujących się do św. Tomasza z Akwinu i Fregego), zgodnie z którą istnieją logiczne racje na rzecz odróżnienia podmiotu i predykatu w zdaniu w sensie logicznym. Na temat tej kontrowersji, zob. [Clarke 1983], [Bradley 1986], [Krysztofiak 1995], [Paśniczek 2007].

[7] Można by wówczas tezę Ramseya obejść następująco: Wszystkie leksemy (zapisywalne słowa) danego języka nie posiadają pozakontekstowej kategorii składniowej. Dopiero w trakcie recepcji określonej sekwencji słów umysł przyporządkowuje jej określoną, funktorowo-argumentową formę składniową. W ten sposób można by, na przykład, wyjaśnić zjawisko chwiejności kategorialnej słów występujących w różnych kontekstach jako efekt narzucania na konteksty różnych form funktorowo-argumentowych.

[8] Przykład takiego języka, skonstruowanego dla celów interpretacji Wittgensteinowskiej semantyki z *Traktatu*, można znaleźć w pracy [Sellars 1962]. Takie języki mogą być zorganizowane przestrzennie w płaszczyźnie (a więc w kierunkach: poziomym i pionowym). Uzupełniając uwagi Sellarsa, warto zauważyć, że przyjęcie kątowego sposobu organizowania nazw w płaszczyźnie zasadniczo wyznacza nieskończoną ilość predykatów konfigurujących nazwy w zdania. Wprowadzenie dodatkowego parametru, jakim jest kierunek obrotu kątowego, znacząco zwiększa potencjał produkcyjny zdań w językach typu *Jumblese*. Warto dodać, że sam Ajdukiewicz wydaje się nie wykluczać tego typu języków. Ajdukiewicz w [Ajdukiewicz 1960] eksplikuje pojęcie operatora w kontekście złożonym bez użycia pojęcia występowania wyrażenia w wyrażeniu złożonym. Używa pojęcia rozkładu wyrażenia złożonego na wyrażenia składowe. Nie wiadomo więc czy w wyniku rozkładu wyrażenia złożonego zawsze uzyskuje się sekwencję zapisywalnych leksemów. Czasami jednak Ajdukiewicz wyraża się tak, jakby operator w wyrażeniu złożonym był jego fizycznym członem (s. 76). Z pewnością twórca gramatyki kategorialnej w sposób eksplicytny nie podejmował w swoich badaniach problematyki struktury składniowej wyrażeń w językach typu *Jumblese*.

fią oni skutecznie nimi operować, zgodnie z rozmaitymi algorytmami obliczeniowymi. Jeśli dane wyrażenie jest wadliwe syntaktycznie lub semantycznie, to użycie tego wyrażenia w logicznych czynnościach przetwarzania informacji jest nieskuteczne poznawczo.[9] Zatem gdyby cyfry były wadliwie skonstruowanymi wyrażeniami, to ich użycie w algorytmach obliczeniowych powinno generować błędy. Tak jednak nie jest. Wyłania się więc następujący problem: W jaki sposób umysł ujmuje cyfry tak, że udaje mu się efektywnie, rekurencyjnie operować nimi przy rozwiązywaniu rozmaitych zadań obliczeniowych? Na to pytanie można szkicowo odpowiedzieć w następujący sposób: Umysł poprzez percepcyjne uchwycenie warstwy powierzchniowej cyfry narzuca na nią w aktach referencji numerycznej również formę funktorowo-argumentową, odwzorowującą strukturę reprezentacji cyfry zakodowanej w umyśle. Na gruncie takiej hipotezy, języki cyfrowe są więc językami typu: *Jumblese*.

Gramatyczne rekonstrukcje struktur głębokich liczebników powinny więc uwzględniać zasadę funktorowości rządzącą ich konstruowaniem[10] oraz wyjaśniać faktyczne sposoby użycia liczebników. Takie wyjaśnienia presuponują istnienie relacji transformowalności struktur głębokich na struktury powierzchniowe liczebników. Jest to relacja jedno-wieloznaczna, która przyporządkowuje jednej strukturze głębokiej wiele rozmaitych struktur powierzchniowych, gdyż wiele cyfr można czytać na rozmaite sposoby (na przykład, cyfrę „1000000” można czytać jako: *milion* lub *tysiąc tysięcy*). Wśród struktur powierzchniowych liczebników należy odróżnić dwa typy: struktury powierzchniowe cyfr oraz struktury powierzchniowe liczebników w sensie werbalnym. Wskazana dystynkcja różnicuje więc relację transformowalności także na dwa typy. Mimo tych różnic, oba typy struktur powierzchniowych liczebników wyznaczają, poprzez konwers relacji transformowalności, struktury głębokie reprezentacji formatowanych według tych samych reguł. Innymi słowy, struktury głębokie liczebników w sensie werbalnym nie różnią się od struktur głębokich liczebników cyfrowych z uwagi na syntaktyczny mechanizm formatowania ich reprezentacji mentalnych.[11] Tę hipotezę potwierdza fakt wzajemnej przekładalności

[9] Należy odróżniać pojęcia: skuteczności poznawczej oraz skuteczności komunikacyjnej wypowiedzi. Niespójność gramatyczna zwykle nie wywołuje efektu nieskuteczności komunikacyjnej. Użytkownicy języka wypowiadając się, na ogół łamią zasady gramatyczne, a mimo to skutecznie wyrażają swoje intencje językowe. W dyskursie naukowym (zmatematyzowanym) nie da się jednak skutecznie przeprowadzać dowodów, łamiąc, na przykład, zasady zapisu formuł logicznych, matematycznych czy też chemicznych.

[10] Zgodnie z tą zasadą, każde wyrażenie złożone składa się z funktora (części głównej) oraz jego argumentów (części uzupełniających). Przy czym związek pomiędzy funktorem i jego argumentami jest związkiem funkcyjnym [Buszkowski, 1989, s. 20]. Na temat trzech poziomów analizy zasady funktorowości, zob. [Tałasiewicz, 2006, s. 24-31].

[11] Pojęcie formatu reprezentacji liczbowych jest użyte w [Carey 2009]. Autorka nie definiuje jednak tej kategorii teoretycznej. Przez format reprezentacji poznawczej zakodowanej w umyśle należy rozumieć jej strukturę składniową. Reprezentacje posiadając charakter symboliczny, skonstruowane są wedle reguł pewnej gramatyki. Z kolei przez formatowanie reprezentacji zakodowanych w umyśle należy rozumieć procesy syntezy gramatycznej struktur tych reprezentacji. Określe-

cyfr na liczebniki w sensie werbalnym i *vice versa*. To, że cyfry są przekładalne na liczebniki w sensie werbalnym jest możliwe dzięki temu, że odpowiadające im reprezentacje mentalne o określonych strukturach gramatycznych (głębokich) są sformatowane na gruncie tej samej gramatyki.

W wielu językach etnicznych niektóre złożone wyrażenia liczebnikowe w sensie werbalnym (zwykle fonetycznym) są budowane z podstawowych liczebnikowych tematów słowotwórczych oraz rozmaitych, w zależności od języka, gramatyczno-fonetycznych struktur preinsufiksalnych (prefiksów, sufiksów, infiksów), które w świetle gramatyki kategorialnej można traktować jako funktory. W języku azteckim, na przykład, kolejne liczebniki: „11”, …, „19” są konstruowane wedle zasady: 10-infiks-1, 10-infiks-2, itd. Ponieważ liczba 10 jest oznaczana słowem *matlactli*, liczby zaś: 1, 2, odpowiednio: *ce*, *ome*, liczebniki: „11” i „12” mają postać: *matlactli-on-ce*, *matlactli-on-ome* (Ifrah 2006, s. 124). W niektórych językach afrykańskich również jest spotykane zjawisko funktorowego tworzenia złożonych wyrażeń liczebnikowych w sensie werbalnym. Na przykład, w języku Jebu liczebnik „30” posiada kształt: *ohu na iri*, gdzie *ohu* jest liczebnikiem oznaczającym liczbę 20, *iri* zaś — liczbę 10, natomiast *na* funkcjonuje jako wyrażenie nieliczebnikowe. W tym języku liczebnik „200” jest dla odmiany konstruowany czysto konkatenacyjnie: *ohu iri* (Ifrah 2006, s. 125). W językach celtyckich również używa się wyrażeń nieliczebnikowych do tworzenia złożonych wyrażeń liczebnikowych. Walijski liczebnik 12 jest skonstruowany według schematu: 2 + 10 (*dou ar dec*), gdzie *ar* jest wyrażeniem nieliczebnikowym (Ifrah 2006, s. 130, s. 112-113). Sufiksalne konstrukcje typu: *trzy-dzieś-ci*, *four-ty*, *quar-ante* itd., można potraktować jako konstrukcje funktorowe: *ci* to morfem wiążący dwa tematy słowotwórcze: *trzy* oraz *dzieś*. Istnieją też języki, na przykład mongolski, w których zjawisko zleksykalizowanej funktorowości jest fragmentaryczne w konstrukcjach liczebnikowych (Ifrah 2006, s. 101-102). Uogólniając, w językach naturalnych występują zarówno jawnie funktorowe, jak i jawnie niefunktorowe konstrukcje liczebników w sensie werbalnym.

Opisany fakt kontrastuje z „powierzchniowymi” sposobami konstrukcji cyfr na gruncie rozmaitych systemów zapisu cyfr. Większość, a być może nawet wszystkie, sposoby pisemnego zapisu cyfr gwałcą tę zasadę jawnej funktorowości.[12] Przegląd historycznie danych sposobów zapisywania cyfr pokazuje, że we wszystkich rozpoznanych systemach cyfry złożone stanowią konkatenacje wyłącznie cyfr elementarnych. Struktura powierzchniowa cyfry ujawnia się jako liniowa konkatenacja cyfr elementarnych. Przy czym, na gruncie rozmaitych systemów zapisu cyfr, te liniowe konkatenacje posiadają swoje zwroty z uwagi na typ nastawienia, w ramach którego

---

nie mechanizmu formatowania danej reprezentacji sprowadza się więc do podania reguł gramatycznych, na mocy których dana reprezentacja o określonej strukturze jest przez umysł syntetyzowana.

[12] Zgodnie z zasadą jawnej funktorowości, w każdym wyrażeniu złożonym występuje eksplicytnie co najmniej jedno wyrażenie będące funktorem. Zasada jawnej funktorowości narzuca więc na funktory prozodyczność; zgodnie z nią wyrażenia złożone nie przejawiają struktur typu: *Jumblese*.

cyfra jest ujmowana. Umysł może inaczej ujmować cyfry w akcie referencji liczebnikowej (podczas czytania lub zapisywania cyfr w celu odniesienia się do obiektu liczbowego), niż wówczas kiedy przeprowadza operacje obliczeniowe, stosując rozmaite algorytmy. Stąd należy odróżniać: ujęcie cyfry w ramach nastawienia wypowiedzeniowego oraz ujęcie cyfry w ramach nastawienia obliczeniowego. Z pierwszym ujęciem skorelowany jest zwrot wypowiedzeniowy cyfry, z drugim zaś — zwrot operacyjny cyfry. Każda cyfra posiada zwrot wypowiedzeniowy zgodny z kierunkiem czytania w systemie językowym, na którego liczebniki w sensie werbalnym jest przekładana. Na przykład, cyfry arabskie w językach indoeuropejskich są czytane od strony lewej do prawej. Natomiast cyfry arabskie na gruncie języka arabskiego posiadają zwrot od strony prawej do lewej. W języku japońskim zwrot cyfr wyznacza oś pionowa od góry do dołu. Z kolei zwrot operacyjny jest wyznaczony poprzez sposób wykonywania działań na cyfrach według algorytmów obliczeniowych skorelowanych z danym sposobem zapisu cyfrowego. W systemie arabskim pisemne działania na cyfrach są dokonywane od strony prawej do lewej. W języku arabskim oba zwroty cyfry są więc nierozróżnialne. Natomiast we współczesnych językach indoeuropejskich zwrot obliczeniowy cyfry: z prawej na lewo, jest różny od jej zwrotu wypowiedzeniowego: z lewej na prawo. W strukturze powierzchniowej cyfry na gruncie dowolnego systemu zapisu można więc wyróżnić trzy poziomy konstrukcyjne cyfry: (i) poziom elementarnych leksemów, z których cyfra jest zbudowana (niekiedy pauza międzycyfrowa jest również traktowana jako leksem[13]), (ii) liniowy kierunek konkatenacyjny, (iii) poziom zwrotów: wypowiedzeniowego oraz obliczeniowego.[14] Na żadnym z wymienionych poziomów nie występują wyrażenia niecyfrowe, które można by interpretować kategorialnie jako funktory tworzące złożone cyfry z elementarnych cyfr.

Ponieważ kompetentny umysł ludzki jest w stanie dokonywać obustronnych przekładów cyfr i liczebników w sensie werbalnym oraz skoro te pierwsze w kontra-

---

[13] Na przykład, w klinowym, sumeryjskim systemie zapisu cyfr używano pauzy (Ifrah 2006, s. 261-262).

[14] Waga problematyki dotyczącej zwrotu struktury liniowej konkatenacyjnego porządku cyfr w cyfrze złożonej ujawnia się w kontekście dyskusji nad interpretacją eksperymentów typu *snarc*. Jednym z typów efektu *snarc* jest zjawisko, zaobserwowane wśród Europejczyków, polegające na tym, że podmiot badany relatywnie szybciej reaguje na pokazywane mu po prawej stronie ekranu komputera cyfry większe niż wówczas kiedy pokazywane są mu po lewej stronie ekranu komputera; a także — iż reaguje relatywnie szybciej na pokazywane mu po lewej stronie ekranu komputera cyfry mniejsze, niż wówczas kiedy są one mu pokazywane po prawej stronie komputera. Wielu badaczy (w szczególności Dehaene) uważa, że wyniki tych eksperymentów potwierdzają istnienie w umyśle tak zwanej mentalnej linii liczb naturalnych, charakteryzującej się logarytmiczną skalą oraz zorientowanej przestrzennie od strony lewej do prawej. Inni zwracają uwagę na fakt, że rozmaitość efektów *snarc* jest funkcją rozmaitości geometrycznych orientacji czytania i pisania skorelowanych z językami etnicznymi. Wskazuje się na fakt, że w wypadku badania eksperymentalnego analfabetów efekt *snarc* nie pojawia się [Zebian 2005]. Na temat rozmaitych interpretacji eksperymentów *snarc*, zob. [Rips et al. 2008].

ście do tych drugich nie są skonstruowane zgodnie z zasadą jawnej funktorowości, to wcześniej przyjęta hipoteza, że struktury głębokie reprezentacji mentalnych zarówno cyfr, jak i liczebników w sensie werbalnym, formatowanych według tego samego systemu reguł gramatycznych, umożliwiają mentalne procesy obustronnego przekładania liczebników, nabiera wyrazistego potwierdzenia. Otóż, skoro bowiem czynności przekładania cyfr na liczebniki słowne charakteryzują się systematycznością[15], to wówczas umysł musi cyfrowym strukturom powierzchniowym, skonstruowanym w sposób jawnie niefunktorowy, przyporządkowywać struktury powierzchniowe skonstruowane w wielu językach etnicznych zgodnie z zasadą jawnej funktorowości. Jeśli struktury powierzchniowe liczebników w sensie werbalnym posiadają w wielu językach charakter jawnie funktorowy, to ich struktury głębokie powinny być również interpretowane jako struktury gramatyczne reprezentacji mentalnych sformatowanych zgodnie z zasadą funktorowości. Jeśli przyjmie się, że w procesach przekładu cyfr na liczebniki słowne, umysł najpierw przekłada strukturę głęboką cyfry na strukturę głęboką liczebnika słownego, to skoro ta druga jest strukturą gramatyczną reprezentacji sformatowanej zgodnie z zasadami funktorowości, to pierwsza również powinna być strukturą gramatyczną reprezentacji sformatowanej zgodnie z zasadami funktorowości. Stąd, przyjęcie hipotezy, iż struktury głębokie zarówno cyfr, jak i liczebników są strukturami gramatycznymi reprezentacji sformatowanych według reguł tej samej gramatyki, wydaje się zasadne. Gdyby bowiem w strukturach głębokich cyfr nie występowały funktory, to trudno byłoby wyjaśnić fakt, że pewne odpowiedniki w strukturach głębokich elementarnych leksemów cyfrowych są przekładane na niefunktorowe leksemy liczebnikowe (w sensie werbalnym), a inne — są przekładane na funktory uczestniczące w generacji złożonych liczebników słownych. Nadto, wysoki stopień systematyczności tych przekładów może być wyjaśniony właśnie przez odwołanie się do maksymalnej systematyczności relacji przekładalności zachodzącej pomiędzy strukturami głębokimi cyfr oraz strukturami głębokimi liczebników słownych. Operacje wzajemnego przekładu tych struktur stanowiłyby endomorfizmy w uniwersum struktur głębokich, wyznaczonym przez gramatykę formatowania reprezentacji mentalnych liczebników. Takie endomorfizmy byłyby wówczas wyznaczone przez prawa ustalające równoważność denotacyjną struktur głębo-

[15] Przekład wyrażeń danego języka na wyrażenia innego języka ma charakter systematyczny wtedy, gdy istnieją kryteria błędu przekładu dla większości przekładanych kontekstów. Określenie takie narzuca stopniowalność na cechę systematyczności przekładu. Przekłady są więc mniej lub bardziej systematyczne. Na przykład, przekłady języków sformalizowanych na inne języki sformalizowane są maksymalnie systematyczne, gdyż dla każdego przekładanego kontekstu istnieją rekurencyjne kryteria błędu. Przekładami systematycznymi w stopniu śladowym są, na przykład, przekłady poezji z jednego języka etnicznego na drugi język etniczny. W tym wypadku trudno jest stosować kategorie błędu w przekładzie. Trudno jest zasadnie stwierdzić, że przekłady twórczości Szekspira na język polski dokonane przez W. Bogusławskiego są błędne, przekłady zaś S. Barańczaka nie manifestują błędów translatorskich. Stąd też przekłady maksymalnie systematyczne będą wykonywane przez umysł, o ile nie popełnia on błędu, zawsze w ten sam sposób (czyli systematycznie).

kich liczebników. W takiej perspektywie można by, na przykład, wyjaśnić to, iż w pewnych kontekstach użycia cyfr, przekład cyfry „200” na liczebnik: *sto i jeszcze raz sto*, jest dopuszczalny, gdyż struktura głęboka reprezentacji mentalnej cyfry „200” jest równoważna denotacyjnie strukturze głębokiej reprezentacji mentalnej liczebnika: *sto i jeszcze raz sto*.

2. STRUKTURY GŁĘBOKIE CYFR

Każdy system zapisu cyfrowego można ująć jako operujący cyframi elementarnymi oraz leksemami nieposiadającymi charakteru fizycznego (niebędącymi napisami ani dźwiękami). Wówczas funktory, które tworzą złożone cyfry z cyfr elementarnych, można traktować jako należące do kategorii wyrażeń językowych, niedających się w żaden sposób zapisać w postaci znaków graficznych o określonym kształcie ani wypowiedzieć w postaci dźwięków. Na gruncie takiego założenia, struktury głębokie cyfr są ukonstytuowane z dwóch różnych typów leksemów: zapisywalnych oraz niezapisywalnych.

Leksemami niezapisywalnymi w strukturach głębokich cyfr są pozycje występowania cyfr elementarnych w rządkach cyfrowych. Pozycje występowania cyfr w dowolnym rządku cyfrowym determinują ich znaczenia; spełniają więc one funkcje semantyczne (dlatego są leksemami, czyli jednostkami znaczącymi w sensie Lyonsa[16]). W „33” cyfra na pierwszej pozycji posiada odmienne znaczenie od tej samej cyfry występującej na drugiej pozycji. Przestawienie różnych cyfr w dowolnym rządku cyfrowym zmienia znaczenie cyfry złożonej. Liczebniki „34” oraz „43”, różniące się między sobą wyłącznie sposobami przyporządkowania tych samych leksemów cyfrowych określonym pozycjom cyfrowym, posiadają odmienne znaczenia. Sytuacja ta kontrastuje z tym, że na gruncie wielu języków naturalnych zmiana szyku wyrażeń w wyrażeniu złożonym nie zmienia jego znaczenia. Na przykład, wypowiedź *Jan kocha Marię* jest zasadniczo tak samo rozumiana, jak wypowiedź *Marię Jan kocha*. Leksem *kochać* w obu wypowiedziach, niezależnie od pozycji występowania w sekwencji wypowiedzeniowej, znaczy to samo. Wydaje się więc, że pozycje syntaktyczne w rządkach wypowiedzeniowych nie determinują, na gruncie większości języków naturalnych, znaczenia leksemów w wypowiedziach. Co najwyżej, w wielu wypadkach zmiana szyku leksemów generuje wadliwość składniową wyrażenia złożonego. Innymi słowy; pozycje syntaktyczne w rządkach wypowiedzeniowych nie mogą być traktowane jako wyrażenia wnoszące treść znaczeniową do kontekstu. W wypadku cyfr, pozycje syntaktyczne są właśnie nośnikami treści znaczeniowej. Zauważona właściwość cyfr jest „niebanalna”. W językach pozycyjnych zmiana szyku wyrażeń w wypowiedzi zdaniowej prowadzi w wielu wypadkach do wygenerowania nonsensu składniowego (na przykład, w wypowiedzi: *John loves Mary*,

[16] Wyrażenie jest znaczące wtedy, gdy na gruncie danego systemu językowego jest „zdolne do przekazywania znaczenia” [Lyons 1984, s. 83-84].

zmieniając szyk pomiędzy *John* i *loves*, otrzymujemy rządek będący nonsensem składniowym: *loves John Mary*). W wypadku języków cyfrowych (syntaktycznie podobnych do arabskiego systemu zapisu cyfr), zmiana szyku cyfr w cyfrze złożonej zasadniczo nie generuje nonsensu składniowego (jedynie w wypadku przestawienia cyfry „0" na pierwszą pozycję, z uwagi na zwrot wypowiedzeniowy, w cyfrze złożonej generuje nonsens składniowy; na przykład, z cyfry „102", przestawiając „1" z „0", otrzymujemy nonsensowny arytmetycznie zapis „012"). Pozycyjność cyfr jest więc odmienną własnością od pozycyjności zdaniowych wypowiedzi — ujmowanej z punktu widzenia językoznawczego — w językach pozycyjnych. Pozycje składniowe w wypowiedziach zdaniowych języków pozycyjnych stanowią znaczniki funkcji pragmatycznych, jakie leksemy, występując na odpowiednich pozycjach, mają spełniać.[17] Pozycje składniowe cyfr w cyfrach złożonych spełniają natomiast funkcje semantyczne.

Zbiór wszystkich pozycji syntaktycznych i ich porządek w strukturze głębokiej cyfry określić można jako jej plan pozycyjny. Okazuje się, że znaczenia pozycji syntaktycznych w strukturach głębokich cyfr są wyznaczane kontekstowo przez ich plany pozycyjne. Pierwsza pozycja syntaktyczna, z uwagi na zwrot wypowiedzeniowy cyfry, w dwóch różnych cyfrach nie musi posiadać tego samego znaczenia. W cyfrze „33" pozycja pierwsza (czytając cyfry od lewej do prawej strony) posiada

[17] W etnicznych językach pozycyjnych pozycje składniowe w wypowiedziach zdaniowych są przede wszystkim znacznikami spełniania przez wyrażenia funkcji referencjalnej lub predykatywnej. Na przykład, w języku angielskim funkcjonuje reguła, zgodnie z którą fraza występująca przed czasownikiem w pewnej klasie poprawnie zbudowanych wypowiedzi zdaniowych spełnia funkcję referencjalną. Nie wnikając w dyskusje lingwistyczne, w wielu koncepcjach stwierdza się (tych koncepcjach, które bazują na dystynkcjach: podmiot/orzecznik; temat/remat; grupa imienna/grupa orzeczeniowa i inne — jako określających strukturę semantyczną elementarnej wypowiedzi zdaniowej), że pozycje syntaktyczne w wypowiedzi zdaniowej w językach pozycyjnych wskazują na funkcje, jakie mają spełniać frazy występujące na danych pozycjach. W świetle takiego podejścia, zamiana pozycji wyrażeń: *John* oraz *Mary* w wypowiedzi: *John loves Mary*, nie prowadzi do generacji nonsensu składniowego, gdyż *John* oraz *Mary*, będąc rzeczownikami tego samego typu (imionami własnymi) mogą być wymieniane na pozycjach składniowych. Zmiana znaczenia wypowiedzi w tym wypadku jest wynikiem zmiany predykatu z *loves Mary* na *loves John*. W wyniku zamiany z pozycji orzecznikowej na pozycję podmiotową słowa *Mary* w analizowanym zdaniu, treść znaczeniowa słowa *Mary* nie zmienia się. Innymi słowy, treść znaczeniowa słowa *Mary* w pozycji orzecznikowej (w grupie orzeczeniowej) jest identyczna z treścią znaczeniową tego samego słowa występującego w pozycji podmiotowej (w grupie imiennej) w obu wypowiedziach. Ta identyczność wskazuje na taki fakt semantyczny, że pozycja składniowa, w której występuje dane słowo w wypowiedzi zdaniowej języka pozycyjnego, nie modyfikuje jego treści znaczeniowej. W wypadku złożonych cyfr sytuacja przedstawia się zgoła odmiennie. Pozycja występowania cyfry „2" w złożonej cyfrze modyfikuje jej treść znaczeniową. Na temat lingwistycznej teorii dystrybucji terminów z uwagi na ich aspekt referencjalny w zdaniu, por. [Karolak, 1990, s. 50-72]. Autor analizuje krytycznie koncepcję Geacha, która zasadniczo redukuje pozycyjność językową do predykatowo-argumentowej struktury zdania, a tę z kolei do referencyjno-orzeczeniowej struktury wypowiedzenia zdaniowego.

odmienne znaczenie, niż pierwsza pozycja w cyfrze „333”. W pierwszym wypadku pierwsza pozycja wskazuje na oś dziesiątek, w drugim zaś wypadku — na oś setek. To samo dotyczy pozycji drugich, trzecich itd. Jedynie ostatnie pozycje syntaktyczne — z uwagi na ich zwrot wypowiedzeniowy — w strukturach głębokich cyfr arabskich posiadają tę osobliwą własność, że ich znaczenie jest niezależne od kontekstu. Ostatnia pozycja syntaktyczna w dowolnej cyfrze arabskiej układu dziesiątkowego, niezależnie od jej konkatenacyjnej długości, zawsze wskazuje na oś jedności. Uogólniając, w strukturze głębokiej cyfry występuje jedna pozycja syntaktyczna posiadająca znaczenie niezależne od planu pozycyjnego cyfry. Jest to zawsze pierwsza pozycja — z uwagi na zwrot operacyjny — w cyfrze złożonej dowolnego systemu zapisu cyfr. W różnych jednak systemach ta wyróżniona pozycja może posiadać odmienne znaczenie. Na przykład, w zerojedynkowym systemie zapisu cyfr pozycją wyróżnioną jest pozycja oznaczająca binarną oś jedynki. W systemie trójkowym oś jedności oznaczana przez wyróżnioną pozycję różni się od osi jedności oznaczanej przez wyróżnioną pozycję w cyfrach systemu dziesiątkowego. Rekurencyjne algorytmy obliczania rozmaitych działań arytmetycznych (pisemne dodawanie lub mnożenie) dla danego systemu określają kolejność działań obliczeniowych w taki sposób, że najpierw umysł wykonuje działania na cyfrach skorelowanych z wyróżnioną pozycją (na przykład: w systemie dziesiętnym z pozycją jedności, w systemie zerojedynkowym z pozycją oznaczającą binarną oś jedynki). W każdym systemie algorytmy te różnią się; algorytm mnożenia nieco inaczej pracuje w układzie dziesiątkowym niż w układzie piątkowym.

Percepcyjne ujęcie cyfry wymaga obliczenia liczby cyfr elementarnych składających się na percypowaną, złożoną cyfrę. Operacja liczenia może kończyć się — z uwagi na zwrot wypowiedzeniowy — na ostatniej lub pierwszej cyfrze Operacja ta nie musi być jednak operacją liczenia pozycji syntaktycznych planu pozycyjnego cyfry, gdyż — jak zostanie pokazane to w następnej sekcji artykułu — liczba pozycji syntaktycznych narzucanych przez umysł na cyfrę podczas jej ujęcia nie musi pokrywać się z liczbą cyfr elementarnych składających się na daną cyfrę złożoną. Na konkatenacyjny porządek cyfr elementarnych w cyfrze złożonej umysł narzuca następnie strukturę będącą zbiorem pozycji składniowych. Ta czynność często manifestuje się behawioralnie jako czynność fiksowania przecinków lub kropek pomiędzy sub-rządkami cyfr w danej cyfrze złożonej podczas jej odczytywania. Taka struktura jest właśnie odwzorowaniem zbioru pozycji składniowych w strukturze głębokiej syntetyzowanej reprezentacji mentalnej cyfry. W przedostatniej fazie ujęcia cyfry umysł narzuca na zbiór wyodrębnionych pozycji składniowych pewną strukturę relacyjną. W wyniku tej czynności umysł syntetyzuje plan pozycyjny cyfry, który można utożsamić ze zbiorem pozycji syntaktycznych cyfry wraz z narzuconą strukturą relacyjną na te pozycje. Czynnością finalną jest wypełnienie ukonstytuowanego planu pozycyjnego cyfry określonymi zapisywalnymi leksemami cyfrowymi. Efektem tej czynności jest synteza struktury głębokiej reprezentacji mentalnej danej cyfry złożonej, poprzez którą umysł, ostatecznie, „czyta cyfrę na papierze”.

Przedstawiony szkicowo model recepcji cyfr złożonych sugeruje przyjęcie hipotezy, że w strukturze głębokiej cyfry występuje funktor planu pozycyjnego, który „jakoś" wiąże elementarne leksemy cyfrowe (wyrażenia zapisywalne) z niejawnymi funktorami pozycji składniowych w strukturę głęboką reprezentacji mentalnej danej cyfry. Odrzucenie takiego założenia uniemożliwiłoby wyjaśnienie tego, jak umysł z wielu liczebników słownych tworzy złożone liczebniki słowne, których używa w celu odniesienia się do rozmaitych obiektów liczbowych (liczności, wielkości, ilości). W złożonym liczebniku *dwieście trzydzieści cztery* poszczególne słowa są „związane" w taki sposób, że użytkownik języka rozumie je jako posiadające to samo znaczenie, jakie posiada cyfra „234". Można wyróżnić trzy pozycje składniowe w strukturach głębokich obu liczebników: pozycję *setek*, pozycję *dziesiątek* oraz pozycję *jedności*. Pozycje te są „wypełnione" elementarnymi leksemami liczebnikowymi (cyframi lub leksemami w sensie werbalnym). W ten sposób umysł syntetyzuje trzy reprezentacje: *dwie setki*, *trzy dziesiątki* oraz *cztery jedności*. Następnie musi dysponować pewnym operatorem, aby te trzy reprezentacje zunifikować w jedną strukturę głęboką reprezentacji danego liczebnika. Ten operator można właśnie skategoryzować jako funktor (operator) planu pozycyjnego cyfry (struktury głębokiej liczebnika).

Potwierdzeniem hipotezy o funkcjonowaniu funktora planu pozycyjnego w strukturach głębokich reprezentacji liczebników są fakty użycia, na gruncie wielu języków etnicznych, fraz eksplikujących znaczenie złożonych liczebników, w których obok elementarnych leksemów liczebnikowych oraz funktorów pozycji syntaktycznych, występują wyrażenia nieliczebnikowe. Nauczyciel odpowiadając uczniowi na pytanie: *Ile to jest dwieście trzydzieści cztery?* może posłużyć się taką oto konstrukcją eksplikacyjną: *Jest to: dwieście i trzydzieści i jeszcze cztery*. We frazie *dwieście i trzydzieści i jeszcze cztery*, konstrukcja: „[…] *i* […] *i jeszcze* […]" jest funktorem, którego argumentami są *dwieście*, *trzydzieści* oraz *cztery*. Odpowiednikiem funktora „[…] *i* […] *i jeszcze* […]" z warstwy powierzchniowej analizowanego liczebnika jest właśnie funktor planu pozycyjnego.[18] Tego rodzaju funktory, w zależności od zasobów gramatyczno-leksykalnych danego języka etnicznego, umysł może nawet tworzyć *ad hoc*, na użytek wyłącznie jednej procedury wyeksplikowania znaczenia złożonych liczebników. Na postawione przez dziecko pytanie można bowiem odpowiedzieć, na przykład, tak: *Masz dwieście i dodaj trzydzieści i na koniec jeszcze cztery*. Funktor „*Masz* […] *i dodaj* […] *i na koniec jeszcze* […]" spełnia tę samą funkcję co

[18] Tego rodzaju funktory występują nie tylko w konstrukcjach liczebnikowych. Na przykład, w wypowiedzi: *daję ci jabłka i gruszki i jeszcze śliwki*, użyty jest funktor „[…] *i* […] *i jeszcze* […]". Funktor ten w tym kontekście oznacza funkcję odwzorowującą trzy obiekty: porcję jabłek, porcję gruszek oraz porcję śliwek, w pewną strukturę porządkową określoną na tych obiektach. W tym wypadku, to mogłaby być struktura porządku czasowego (jabłkom, gruszkom i śliwkom umysł przyporządkowuje momenty czasowe w procesie „dawania czegoś komuś" jako pozycje składniowe tego procesu; następnie poprzez użycie analizowanego funktora porządkuje je liniowo w strukturę uporządkowanej trójki).

funktor „[…] *i* […] *i jeszcze* […]”. Model kategorialny funkcjonowania funktora planu pozycyjnego powinien być tak skonstruowany, aby stanowić narzędzie opisujące mechanizm percepcji cyfr.

Wydaje się, że percepcyjne ujęcie cyfry w nastawieniu wypowiedzeniowym jest procesem wielofazowym. Przy czym fazy te wzajemnie na siebie nachodzą; przenikają się. W pierwszej fazie umysł „liczy” ilość cyfr, z których składa się czytana cyfra. Ten akt „liczenia” może przebiegać wedle zwrotu zgodnego ze zwrotem wypowiedzeniowym lub operacyjnym na gruncie danego języka etnicznego, którym umysł operuje. Podczas aktu liczenia cyfr umysł w ich rządku wyróżnia pozycje syntaktyczne. Proces ten można nazwać syntaktycznym pozycjonowaniem cyfry. Przy czym ilość pozycji syntaktycznych nie musi być równa ilości cyfr występujących w czytanej, złożonej cyfrze. W wypadku krótkich cyfr, ilość pozycji może być identyczna z ilością cyfr występujących w danej cyfrze złożonej. W wypadku długich cyfr, ilość wyróżnionych pozycji jest mniejsza od ilości cyfr występujących w cyfrze złożonej. Co więcej, proces wyróżniania (obliczania) pozycji syntaktycznych w cyfrze jest chwiejny. W tej samej cyfrze, wystarczająco długiej, umysł przy różnych okazjach jej użycia, może wyróżniać różne ilości pozycji syntaktycznych. Na przykład, cyfrze „2245000876” umysł może przyporządkować ciągi pozycji cyfrowych według różnych schematów: (1) 2 — 245 — 000 — 8 — 7 — 6; (2) 2245 — 0 — 0 — 0 — 8 — 7 — 6. Zgodnie z pierwszym schematem, umysł przyporządkowuje analizowanej cyfrze liczebnik w sensie werbalnym o postaci: *dwa miliardy dwieście czterdzieści pięć milionów osiemset siedemdziesiąt sześć*. Z kolei zgodnie z drugim schematem, odczytana cyfra jest postaci: *dwa tysiące dwieście czterdzieści pięć milionów osiemset siedemdziesiąt sześć*. Różnice pomiędzy sposobami odczytywania tej samej cyfry złożonej wskazują właśnie na fakt chwiejności procesu pozycjonowania cyfry. W drugiej fazie umysł każdej wyodrębnionej pozycji przyporządkowuje odpowiednią treść znaczeniową. W wypadku planu pozycyjnego: 2 — 245 — 000 — 8 — 7 — 6, proces ten przebiega następująco: pozycji pierwszej (której umysł przyporządkowuje cyfrę „6”) jest przyporządkowana oś jedności, następnie pozycji dla cyfry „7” — oś dziesiątek, dla „8” — oś setek, dla „000” — oś tysięcy, dla „245” — oś milionów i w końcu dla „2” oś miliardów. W wypadku planu pozycyjnego: 2245 — 0 — 0 — 0 — 8 — 7 — 6, porządkowanie pozycji przebiega według wzoru: „6” — oś jedności, „7” — oś dziesiątek, „8” — oś setek, „0” — oś tysięcy, „0” — oś dziesiątek tysięcy, „0” — oś setek tysięcy, „2245” — oś milionów. W fazie tej umysł syntetyzuje funktory pozycji składniowych. Proces ten można nazwać semantycznym pozycjonowaniem cyfry. Wydaje się, że zarówno syntaktyczne, jak i semantyczne pozycjonowanie cyfry wzajemnie się przenikają w akcie ujmowania cyfry.[19]

[19] W badaniach eksperymentalnych nad procesami posługiwania się liczebnikami przez umysł bada się tak zwane (ściśle) asemantyczne sposoby użycia cyfr lub liczebników. Niektórzy badacze próbują eksperymentalnie wykazać, że nawet w zadaniach niewymagających semantycznego przetwarzania cyfr umysł „wiąże” z nimi semantyczną informację. Innymi słowy, próbuje się wykazać

W trzeciej fazie, na wyróżnione i zinterpretowane pozycje składniowe umysł narzuca porządek w taki sposób, że wszystkie one stanowią składniki jednej struktury, zwanej planem pozycyjnym cyfry. Unifikacja wszystkich funktorów pozycji składniowych warunkuje to, że daną cyfrę złożoną umysł postrzega jako jedną cyfrę; a nie kilka cyfr.[20] Tę fazę można określić jako proces syntezy planu pozycyjnego cyfry. Warunkiem efektywnej syntezy planu pozycyjnego cyfry jest wyodrębnienie pozycji wyróżnionej na gruncie danego systemu zapisu cyfr. Umysł bowiem przeprowadzając rozmaite operacje na strukturach głębokich liczebników, rozpoczyna je właśnie od pozycji wyróżnionej. W ostatniej fazie umysł odczytuje cyfrę. Ta czynność wraz z jednoczesnym wykonaniem aktu referencji liczebnikowej przebiega według mechanizmu „nasycenia" wszystkich pozycji w planie pozycyjnym cyfry konkretnymi zapisywalnymi leksemami. Innymi słowy, umysł „umieszcza na pozycjach w planie pozycyjnym" poszczególne liczebniki. Przy czym w wypadku liczebników w sensie werbalnym, nie każdej pozycji umysł musi przyporządkować jakiś liczebnik. Tam gdzie w zapisie cyfrowym występuje zero, w zapisie werbalnym — na gruncie wielu języków etnicznych — nie musi występować żaden liczebnik.

Podsumowując, percepcja cyfr wymaga aktywacji oraz syntezy w umyśle określonych reprezentacji mentalnych. Umysł więc najpierw musi opanować alfabet danego systemu zapisu cyfr zarówno w postaci dźwiękowej, jak i graficznej. W wyniku

---

to, że nie istnieją asemantyczne sposoby ujęcia ani cyfr, ani liczebników werbalnych. Na przykład, w pracy (Dehaene, Akhavein 1995) jej autorzy próbują wykazać, że aktywacja semantycznej reprezentacji (mentalnej analogowej linii liczb) w trakcie użycia cyfr oraz liczebników jest „obligatoryjna". W pracy (Fias 2001) z kolei próbuje się wykazać to, że możliwe jest asemantyczne przetwarzanie werbalnych liczebników; ta cecha ma, między innymi, odróżniać je od cyfr arabskich. Z kolei Ito oraz Hatta próbują wykazać, że cyfry w systemie zapisu Kana mogą być asemantycznie przetwarzane (Ito, Hatta 2003). Wydaje się, że „semantyczność użycia" cyfr jest cechą stopniowalną. Należy odróżniać sposoby użycia cyfr w twardym semantycznie znaczeniu (kiedy przy pomocy cyfry oznaczamy ustaloną wartość semantyczną: liczbę, liczność, wielkość) od sposobów ich użycia w „słabszym" semantycznie znaczeniu (kiedy cyfra stanowi jedynie część cyfry złożonej użytej w funkcji oznaczania), a także od „śladowo semantycznych" sposobów użycia (kiedy liczymy ilość trójek w jakiejś bardzo długiej cyfrze, wówczas intencjonalnie nie odnosimy się do wielkości oznaczanych przez kolejne cyfry; czy też wówczas, kiedy podajemy komuś numer konta), czy od ściśle asemantycznych sposobów ich użycia (kwestia znalezienia przykładów pozostaje otwarta). Z punktu widzenia skonstruowanego modelu percepcji cyfr, dopuszcza się możliwość posługiwania się cyframi w funkcji nieliczebnikowej. W umyśle proces pozycjonowania semantycznego cyfry wówczas nie przebiega. W związku z tym umysł nie dokonuje żadnego aktu referencji liczebnikowej.

[20] Uczenie się na pamięć rozmaitych kodów cyfrowych (numerów telefonu, numerów pocztowych, kodów dostępu do stron internetowych) jest przykładem procesów mentalnych, w których umysł, percypując złożony kod cyfrowy, rozdziela go na części. Na przykład, kod cyfrowy oznaczający numer czyjegoś telefonu: „601586243", może być zapamiętany jako: *sześćset jeden pięćset osiemdziesiąt sześć dwieście czterdzieści trzy*. Takie użycie cyfr jest ich nieliczebnikowym użyciem, gdyż ujmując wymieniony rządek cyfr, umysł nie syntetyzuje planu pozycyjnego cyfry złożonej. Nie traktuje tego rządku jako jednej cyfry, lecz jako, na przykład, trzy cyfry. Dlatego też należy odróżniać kody cyfrowe (rządki cyfr używane nieliczebnikowo) od cyfr (jako liczebników).

tego procesu akwizycji kodowane są w umyśle reprezentacje leksykalne cyfr elementarnych oraz elementarnych leksemów liczebnikowych w sensie werbalnym. Ponadto, w umyśle muszą być zakodowane reprezentacje funktorów pozycji cyfrowych w postaci wielu mentalnych linii (osi) liczbowych (*mental number lines*),[21] choć zgodnie z dominującym paradygmatem, przyjmuje się, że w umyśle zakodowana jest dokładnie jedna mentalna linia liczb naturalnych.[22] Z reprezentacji leksykalnych oraz reprezentacji funktorów pozycji cyfrowych (czyli mentalnych osi liczbowych) umysł w procesie ujęcia cyfry syntetyzuje — za pomocą pewnego mechanizmu, reprezentującego plan pozycyjny cyfry — reprezentację danej cyfry o określonej strukturze głębokiej.

3. ANALIZA LICZEBNIKÓW NA GRUNCIE GRAMATYKI KATEGORIALNEJ

Zgodnie z dotychczasowymi ustaleniami struktura głęboka każdego złożonego liczebnika składa się z: (i) liczebników elementarnych stanowiących stałe nazwowe, (ii) pozycji syntaktycznych stanowiących funktory, (iii) oraz z funktora planu pozycyjnego.

3.1. Liczebniki elementarne

Liczebnikami elementarnymi są elementarne cyfry na gruncie danego systemu zapisu cyfr lub elementarne leksemy liczbowe na gruncie danego języka w sensie etnicznym. W systemie zapisu cyfr arabskich elementarnymi liczebnikami są znaki: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. W systemie zapisu cyfr łacińskich, znaki o postaci: I, V, X, L, C, D, M, konstytuują zbiór elementarnych liczebników. W systemie zerojedynkowym występują tylko dwa elementarne liczebniki, zapisywane zwykle jako: 0 i 1. W systemie zapisu za pomocą karbów występuje tylko jeden elementarny liczebnik,

---

[21] Hipoteza, zgodnie z którą warunkiem nabycia przez umysł dziecka elementarnej, bazowej kompetencji obliczeniowej, jest zakodowanie (synteza) w jego umyśle reprezentacji posiadającej strukturę pęku osi liczbowych, została zaprezentowana w [Krysztofiak 2010; Krysztofiak 2011]. Przy czym struktura tejże reprezentacji posiada charakter finitystyczny. Jednakże należy założyć istnienie mechanizmu rozszerzającego taką strukturę. Każda oś liczbowa w takiej strukturze reprezentuje jeden funktor pozycji syntaktycznej w strukturze reprezentacji mentalnej cyfry.

[22] W literaturze przedmiotu dyskutuje się problem struktury matematycznej mentalnej linii liczb. Czy linia ta jest wyskalowana logarytmicznie czy też arytmetycznie? Jeśli mentalna linia liczb ma charakter logarytmiczny, to wówczas jest ona określana jako mentalna, analogowa linia liczb przybliżonych lub przybliżonych liczności (*approximate number line*). Jeśli zaś jej sposób skalowania podpada pod skalę arytmetyczną, to wówczas jest określana jako mentalna linia liczb dokładnych. Niektórzy autorzy twierdzą, że w umyśle zakodowane są dwie takie mentalne linie liczb, funkcjonujące jako niezależne struktury kognitywne. Zob. na temat mentalnej linii liczb [Dehaene 2001; Dehaene 2003; Giaquinto 2001; Carey 2001].

którym jest o określonym kształcie nacięcie (na ogół kreska pionowa). Liczba elementarnych liczebników na gruncie dowolnego systemu zapisu cyfr czy też języka w sensie etnicznym jest zawsze skończona. Oznacza to, że ze skończonej liczby elementarnych liczebników umysł mógłby wygenerować (gdyby pracował w nieskończenie długim czasie) nieskończony zbiór różniących się, złożonych liczebników. Co więcej, ten zbiór wyjściowy liczebników elementarnych, na gruncie zasadniczo wszystkich systemów zapisu cyfr, wystarcza do skonstruowania dowolnego liczebnika oznaczającego dowolną liczbę naturalną.[23] Każdy standardowy system zapisu cyfr jest więc produktywny w sensie Chomsky'ego. Wyróżnionym liczebnikiem elementarnym w każdym takim systemie jest liczebnik służący umysłowi do odniesienia się do liczby lub liczności *jeden*. Z punktu widzenia gramatyki kategorialnej liczebnikom elementarnym można przypisać indeks kategorialny nazwy: *n*.

3.2. Funktory pozycji składniowych

Funktory pozycji syntaktycznych są wyrażeniami, w strukturach głębokich reprezentacji mentalnych liczebników, służącymi, wraz z funktorem planu pozycyjnego liczebnika, do tworzenia złożonych liczebników z liczebników elementarnych. W arabskim systemie zapisu cyfr występują, między innymi, takie funktory pozycji, jak: *jedności*, *dziesiątek*, *setek*, *tysięcy*, *milionów*, *miliardów*, *bilionów*, *trylionów* itd. W innych systemach funktory pozycji mogą mieć inną postać. Na przykład, na gruncie systemu piątkowego można mówić o pozycjach oznaczających osie: *piątki*, *dwudziestopiątki*, *stodwudziestopiątki* itd. Funktory te działają bezpośrednio na elementarne leksemy liczebnikowe. W wyrażeniu *sto trzydzieści cztery*, sufiks *dzieści*, posiadający w strukturze głębokiej swój odpowiednik w postaci funktora pozycji *dziesiątek*, działa na leksem *trzy*, tworząc składowe wyrażenie *trzydzieści*. Wyłania się więc następujący problem: jeśli elementarnym leksemom liczebnikowym przypisze się indeks kategorialny *n*, to czy funktory pozycji składniowych tworzą również wyrażenia kategorii *n*, czy też wyrażenia odmiennej kategorii?

Na gruncie pierwszego z sugerowanych rozwiązań przypisującego funktorom pozycji indeks *n/n*, zakładając zasadę zastępowalności syntaktycznej pomiędzy wyrażeniami o takim samym indeksie kategorialnym, należałoby wyciągnąć wniosek,

[23] Antropologowie wskazują w swoich badaniach na istnienie takich kultur językowych, w których ich członkowie operują „rachitycznymi" systemami liczbowymi. Botokudowie z Brazylii, tubylcy z wysp Murray, lud z wysp Cieśniny Torresa czy Abiponowie wykorzystują jedynie trzy liczebniki: *jeden, dwa, dużo* [zob. Ifrah, 2006, s. 46-48]. Nie potrafią oni odnieść się w sposób dokładny do każdej liczności. Nie oznacza to jednak, że członkowie takich grup etnicznych nie potrafią liczyć; są w stanie dodawać i odejmować w sposób przybliżony, co nie odróżnia ich od przedszkolnych, amerykańskich dzieci [zob. Spelke, Kindler, 2007, s. 89-96], [zob. Pica, Lemer, Izard, Dehaene, 2004, s. 499-503]. Nie można jednak wnioskować z tego faktu, że operują oni systemem liczbowym pozwalającym im na wykonywanie aktów referencji liczebnikowej względem dowolnej liczności, wielkości czy też liczby.

że wyrażenia utworzone za pomocą funktorów pozycji składniowych oraz elementarne leksemy liczebnikowe są w każdym liczebnikowym kontekście zastępowalne z zachowaniem poprawności składniowej. Fakty językowe przeczą jednak tej konstatacji. Zastępując w wyrażeniu *sto dwadzieścia trzy* wyrażenie *dwadzieścia* wyrażeniem *siedem*, otrzymuje się niepoprawny składniowo rządek słów: *sto siedem trzy*. Wyrażenie to nie może bowiem zostać użyte w czynnościach referencji liczebnikowej. Z kolei przyjmując rozwiązanie przypisujące funktorom pozycji indeks k/n, gdzie $k \neq n$ oraz k stanowi indeks kategorii złożonych wyrażeń wewnętrznych w strukturach głębokich liczebników, otrzymuje się wniosek, że funktory pozycji syntaktycznych nie są ani iterowalne, ani permutowalne.[24] Oznaczałoby to, że z elementarnych funktorów pozycji składniowych nie można by tworzyć złożonych funktorów pozycji składniowych. Tej konstatacji przeczą również fakty językowe. Na przykład, na gruncie arabskiego systemu można mówić o takich złożonych funktorach, jak: *tysiąc dziesiątek, milion milionów, milion dziesiątek*. Niech litery: j, d, s, t, m będą, kolejno, funktorami pozycji: *jedności*, *dziesiątek*, *setek*, *tysięcy* oraz *milionów*. Wyrażenia wchodzące w skład struktur głębokich cyfr arabskich o postaci, na przykład: $d[5]$, $t[4]$ mogą być powierzchniowo czytane jako: *pięćdziesiąt*, *cztery tysiące*. Analogicznie, wyrażenia z iteracją lub permutacją funktorów pozycji o postaci: $ds[5]$, $mss[9]$, powinny być czytane: *pięćset dziesiątek*, *dziewięćset setek milionów*.[25] Okazuje się, że na gruncie rozmaitych systemów zapisu cyfrowego permutacje czy też iteracje funktorów pozycji mogą definiować inne funktory pozycji syntaktycznych, które na płaszczyźnie powierzchniowej są leksykalizowane w postaci rozmaitych liczebników werbalnych. I tak na przykład iteracja *tt*, czyli *tysiąc tysięcy*, jest leksykalizowana jako liczebnik *milion* generujący pozycję syntaktyczną milionów. Z kolei permutacja *dt* na gruncie języka polskiego nie jest zleksykalizowana jako liczebnik wyznaczający pozycję syntaktyczną.

---

[24] Jeśli przyjmie się tezę gramatyki kategorialnej o postaci: $(i/i)[i] = n$, gdzie (i/i) jest indeksem-funkcją funktora działającego na jego argument o indeksie i, $[i]$ zaś stanowi indeks-argument indeksu-funkcji funktora, to łatwo można wyprowadzić wniosek, że $(i/i)\ldots(i/i)[i] = i$ (znak „=” oznacza to, że wyrażenie będące sekwencją wyrażeń o indeksach: $i/i, \ldots, i/i$ oraz i, posiada indeks i). Zasada ta obowiązuje we wszystkich językach sformalizowanych, w których występują funktory nazwotwórcze od argumentów nazwowych (takimi są, na przykład, terminy funkcyjne). Łatwo zauważyć, że teza: $(i/i)[i] = i$, wynika z tak zwanego aksjomatu MP podstawowej gramatyki kategorialnej Ajdukiewicza–Bar-Hillela: $(j/i)[i] = j$. Wymienione równania mogą być zapisane za pomocą znaku „→” oznaczającego to, że pewna sekwencja indeksów kategorialnych, oznaczona po lewej stronie znaku „→”, redukuje się do indeksu kategorialnego po prawej stronie tego znaku. Na gruncie pierwszego z rozwiązań obowiązywałaby teza: $(n/n)\ldots(n/n)[n] = n$, stwierdzajaca, że dowolny funktor o indeksie n/n jest permutowalny i iterowalny w tym znaczeniu, że dowolny rządek takich funktorów działających na swój argument tworzy wraz ze swoim argumentem poprawnie zbudowane wyrażenie kategorii n.

[25] Taki liczebnik z pewnością byłby używany na gruncie systemów walutowych, w których istnieją, na przykład, banknoty o nominale *sto milionów*.

Skoro więc oba potencjalne rozwiązania problemu kategorii składniowej funktorów pozycji składniowych prowadzą do nieprzezwyciężalnych trudności, należałoby wnioskować, że dotychczas skonstruowane gramatyki kategorialne nie nadają się do opisu struktur głębokich liczebników. Taka ocena jest jednak niewłaściwa, gdyż pomija kwestię możliwości rozbudowy gramatyk kategorialnych o nowy rodzaj indeksów, które można scharakteryzować jako *indeksy hybrydowe*.[26] Funktory o indeksach hybrydowych są funktorami, które mogą działać na wyrażenia różnych kategorii składniowych w zależności od kontekstu. Jeśli j, i_1, i_2, …, i_k są elementarnymi indeksami kategorialnymi, to indeksy hybrydowe są postaci: $j/i_1 \vee \ldots \vee i_k$. Na przykład, $k/n \vee k$ stanowi indeks funktora jednoargumentowego, tworzącego wyrażenie kategorii k ze swoim argumentem należącym do kategorii n lub kategorii k. Regułę MP podstawowej gramatyki kategorialnej Ajdukiewicza — Bar-Hillela można uogólnić na indeksy hybrydowe w następujący sposób: $(j/i_1 \vee \ldots \vee i_k)[i_n] = j$, dla każdego i_n znajdującego się pośród $i_1 \vee \ldots \vee i_k$. Funktorom pozycji składniowych można więc przypisać następujący indeks kategorialny: $k/n \vee k$. W związku z tym dla funktorów o takim indeksie obowiązują następujące dwie reguły kategorialne: (i) $(k/n \vee k)[n] = k$; (ii) $(k/n \vee k)[k] = k$. Zgodnie z pierwszą regułą, funktor o indeksie $k/n \vee k$, kiedy działa na argument o indeksie n, tworzy złożone wyrażenie (wraz ze swoim argumentem) o indeksie k. Zgodnie z drugą regułą, funktor o indeksie $k/n \vee k$, kiedy działa na argument o indeksie k, tworzy złożone wyrażenie (wraz ze swoim argumentem) również o indeksie k. W wypadku takiego przyporządkowania indeksu kategorialnego funktorom pozycji uzyskuje się następujące korzyści:

(i) Elementarne leksemy liczebnikowe nie są zastępowalne z zachowaniem poprawności składniowej za wyrażenia utworzone za pomocą funktorów pozycji w strukturach głębokich liczebników, gdyż te pierwsze posiadają indeks kategorialny n, te drugie zaś — indeks kategorialny k. W tym wypadku można wyjaśnić to, dlaczego zastępując w wyrażeniu *sto dwadzieścia trzy* wyrażenie *dwadzieścia* wyrażeniem *siedem*, otrzymuje się niepoprawny składniowo rządek słów: *sto siedem trzy*. Wyrażenie *dwadzieścia* posiada kategorię k, natomiast wyrażenie *siedem* — kategorię n.

(ii) Funktory pozycji składniowych są iterowalne oraz permutowalne. Skoro na mocy (i) $(k/n \vee k) = k$, to $(k/n \vee k)\ (k/n \vee k)[n] = (k/n \vee k)[k]$. Na mocy (ii) $(k/n \vee k)[k] = k$, dostajemy $(k/n \vee k)\ (k/n \vee k)[n] = k$. Stąd dla dowolnej iteracji indeksu $(k/n \vee k)$ otrzymujemy $(k/n \vee k) \ldots (k/n \vee k)[n] = k$. Na przykład, wyrażenie *mtt*[2], z iteracją funktora pozycji składniowej *tysięcy*, jest poprawnie zbudowanym wyrażeniem, gdyż $(k/n \vee k)(k/n \vee k)\ (k/n \vee k)[n] = k$. W związku z tym dowolne sekwencje funktorów pozycji składniowych są zastępowalne dowolnymi sekwencjami tychże funktorów z zachowaniem poprawności składniowej otrzymywanego wyrażenia. Sekwencję *tysiąc tysięcy* można zawsze zastąpić z zachowaniem poprawności składniowej wyrażeniem *milion*, gdyż oba wyrażenia należą do tej samej kategorii składniowej k.

---

[26] Autorowi artykułu nie są znane w literaturze przedmiotu żadne teorie gramatyczne operujące tego typu indeksami.

3.3. Funktor planu pozycyjnego

Przyjmując hipotezę, że plan pozycyjny każdej cyfry, na gruncie danego systemu cyfrowego, jest syntetyzowany według tego samego mechanizmu, należałoby również założyć, że w generacji każdej struktury głębokiej reprezentacji liczebnika uczestniczy dokładnie ten sam funktor planu pozycyjnego. Oznacza to, że w każdym wypadku niezależnie od długości pozycyjnej liczebnika jego plan pozycyjny jest syntetyzowany z pozycji składniowych według jednolitego mechanizmu kognitywnego. Struktura kategorialna funktora planu pozycyjnego liczebnika powinna więc odwzorowywać mechanizm jego syntezy. Z uwagi na to, że liczebniki charakteryzują się rozmaitymi długościami pozycyjnymi, funktor planu pozycyjnego, który działa, między innymi, na te pozycje, musi zostać ujęty jako funktor o zmiennej liczbie argumentów, czyli jako funktor anadyczny (*anadic functor*, *multigrade functor*, *polyadic functor*).[27]

Pierwsza kwestia, którą należy rozstrzygnąć, dotyczy indeksu kategorialnego wyrażenia, które funktor planu pozycyjnego cyfry tworzy wraz ze swoimi argumentami. Jeżeli cyfrom składowym w cyfrach złożonych przypisuje się indeks *n*, to czy cyfra złożona jest również wyrażeniem o tym samym indeksie kategorialnym? Jeśli cała struktura głęboka liczebnika charakteryzowałaby się indeksem *n*, to wówczas byłaby podstawialna pod swoje elementy składowe o tym samym indeksie kategorialnym (pod cyfry elementarne, gdyż one posiadają indeks *n*). Takie rozwiązanie mogłoby wydawać się zgodne z faktami językowymi. Na przykład, można by argumentować, że podstawiając złożoną cyfrę „243” w cyfrze „671” za leksem cyfrowy „7”, otrzymujemy poprawnie zbudowaną cyfrę „62431”. Analizując tego rodzaju „podstawianie”, łatwo dojść do wniosku, iż niemożliwe jest podstawianie cyfr złożonych za leksemy cyfrowe w wielu kontekstach cyfrowych. Standardowo rozumiana operacja podstawiania nie powinna prowadzić do zmiany znaczenia niepodstawianych wyrażeń w podstawianym kontekście. Otóż, podstawiając za wyrażenie *krzesło* w kontekście *Krzesło jest meblem*, wyrażenie *stół*, znaczenie frazy *jest meblem* nie zmienia się. To nie zachodzi jednak w wypadku cyfry „6710” i podstawienia „7”/ „243”. W wyniku tej operacji leksem cyfrowy „6” występujący w podstawianej cyfrze zmienia znaczenie. W wypadku cyfry „6710” leksem „6” uczestniczy w wyznaczaniu treści znacze-

---

[27] Funktory anadyczne są charakteryzowane jako nieposiadające w każdym kontekście ustalonej liczby argumentów. Na przykład, funktor zdaniotwórczy „walczy z” w pewnych kontekstach może być dwuargumentowy, ale w innych trój-, cztero- czy nawet dziesięcioargumentowy. Dla przykładu, w zdaniu „Jan walczy z Jasiem, Andrzejem, Grzesiem” jest on funktorem czteroargumentowym. Funktory anadyczne oznaczają relacje o nieokreślonej liczbie argumentów (multigrade relations). Relacje takie są wykorzystywane jako narzędzia modelowania rozmaitych teorii części i całości. Zob. [Morton 1975]. Oliver i Smiley budują koncepcję predykatów anadycznych ze zmienną ilością „miejsc” (places), w obrębie których występują jeszcze pozycje także w zmiennej ilości [Oliver, Smiley 2004]. Na przykład, w wypowiedzi „Jan, Jaś walczą z Olą, Alą i Małgosią” predykat „walczyć” jest dwu-miejscowy; przy czym pierwsze miejsce jest dwu-pozycyjne, drugie zaś trój-pozycyjne.

niowej: *sześć tysięcy*, podczas gdy w „624310" ten sam leksem uczestniczy w wyznaczaniu treści znaczeniowej: *sześćset tysięcy.* Analizowana sytuacja nie może być więc potraktowana jako operacja podstawiania, lecz raczej jako operacja generacji nowej cyfry pozostającej w pewnej relacji syntaktycznej do cyfry „243". Innymi słowy, za elementarne leksemy cyfrowe można podstawiać wyłącznie inne elementarne leksemy cyfrowe. Natomiast wówczas, kiedy za leksemy cyfrowe podstawiane są w cyfrach złożonych inne cyfry złożone, taka operacja przestaje być podstawianiem, a staje się operacją generowania nowej cyfry złożonej. W związku z tym, struktury głębokie liczebników nie mogą charakteryzować się indeksem kategorialnym *n*. Czy wobec tego struktury głębokie liczebników, tworzone przez funktor planu pozycyjnego, posiadają indeks kategorialny *k*? Gdyby struktury głębokie liczebników posiadały indeks *k*, to wówczas liczebniki byłyby podstawialne w każdym kontekście za wyrażenia złożone o indeksie *k*, stanowiące fragmenty liczebników. Na przykład, w liczebniku *dwa tysiące sześćdziesiąt siedem*, za fragment *sześćdziesiąt*, który posiada indeks kategorialny *k*, można by podstawić liczebnik *sześćdziesiąt siedem.* Otrzymane w ten sposób wyrażenie powinno być poprawnie zbudowanym liczebnikiem. Okazuje się, że otrzymany rządek leksemów: *dwa tysiące sześćdziesiąt siedem siedem*, nie jest poprawnie składniowo zbudowanym liczebnikiem. Dlatego też strukturom głębokim liczebników, które powstają w wyniku zastosowania funktora planu pozycyjnego do jego argumentów, należy przypisać odmienny indeks kategorialny niż *n* lub *k*. Niech tym indeksem będzie *l*. Warto wskazać na to, że zgodnie z zaproponowanym rozwiązaniem indeks *l* w stosunku do pozostałych indeksów, zachowuje się analogicznie jak indeks kategorii zdań *s* w stosunku do nazw i funktorów. Wyrażenia liczebnikowe pozostają w syntaktycznych relacjach nadrzędności względem swoich składników, analogicznie jak wyrażenia zdaniowe pozostają w relacjach nadrzędności do swoich wyrażeń składowych (nazw oraz funktorów).

Następna kwestia dotyczy tego, jakiego typu kategorialnego są argumenty funktora planu pozycyjnego. Rozwiązanie tej kwestii wymaga rozstrzygnięcia innego problemu. Czy wyrażenia kategorii *k* w strukturach głębokich reprezentacji liczebników są syntetyzowane podczas syntezy struktury głębokiej całego liczebnika, czy też są syntetyzowane niezależnie od tej struktury? Innymi słowy, czy do syntezy wyrażeń kategorii *k* w strukturze głębokiej wymagane jest zsyntetyzowanie struktur głębokich innych wyrażeń kategorii *k*, z których ukonstytuowana jest struktura głęboka liczebnika czy też synteza struktury głębokiej liczebnika realizuje się kompozycjonalnie — najpierw syntetyzowane są struktury głębokie wyrażeń kategorii *k,* a potem na wcześniej zsyntetyzowane struktury kategorii *k* działa funktor planu pozycyjnego, tworząc strukturę głęboką liczebnika o indeksie *l*? Kwestia sporna dotyczy więc tego, czy synteza struktury głębokiej ma charakter holistyczny czy też kompozycjonalny.

Z punktu widzenia analizy warstwy powierzchniowej cyfr złożonych, elementarne leksemy cyfrowe nie charakteryzują się autonomią semantyczną. Oznacza to, że ten sam leksem cyfrowy w zależności od cyfry, w której występuje, posiada odmienne znaczenie. Na przykład, dopisanie po prawej stronie do cyfry „233" dodatkowej cyfry zmienia znaczenie wszystkich pozostałych cyfr składowych. Innymi słowy, pierwsza od lewej cyfra w „233” jest rozumiana jako *dwieście* tylko dlatego, że pozostałe cyfry składowe są rozumiane w ściśle określony sposób. Fakt ten wskazywałby na holistyczność procesu syntezy struktur głębokich reprezentacji mentalnych liczebników. Synteza planu pozycyjnego struktury głębokiej liczebnika realizowałaby się równolegle z syntezą struktur głębokich wyrażeń należących do kategorii *k*.

Z drugiej jednak strony można wymienić fakty językowe wskazujące na kompozycjonalny charakter syntezy struktur głębokich reprezentacji mentalnych liczebników. Złożone liczebniki w sensie werbalnym, na gruncie wielu języków etnicznych, stanowią wyrażenia, w których można wyróżnić, na gruncie analizy powierzchniowej, inne wyrażenia liczebnikowe jako ich składniki. Na przykład, liczebnik *dwieście trzydzieści trzy* zbudowany jest z trzech wyrażeń składowych. Jego konstrukcję składniową można opisać tak, że funktor planu pozycyjnego działa na struktury głębokie składników: *dwieście*, *trzydzieści* oraz *trzy*. Ponieważ wymienione składniki charakteryzują się autonomią semantyczną, w tym znaczeniu że mogą występować w innych liczebnikach złożonych, zachowując swoje znaczenie, to należy założyć, że synteza ich struktur głębokich przebiega niezależnie od syntezy struktur głębokich liczebników przy pomocy funktora planu pozycyjnego. Synteza struktur głębokich liczebników obejmowałaby fazy: (i) syntezę struktur głębokich wyrażeń kategorii *k*, polegającą na nasyceniu funktorów pozycji syntaktycznych elementarnymi leksemami liczebnikowymi; (ii) syntezę struktury polegającą na związaniu przez funktor planu pozycyjnego wszystkich wyrażeń powstających w wyniku nasycenia funktorów pozycji syntaktycznych elementarnymi leksemami cyfrowymi. W świetle tego modelu, synteza planu pozycyjnego struktury głębokiej liczebnika realizowałaby się kompozycjonalnie jako proces nadbudowany nad procesami syntezy wyrażeń w strukturach głębokich należących do kategorii *k*.

Holistyczny model syntezy planu pozycyjnego struktury głębokiej liczebnika narzucałby na funktor planu pozycyjnego anadyczny indeks kategorialny o postaci: $l/ n_1, (k_1/n_1 \vee k_1),\ldots, n_i, (k_i/n_i \vee k_i),\ldots$ Kropki w zapisie wyrażają to, że funktor ten posiada zmienną liczbę argumentów w rozmaitych kontekstach. Oczywiście, w dowolnym kontekście liczba argumentów jest zawsze skończona. W takiej sytuacji strukturom głębokim liczebników nie można by przyporządkować rzędów analizy. Zaproponowane rozwiązanie jednak redukuje się, na gruncie pewnych systemów gramatyki kategorialnej, do kompozycjonalnego modelu funktora planu pozycyjnego. Na gruncie wielu rachunków gramatyki kategorialnej, indeks: $l/ n_1, (k_1/n_1 \vee k_1),\ldots, n_i, (k_i/n_i \vee k_i),\ldots.$ jest bowiem redukowalny do indeksu: $l/k_1,\ldots, k_i,\ldots$ W takich rachunkach musi być spełniona zasada, którą można określić jako pryncypium ekstensjonalności dla indeksów kategorialnych.[28] Stąd, akceptacja holistycznego modelu syn-

[28] Niech α, β, γ, δ będą dowolnymi indeksami kategorialnymi, $[\alpha,\beta]$ zaś dwu-składnikowym rządkiem indeksów. Niech = stanowi relację redukowalności sekwencji indeksów do danego indeksu. Regułę ekstensjonalności dla indeksów kategorialnych można wyrazić następująco: $[\alpha, \beta] = \gamma \rightarrow$

tezy planu pozycyjnego struktury głębokiej liczebnika wymusza odrzucenie mechanizmu ekstensjonalnego składniowo konstruowania struktur głębokich liczebników. Trudno znaleźć jednak uzasadnienie dla odrzucenia tej zasady w odniesieniu do języków sformalizowanych. W języku formalnym są właśnie formatowane reprezentacje mentalne liczebników. Uchylenie pryncypium ekstensjonalności dla indeksów kategorialnych wydaje się zasadne jedynie w odniesieniu do języków silnie zmetaforyzowanych (poetyckich). Cyfry używane w aktach referencji liczebnikowej nie są jednak utworami poetyckimi.

Z punktu widzenia wyżej zaprezentowanej analizy, przyjąć należy założenie, że funktor planu pozycyjnego jest funktorem o indeksie $l/k_1, \ldots, k_i$. Zgodnie z takim rozwiązaniem, gramatyka kategorialna struktur głębokich reprezentacji mentalnych liczebników nie bazuje na dwóch pierwotnych indeksach kategorialnych, lecz na trzech takich indeksach (l, k, n). Struktury głębokie liczebników obejmują więc dwa poziomy swojej złożoności. Struktury głębokie liczebników składają się z wyrażeń o indeksie kategorialnym k powiązanych w całość funktorem planu pozycyjnego; z kolei wyrażenia o indeksie kategorialnym k są konstruowane z elementarnych leksemów liczebnikowych należących do kategorii n oraz odpowiednich funktorów pozycji składniowych.

Aby pokazać, jak zaprezentowana koncepcja „pracuje", zanalizujmy kategorialnie cyfrę „632". Niech strzałka „→" oznacza funkcję przyporządkowującą dowolnemu leksemowi jego indeks kategorialny. Niech *1, 2, 3,* itd. stanowią nazwy cyfr elementarnych. Niech litery *j, d, s* oznaczają kolejne pozycje syntaktyczne cyfr w cyfrze „632", czyli: *jedności*, *dziesiątek* oraz *setek*. Niech P stanowi funktor planu pozycyjnego. Funkcja → w zastosowaniu do złożonej cyfry „632" zachowuje się następująco: (1) $6 \rightarrow n$, (2) $3 \rightarrow n$, (3) $2 \rightarrow n$, (4) $j \rightarrow k/n \vee k$, (5) $d \rightarrow k/n \vee k$, (6) $s \rightarrow k/n \vee k$, (7) $P \rightarrow l\,/[k, k, k]$. Funktor P jest więc w tym wypadku liczebnikotwórczym funktorem od trzech argumentów. Z punktu widzenia algorytmu Ajdukiewicza przedstawiona analiza kategorialna jest poprawna. Strukturę głęboką cyfry „632" można więc symbolicznie przedstawić tak oto: $P[j[2], d[3], s[6]]$.

Zaprezentowany sposób formatowania struktur głębokich reprezentacji mentalnych liczebników pozwala wyjaśnić następujące zjawiska językowe: (i) sposoby użycia cyfr w aktach referencji liczebnikowej są odmienne od ich sposobów użycia jako kodów cyfrowych; (ii) użytkownicy języka w aktach referencji numerycznej często posługują się liczebnikami, które nie są przekładalne, z zachowaniem syno-

$(\delta/[\alpha,\beta]) = (\delta/\gamma)$. Warto zauważyć, że zaprezentowana reguła nie jest wyprowadzalna z podstawowej reguły gramatyk kategorialnych Ajdukiewicza — Bar-Hillela: $[\alpha, \beta] = \gamma \rightarrow [\Gamma, \alpha, \beta] = [\Gamma, \gamma]$, gdzie Γ jest dowolną sekwencją indeksów. Zgodnie z pryncypium ekstensjonalności dla indeksów kategorialnych, jeśli sekwencja indeksów redukuje się do pewnego indeksu, to każdy indeks funktorowy, którego mianownikiem jest dana sekwencja indeksów redukuje się do indeksu funktorowego, którego mianownikiem jest indeks redukujący daną sekwencję indeksów. Na przykład, indeks o postaci: $i/(j,\ i/j)$ redukuje się do indeksu o postaci j/j, gdyż sekwencja $[j,\ i/j]$, na mocy reguły MP, redukuje się do j.

nimii, na zapis cyfrowy; (iii) każda cyfra złożona jest syntaktycznie wieloznacznym wyrażeniem w tym sensie, że można jej przyporządkować wiele różnych pod względem kształtu, kodesygnacyjnych, liczebników w sensie werbalnym, które są jednak odmiennie rozumiane przez użytkowników języka; (iv) na gruncie wielu systemów zapisu cyfrowego, elementarny leksem cyfrowy „0" jest liczebnikiem zbędnym.

To, że funktor planu pozycyjnego wiąże zarówno elementarne liczebniki, jak i funktory pozycji syntaktycznych w struktury głębokie liczebników, wyklucza sytuację, w której działa on wyłącznie na pojedynczą cyfrę lub też listę takich cyfr. Nie istnieją więc — zgodnie z przyjętym założeniem o indeksie kategorialnym funktora planu pozycyjnego — takie struktury głębokie liczebników, jak na przykład: *P*[1], *P*[*2*], *P*[*3*], *P*[1, 2, 3]. Nie znaczy to, że umysł nie posługuje się wyrażeniami mającymi postać rozmaitych list cyfrowych. Cyfry elementarne tworzące jakąś listę cyfrową (numery: NIP, kont bankowych czy też haseł internetowych) wiązane są jednak innym funktorem niż funktor planu pozycyjnego liczebnika. Należy odróżnić dwa sposoby użycia znaków cyfrowych. Ten sam znak cyfrowy może być postrzegany jako liczebnik, ale także jako kod cyfrowy. Innymi słowy, należy odróżniać użycie dowolnej cyfry w funkcji oznaczenia liczby lub jakiejś liczności czy też wielkości od użycia cyfry w funkcji kodu cyfrowego. W pierwszym wypadku w umyśle jest aktywowany mechanizm syntezy planu pozycyjnego struktury głębokiej cyfry, podczas gdy w drugim wypadku aktywacja tego mechanizmu nie następuje. W pierwszym wypadku struktura głęboka znaku cyfrowego musi więc składać się z funktora działającego na złożone wyrażenia niebędące leksemami cyfrowymi. W drugim wypadku struktura głęboka znaku cyfrowego musi składać się z funktora działającego wyłącznie na leksemy cyfrowe, który tworzy listę cyfrową. Takim funktorom można przypisać anadyczny indeks kategorialny kształtu: *n* / [*n, n,* ...]. Zaprezentowany więc sposób formatowania liczebników pozwala odróżniać cyfry (jako wyrażenia liczebnikowe) od list cyfrowych (jako wyrażeń kodujących).

Zgodnie z zaproponowanym modelem struktury głębokiej liczebników, umysł jest w stanie produkować struktury, na przykład, o postaci: *P*[*s*[1], *s*[1]]; *P*[*d*[5], *s*[2]]. Pierwsza ze struktur może być czytana jako: *jedna setka i jedna setka*. Druga ze struktur może być czytana jako: *pięć dziesiątek i dwie setki*. Łatwo zauważyć, że oba złożone liczebniki werbalne bywają używane na gruncie języka polskiego. Na przykład, w sytuacji „popijania przy barze" wypowiedź: *poproszę jedną setkę i potem jeszcze jedną setkę*, fraza „[…] *jedną setkę i* […] *jedną setkę*" może być interpretowana przez barmana jako odniesienie się klienta do dwustu gram trunku podzielonego na dwie porcje po sto gram trunku.[29] Kiedy w hurtowni soków popakowane są kartony soku w paczkach po dziesięć sztuk oraz po sto sztuk, wówczas powiedzenie: *podaj mi pięć dziesiątek i dwie setki jabłkowego*, będzie rozumiane przez

[29] Gdyby w reakcji na takie zamówienie barman podał klientowi dwieście gram trunku w jednej porcji, doszłoby do nieporozumienia. Czasami przy barze prosimy o *dwie setki.* Wówczas taka prośba jest efektem naszych obliczeń, zgodnie z którymi *jedna setka i jedna setka* to tyle samo co *dwie setki.*

użytkowników takich liczebników w sposób jednoznaczny. Przywołane przykłady wskazują na szczególne zjawisko. Nie każdy liczebnik werbalny posiada synonimiczny przekład w postaci liczebnika cyfrowego. Otóż, wyrażenie „*pięć dziesiątek i dwie setki soku jabłkowego*”, nie posiada tego samego znaczenia co wyrażenie „*dwieście pięćdziesiąt soków jabłkowych*”. Odpowiednikiem cyfrowym drugiego z wyrażeń jest wyrażenie „250 *soków jabłkowych*”. Natomiast dla pierwszego z wyrażeń nie da się znaleźć synonimicznego odpowiednika cyfrowego.

Wypadki wieloznacznego użycia liczebników są nadzwyczaj częste. Sprzedawca w hurtowni napojów, wypowiedź „250 *soków jabłkowych*” może rozumieć na co najmniej dwa sposoby w zależności od tego, jak jego umysł generuje cyfrę „250”. Otóż, cyfra ta może być wygenerowana z dwóch różnych struktur głębokich: *P*[*d*[5], *s*[2]]; *P*[*j*[0], *d*[5], *s*[2]]. Kiedy sprzedawca poda klientowi luzem 250 soków, to można wnioskować, że jego umysł wygenerował cyfrę „250” z drugiej ze struktur głębokich. Jeśli natomiast sprzedawca poda klientowi dwie paczki soków po sto w każdej oraz pięć paczek po dziesięć w każdej, to można wnioskować, że jego umysł przetwarzał pierwszą ze struktur.

Formalny charakter struktur głębokich reprezentacji cyfrowych zakodowanych w umyśle pozwala również wyjaśnić fakt zbędności znaku cyfrowego „0” w rozmaitych systemach zapisu cyfr (na przykład w greckim systemie zapisu cyfr). Każda cyfra złożona, w zapisie której występuje znak cyfrowy „0” może być skorelowana z reprezentacją syntaktyczną, której struktura głęboka nie jest zsyntetyzowana przy pomocy leksemu cyfrowego „0” (na gruncie systemu arabskiego). Struktura głęboka o postaci: *P*[*d*[5], *s*[2]], może być interpretowana jako struktura dowolnego liczebnika, którego używamy aby odnieść się do liczby (liczności czy też wielkości) 250. W pewnych innych systemach zapisu, na przykład w tych, w których używana jest oś tuzinów, do liczby 250 można odnosić się przy pomocy liczebnika o strukturze głębokiej o postaci: *P*[*d*[1], *tuzin*[*d*[2]]], gdzie *d* reprezentuje oś dziesiątek. Cyfra „250” może być wówczas tłumaczona na liczebnik werbalny o postaci: *dwie dziesiątki tuzinów i jedna dziesiątka*. Warto dodać, że przekładając cyfry z zerami na liczebniki werbalne języka polskiego (oraz wielu innych języków), liczebnik „*zero*” nie jest używany dla artykulacji takich liczebników. Co więcej, nie mówimy na co dzień: *mam zero pieniędzy*, lecz mówimy: *nie mam żadnych pieniędzy*.

4. ZASADY LOGIKI PRZETWARZANIA STRUKTUR GŁĘBOKICH LICZEBNIKÓW

Systemy zapisu cyfr mogą być konstruowane na gruncie rozmaitych architektonik cyfrowych, które różnią się między sobą zestawami funktorów pozycji syntaktycznych użytych do konstrukcji danego systemu, a także zestawami cyfr elementarnych i sposobami ich dystrybucji na pozycjach syntaktycznych w strukturach głębokich liczebników cyfrowych. Na przykład, dziesiętny system arabski posiada taką architekturę, zgodnie z którą każda cyfra elementarna może zajmować miejsce na dowolnej pozycji syntaktycznej. Innymi słowy, nie istnieją ograniczenia w wiązaniu cyfr elementarnych przez funktory pozycji w tym systemie. Nie oznacza to jednak tego, że dowolna pozycja syntaktyczna w strukturze głębokiej liczebnika może być zajęta tylko przez jedną cyfrę elementarną. Podobną architektonikę posiadają wszystkie systemy, naśladujące system arabski, ale wykorzystujące inne zestawy cyfr elementarnych. W systemie zerojedynkowym, zarówno cyfra „0", jak i „1" mogą być wiązane przez każdy funktor pozycji syntaktycznej. Podobnie jest we wszelkich systemach quasi-arabskich wykorzystujących inny niż 10-elementowy zestaw cyfr elementarnych. Dla kontrastu, system cyfr rzymskich takiej architektoniki nie przejawia. Na przykład, znak „I" nie może być użyty na innych pozycjach syntaktycznych niż pierwsza, druga oraz trzecia pozycja.[30] Znak „L" nie może z kolei być użyty na pierwszej, drugiej czy w końcu trzeciej pozycji syntaktycznej. Zaprezentowana poniżej teoria liczebników jest teorią wyłącznie stosującą się do systemów zapisu cyfr naśladujących system cyfr arabskich.[31]

Logika organizująca przetwarzanie struktur głębokich liczebników na gruncie danego systemu ich zapisu powinna ustalać: (i) zupełność cyfrową systemu, polegającą na tym, że każda liczba naturalna jest desygnowana przez przynajmniej jeden liczebnik na gruncie danego systemu zapisu liczebników; (ii) kryteria równoważności struktur głębokich z uwagi na ich kodesygnacyjność; (ii) kryteria porządku struktur głębokich liczebników pozwalające na rozstrzyganie dla dwóch dowolnych liczebników tego, który z nich desygnuje większą liczbę[32]. Spełnienie wymienionych trzech warunków przez dowolny system reguł organizujących przetwarzanie danego systemu reprezentacji liczebnikowych zakodowanych w umyśle umożliwia to, że umysł jest w stanie używać liczebników (zarówno cyfrowych, jak i w sensie werbalnym) w aktach obliczeniowych.

---

[30] W cyfrach: „I", „II", „III", znak „I" występuje na pierwszej pozycji syntaktycznej; w cyfrze „IV" ten sam znak występuje już na drugiej pozycji syntaktycznej (wyznaczonej przez funktor pozycji piątki", w cyfrze zaś „IX" występuje on na pozycji dziesiątek.

[31] Takie systemy mogą zostać zdefiniowane jako respektujące zasadę, zgodnie z którą nie istnieją ograniczenia syntaktyczne występowania elementarnych cyfr na jakichkolwiek pozycjach syntaktycznych, czyli że każdy funktor pozycji może wiązać poprawnie każdą cyfrę elementarną.

[32] W arytmetyce kognitywnej wskazuje się, że kompetentny umysł ludzki jest w stanie w sposób bezpośredni, bez dokonywania inferencji logicznych, porównać dwa liczebniki i stwierdzić to, który z nich oznacza większą liczbę. Nie trzeba przeprowadzać dowodów, żeby wiedzieć, iż 999 jest większe od 10 (to się widzi). Wielu badaczy wskazuje na istnienie zmysłu liczby (*number sense*) pośród naszych ludzkich władz poznawczych, odpowiedzialnego za intuicyjne, zautomatyzowane czy też bezpośrednie pojmowanie niektórych faktów matematycznych (zob. Berch, D. B. 2005; autor ten wymienia ponad dwadzieścia dyspozycji zmysłu liczby; jedną z nich jest dyspozycja do zautomatyzowanego porównywania wielkości liczbowych). Inny kognitywista, M. Giaquinto, odróżnia „znajomość" liczb poprzez opis od „znajomości" poprzez zażyłość czy też bezpośrednie jej ujęcie (*acquaintance*). Co więcej, odróżnia on rozpoznawanie liczności od ich detekcji. Zmysł liczby „pracuje" bardziej jak detektor niż jak maszyna licząca (Giaquinto 2001).

Spełnienie pierwszego warunku wymaga istnienia funktora pozycji jedności oraz liczebnika oznaczającego liczbę (liczność lub wielkość) jeden na gruncie danego systemu liczebników. Dysponując takim liczebnikiem, umysł jest w stanie zawsze wygenerować liczebnik oznaczający liczbę o jeden większą od dowolnej liczby według zasady: *dany liczebnik i jeden*. Struktury głębokie takich liczebników będą manifestowały następujący kształt: $P[\alpha, j[1]]$, gdzie α jest składnikiem struktury głębokiej $P[\alpha]$ liczebnika na wejściu. Niech będzie dany, dla przykładu, liczebnik o postaci: *tuzin tysięcy pięćset i trzy kopy*, którego struktura głęboka posiada kształt: $P[o_{12}o_{1000}o_{100}[5], o_{60}[3]]$, gdzie o_{12}, o_{1000}, o_{100}, o_{60}, stanowią kolejno funktory pozycji: tuzinów, tysięcy, setek oraz kop. Wówczas z tego liczebnika, dysponując liczebnikiem *jeden*, umysł jest w stanie wygenerować liczebnik o postaci: *tuzin tysięcy pięćset i trzy kopy oraz jeden*, posiadający strukturę głęboką: $P[o_{12}o_{1000}o_{100}[5], o_{60}[3], o_1[1]]$, gdzie o_1 jest funktorem pozycji jedności. Z uwagi na zasadę zupełności cyfrowej, w każdym systemie liczebników musi występować elementarny liczebnik: *jeden* i funktor pozycji jedności. Dotychczas nie odkryto historycznych systemów zapisu cyfr, w których liczebnik oznaczający liczbę jeden, byłby liczebnikiem syntaktycznie derywowanym (pochodnym). Mówiąc metaforycznie, umysł rodzi się z jedynką i jednością.[33]

Spełnienie dwóch ostatnich warunków wymaga standaryzacji danego systemu zapisu liczebników. System zapisu liczebników posiada charakter systemu wystandaryzowanego wówczas, kiedy w każdej klasie równoważnych desygnacyjnie liczebników istnieje dokładnie jeden liczebnik standardowy, charakteryzujący się tym, że struktura głęboka jego reprezentacji mentalnej odznacza się określonymi cechami konstrukcyjnymi. Cyfry arabskie funkcjonują, w większości językowych systemów zapisu liczb, jako właśnie takie wystandaryzowane liczebniki dla klas równoważnych liczebników. Z każdym takim systemem można skorelować nieskończenie wiele sposobów jego standaryzacji. Tak zwane układy zapisu cyfr stanowią właśnie metody standaryzacji liczebników. Układ dziesiątkowy jest odmiennym sposobem standaryzacji liczebników niż układ, na przykład, piątkowy czy ósemkowy. Można skonstruować sposób standaryzacji liczebników bazujący na układzie cyfrowym, w którym używa się tysiąc, a nawet milion, cyfr elementarnych. W układzie dziesiątkowym, liczebnik: *tuzin tysięcy pięćset i trzy kopy*, daje się zredukować do standardowego liczebnika o postaci: *6000180*. Liczebnik o postaci: *sześć milionów sto osiemdziesiąt*, jest również redukowalny do cyfrowego liczebnika *6000180*. W układzie czwórkowym (zbudowanym przy pomocy czterech cyfr elementarnych: *0*, *1*, *2*, *3*) liczebnikowi: *tuzin i jeden*, odpowiada standardowy liczebnik cyfrowy o postaci: *31*. Liczebnik: *trzynaście* również jest redukowalny do liczebnika cyfrowego *31* w układzie czwórkowym. To samo dotyczy liczebnika: *dwie szóstki i jeden*.

---

[33] To kontrastuje z sytuacją w arytmetyce Peano, gdzie liczebnik *jeden* jest zdefiniowaną stałą indywiduową jako nazwa wartości funkcji następnika (Seq) zastosowanej do liczby zero.

Kryterium równoważności dwóch liczebników ma więc charakter redukcyjny. Jeśli dwa liczebniki są redukowalne do swoich standardowych struktur głębokich i te struktury są syntaktycznie identyczne, to wówczas oba liczebniki są desygnacyjnie równoważne. Każdy więc wystandaryzowany system zapisu liczebników wymaga od umysłu posługiwania się wystandaryzowanymi reprezentacjami cyfr, zakodowanymi w umyśle. Strukturę głęboką standardowego liczebnika w układzie dziesiątkowym o postaci: *12012*, można przedstawić następująco: $P[o_{10000}[1], o_{1000}[2], o_{100}[0], o_{10}[1], o_{1}[2]]$. To, że każdy kompetentny użytkownik arabskiego sytemu zapisu cyfr jest w stanie przyporządkować różnym liczebnikom, takim, na przykład, jak: *tuzin tysięcy i tuzin*, *dwanaście tysięcy dwanaście*, *sto dwadzieścia setek i dwanaście*, strukturę głęboką liczebnika standardowego, wskazuje na to, że w umyśle musi funkcjonować program generacji takich wystandaryzowanych reprezentacji (o określonych syntaktycznych cechach konstrukcyjnych). Takie struktury głębokie, jak na przykład: $P[o_{12}o_{1000}[1], o_{10}[1], o_{1}[2]]$, $P[o_{12}o_{1000}[1], o_{12}[1]]$, nie posiadają kształtu wystandaryzowanych struktur głębokich. Są one jednak desygnacyjnie równoważne ze strukturą: $P[o_{10000}[1], o_{1000}[2], o_{100}[0], o_{10}[1], o_{1}[2]]$. Umysł rozstrzyga to, dokonując redukcji niestandardowych struktur głębokich do ich wystandaryzowanych, desygnacyjnie równoważnych postaci. Redukcje takie rządzone są określonymi regułami składającymi się na „logikę liczebników”. Podsumowując, w umyśle funkcjonują dwa operacyjne moduły określone na strukturach głębokich liczebników. Pierwszy moduł jest generatorem wystandaryzowanych struktur głębokich, drugi zaś jest programem redukcji dowolnych struktur głębokich do ich wystandaryzowanych odpowiedników.

Funkcjonowanie generatora wystandaryzowanych struktur głębokich wymaga spełnienia dwóch warunków: (i) o wyróżnionej klasie kanonicznych funktorów pozycji; (ii) o uporządkowaniu elementarnych znaków cyfrowych. Oznacza to, że umysł konstruuje zbiór kanonicznych funktorów pozycji według określonego algorytmu oraz narzuca liniowy porządek na skończony zbiór cyfr elementarnych. Generator standaryzacji posiada więc dwa submoduły: (i) syntezator kanonicznych funktorów pozycji oraz (ii) generator cyfr elementarnych.

Syntezator kanonicznych funktorów pozycji na gruncie danego systemu zapisu liczebników jest działającym rekurencyjnie mechanizmem, który wyróżnia z uniwersum wszystkich funktorów pozycji tylko i wyłącznie funktory kanoniczne na gruncie danego sposobu standaryzacji liczebników. Ponieważ z każdym systemem zapisu liczebników jest skorelowanych wiele takich sposobów ich standaryzacji, tak też z każdym systemem zapisu liczebników jest skorelowanych wiele syntezatorów kanonicznych funktorów pozycji. Klasa tych funktorów pozycji jest liniowo uporządkowaną relacją $<$ w taki sposób, że $f < g$ (gdzie f i g są dowolnymi kanonicznymi funktorami pozycji na gruncie danego sposobu standaryzacji liczebników) wtedy, gdy dla dowolnych cyfr elementarnych x oraz y, liczba desygnowana przez strukturę $P[g[x]]$ jest większa od liczby desygnowanej przez strukturę $P[f[y]]$. Algorytm generujący kanoniczne funktory pozycji syntaktycznej musi bazować na co najmniej dwóch pierwotnych, kanonicznych funktorach pozycji. Funktor pozycji jedności jest funktorem kanonicznym na gruncie każdego sposobu standaryzacji liczebników. Na przykład, jeśli przyjmie się jako pierwotne funktory pozycji syntaktycznych w układzie dziesiątkowym: *j*, *d* (jedności oraz dziesiątek), to wówczas można rekurencyjnie wygenerować nieskończony ciąg kanonicznych funktorów pozycji w następujący sposób: *j*, *d*, *dd*, *ddd*, *dddd* itd. Pomiędzy kolejnymi wyrazami w tym ciągu zachodzi relacja porządku < . W tym wypadku syntezator kanonicznych funktorów pozycji „pracuje" w oparciu o rekurencyjny mechanizm iteracji funktora *dziesiątek*. Niektóre z tych funktorów, wygenerowanych na mocy iteracji funktora *dziesiątek*, definiują funktory wtórne, które są zleksykalizowane w wielu systemach zapisu liczebników. Na przykład, funktor *setek* jest podwójną iteracją funktora *dziesiątek*, funktor *tysięcy* jest potrójną iteracją funktora *dziesiątek*, funktor milionów jest sześciokrotną iteracją funktora *dziesiątek*. Jednakże poczwórna iteracja funktora *dziesiątek* nie jest zleksykalizowana w systemie liczebników w sensie werbalnym na gruncie wielu języków indoeuropejskich. W języku polskim nie funkcjonuje odrębny leksem na oznaczenie funktora poczwórnej iteracji funktora *dziesiątek*. Jeśli danego funktora pozycji nie da się zdefiniować według algorytmu generowania funktorów kanonicznych, to wówczas taki funktor nie jest funktorem kanonicznym na gruncie danej procedury standaryzacyjnej. W ten sposób można pokazać, dlaczego funktor tuzinów wprowadzony do systemu zapisu liczebników arabskich (w układzie dziesiętnym) nie jest funktorem kanonicznym.

Drugi moduł, nazwany generatorem cyfr elementarnych, wyodrębnia z uniwersum wszystkich liczebników cyfry elementarne, które posiadają, zleksykalizowane odrębnymi leksemami, swoje odpowiedniki w postaci liczebników w sensie werbalnym. W różnych systemach zapisu liczebników, zbiory cyfr elementarnych różnią się. [34] Mimo to w każdym z takich systemów cyfra „1" (lub odpowiadający jej inny znak) funkcjonuje jako znak elementarny. We wszystkich systemach naśladujących system zapisu cyfr arabskich, każda cyfra elementarna może być poprawnie wiązana przez dowolny funktor pozycji syntaktycznej. Zbiór cyfr elementarnych w danym systemie zapisu liczebników wyznacza kanoniczną długość każdej osi liczbowej, semantycznie skorelowanej z każdym funktorem pozycji. Długość ta wyznacza iteracyjne sposoby standaryzacji liczebników na gruncie danego systemu. Na przykład, dla systemu z jedynie trzema cyframi elementarnymi: „0", „1", „2" funktor pozycji dziesiątek nie jest funktorem kanonicznym na gruncie dowolnego sposobu standaryzacji liczebników. Mechanizm wyznaczający możliwe sposoby standaryzacji liczebników z uwagi na długość kanoniczną osi liczbowych skorelowanych z funktorami

---

[34] Na przykład, w języku Api, który jest używany na Nowych Hebrydach, oś jedności obejmuje pięć elementarnych słów. Istnieją plemiona, których system zapisu obejmuje dwadzieścia elementarnych słów (Eskimosi żyjący na Grenlandii, wszystkie ludy prekolumbijskiej Ameryki Środkowej i inne). Najczęściej spotykanym systemem jest ten, którego oś jedności działa na dziesięciu elementarnych cyfrach lub słowach [Ifrah, s. 123-124]. Sumerowie używali sześćdziesiątkowego systemu zapisu liczb [Ifrah, s. 263-275]. Najprawdopodobniej jest to system, w którym oś jedności — w porównaniu z dotychczas poznanymi systemami zapisu liczebników — jest „najdłuższa".

pozycji można skonceptualizować następująco: Jeśli kanoniczna długość funktorów pozycji jest n-elementowa (moduł generacji cyfr elementarnych generuje ich n-elementowy zbiór), to pierwotnym, kanonicznym funktorem pozycji w danym systemie zapisu liczebników, obok funktora pozycji jedności, jest funktor pozycji n-tek o_n. Łatwo można wykazać, że funktor pozycji *dziesiątek* nie jest, na przykład, żadną iteracją funktora pozycji *trójek*. Generator elementarnych cyfr narzuca na zbiór wygenerowanych cyfr relację porządku liniowego taką, że dla dowolnych dwóch elementarnych znaków cyfrowych x, y, $x < y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego funktora pozycji f danego systemu zapisu, liczba oznaczana przez strukturę $P[f[y]]$ jest większa od liczby oznaczanej przez $P[f[x]]$. Ta właściwość wystandaryzowanych struktur głębokich umożliwia umysłowi dokonywanie porównań liczebników z uwagi na to, czy dany liczebnik jest większy czy mniejszy od drugiego liczebnika bez przeprowadzania operacji inferencyjnych (dedukcyjnych).

Umysł, dysponując wystandaryzowanymi strukturami głębokimi, wyłącznie na podstawie ich „wyglądu” (czyli na gruncie analizy syntaktycznej) jest w stanie rozstrzygnąć, która z nich desygnuje większą liczbę. Niech będą dane dwie cyfry arabskie o tej samej długości: „2876” oraz „2218”. Umysł jest w stanie w oparciu o „wygląd” ich wystandaryzowanych struktur głębokich: (i) $P[o_1[6], o_{10}[7], o_{100}[8], o_{1000}[2]]$, (ii) $P[o_1[8], o_{10}[1], o_{100}[2], o_{1000}[2]]$, rozstrzygnąć to, która z przywołanych cyfr desygnuje większą liczbę. Analizując ostatnie składniki (których odpowiednikami w strukturze powierzchniowej są pierwsze znaki cyfrowe) obu struktur, umysł „po ich wyglądzie” stwierdza, że są identyczne. Następnie porównuje składniki bezpośrednio poprzedzające ostatni element w obu strukturach. Na podstawie wyglądu stwierdza, że w pierwszej strukturze na osi *setek* występuje znak cyfrowy „8”, w drugiej zaś — na tej samej osi występuje „2”. Ponieważ między obu cyframi elementarnymi zachodzi relacja porządku: „2” < „8”, umysł rozstrzyga, że cyfra „2876” desygnuje większą liczbę niż liczba desygnowana przez „2218”. Gdyby na pozycji setek występowałby ten sam znak cyfrowy, wówczas umysł rozpocząłby analizę pozycji dziesiątek.

5. UWAGI KOŃCOWE

Główne tezy zaprezentowane w artykule można streścić następująco:

(1) Każde wyrażenie liczebnikowe użyte w określonej czynności referencji liczebnikowej posiada dwoistą strukturę syntaktyczną obejmującą: strukturę głęboką i warstwę wypowiedzeniową.

(2) W umyśle kodowane są obu typów reprezentacje syntaktyczne liczebników: reprezentacje struktur głębokich oraz reprezentacje struktur powierzchniowych.

(3) Struktury głębokie liczebników zbudowane są z leksemów cyfrowych, funktorów pozycji syntaktycznych oraz funktora planu pozycyjnego.

(4) Funktor planu pozycyjnego liczebnika jest funktorem anadycznym, którego argumentami w strukturze głębokiej danego liczebnika są wszystkie wyrażenia utworzone przy pomocy funktorów pozycji składniowych.

(5) Format dowolnej struktury głębokiej dowolnego liczebnika (zarówno cyfrowego, jak i w sensie werbalnym) obejmuje: (i) jego plan pozycyjny, (ii) pozycje syntaktyczne oraz (iii) leksemy liczebnikowe występujące na pozycjach syntaktycznych w planie pozycyjnym liczebnika.

(6) Dowolne wyrażenie liczebnikowe jest skorelowane z wieloma równoważnymi desygnacyjnie strukturami głębokimi.

(7) Reprezentacje mentalne o określonych strukturach głębokich są syntetyzowane przez umysł podczas wykonywania czynności referencji. Spośród wielu reprezentacji mentalnych posiadających różniące się struktury głębokie, skorelowanych z liczebnikiem użytym w akcie referencji numerycznej, umysł aktywuje jedną z nich.

(8) Nie wszystkie struktury głębokie liczebników są transformowalne na liczebniki cyfrowe.

(9) Na strukturach głębokich liczebników określona jest relacja równoważności desygnacyjnej.

(10) W każdej klasie równoważnych desygnacyjnie liczebników występuje liczebnik wystandaryzowany na gruncie danego sposobu standaryzacji liczebników.

(11) Istnieją reguły przetwarzania struktur głębokich liczebników zachowujące ich równoważność desygnacyjną.

(12) W umyśle funkcjonują moduły generacji, standaryzacji i przetwarzania reprezentacji mentalnych liczebników z uwagi na charakter ich struktur głębokich.

Przedstawione tezy składają się na paradygmat formalnej teorii liczebników, która zostanie zaprezentowana w drugiej części pracy. Teoria ta stanowić będzie narzędzie konstrukcji modelu czynności referencji liczebnikowej.

BIBLIOGRAFIA

Ajdukiewicz K. (1935/85), „O spójności syntaktycznej", *Język i poznanie*, t. I, Warszawa, PWN, s. 222-242.

Ajdukiewicz K. (1960), *Związki składniowe między członami zdań oznajmujących*, „Studia Filozoficzne", Nr 6 (21), 1960, s. 73-87.

Anderson S. W., Damasio A. R., Damasio H. (1990), *Troubled letters but not numbers: Domain specific cognitive impairments following focal damage in frontal cortex*, „Brain", Vol. 113, s. 749-766.

Berch, D. B. (2005), *Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities*, „Journal of Learning Disabilities", Vol. 38(4), s. 333-339.

Bradley, M. C. (1986), *Geach and Strawson on Negating Names*, „The Philosophical Quarterly", Vol. 36, Nr 142, s. 16-28.

Bultinck B. (2005), *Numerous Meanings: The Meaning of English Cardinals and the Legacy of Paul Grice*, Elsevier: Amsterdam — Boston — Heidelberg — London — New York — Oxford — Paris — San Diego — San Francisco — Singapore — Sydney — Tokyo.

Buszkowski W. (1989), *Logiczne podstawy gramatyk kategorialnych Ajdukiewicza-Lambeka*, Warszawa, PWN.

Carey S. (2001), *Cognitive Foundations of Arithmetic: Evolution and Ontogenesis*, „Mind & Language", Vol. 16, No. 1, s. 37-55.

Carey S. (2009), *Where Our Number Concepts Come From*, „The Journal of Philosophy", Vol. 106, Nr 4, s. 220-254.

Clarke, Jr. D. S. (1983), *Negating The Subject*, „Philosophical Studies", Vol. 43, s. 349-353.

Dehaene S., Akhavein R. (1995), *Attention, Automaticity, and Levels of Representation In Number Processing*, „Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition", Vol. 21, No. 2, s. 314-326.

Dehaene S. (2001), *Precis of The Number Sense*, „Mind & Language", Vol. 16, No. 1, s. 16- 36.

Dehaene S. (2003), *The neural basis of the Weber-Fechner law: a logarithmic mental number line*. „Trends in Cognitive Science", Vol. 7, s. 145-147.

Fias W., Brysbaert M., Geypens F., d'Ydewalle G. (1996), *The Importance of Magnitude Information in Numerical Processing: Evidence from the SNARC Effect*, „Mathematical Cognition", Vol. 2(1), s. 95-110.

Fias W. (2001), *Two routes for the processing of verbal numbers: evidence from the SNARC effect*, „Psychological Research", Vol. 65, s. 250-259.

Giaquinto, M. (2001), *Knowing Numbers*, „The Journal of Philosophy", Vol. 98, s. 5-18.

Ifrah G. (2006), *Historia powszechna cyfr T.I*, (przeł. K. Marczewska), Wydawnictwo W.A.B., Warszawa.

Ito Y., Hatta T. (2003), *Semantic processing of Arabic, Kanji, and Kana numbers: Evidence from interference in physical and numerical size judgments*, „Memory & Cognition", Vol. 31(3), s. 360-368.

Karolak S. (1990), *Kwantyfikacja a determinacja w językach naturalnych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Krysztofiak W. (1994), *Negacja, podmiot, predykat i teza Geacha*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego. Filozofia", Nr 5, s. 23-38.

Krysztofiak W. (2008), *Modalna arytmetyka indeksowanych liczb naturalnych: możliwe światy liczb*, „Przegląd Filozoficzny — Nowa Seria", R. 17, Nr 2(66), s.79-107.

Krysztofiak W. (2010), *Multi-temporalne struktury obliczeniowe. Indeksowane liczby naturalne w świetle arytmetyki kognitywnej*, „Filozofia Nauki", Rok XVIII, Nr 4(72), s. 23-47.

Krysztofiak W. (2011), *Indexed Natural Numbers in Mind: A Formal Model of the Basic Mature Number Competence*, „Axiomathes", DOI 10.1007/s10516-011-9149-9.

Lyons J. (1984), *Semantyka. Tom 1*, (przeł. A. Weinsberg), Warszawa, PWN.

McCloskey M., Caramazza A., Basili A. (1985), *Cognitive Mechanisms in Number Processing and Calculation: Evidence from Dyscalculia*, „Brain and Cognition", Vol. 4, s. 171-196.

Morton A., (1975), *Complex Individuals and Multigrade Relations*, „Noûs", Vol. 9, No. 3, s. 309-318.

Noël M., Seron X. (1993), *Arabic number reading deficit: A single case study or when 236 is read (2306) and judged superior to 1258*, „Cognitive Neuropsychology", Vol. 19, s. 317-339.

Oliver A., Smiley T. (2004), *Multigrades Predicates*, „Mind", Vol. 113, No. 452, s. 609-681.

Paśniczek J. (2007), *Teza Ramseya. Nieodróżnialność przedmiotów i własności w logice*, „Filozofia Nauki", Rok XV, Nr 2(58), s. 5-31.

Pica P., Lemer C., Izard V., Dehaene S. (2004), *Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group*, „Science", 306, s. 499-503.

Ramsey F. P. (1950), „Universals" (s. 112-134) [w:] Ramsey F. P. *The Foundation of Mathematics and other Logical Essays*, (red. R. B. Braithwaite; przedmowa: G. E. Moore), London, Routledge & Kegan Paul Ltd.

Rips L. J., Bloomfield A., Asmuth J. (2008), *From numerical concepts to concepts of number* „Behavioral and Brain Sciences", Vol. 31, s. 623-687.

Rutkowski P. (2000), *Składnia polskich grup liczebnikowych: próba opisu formalnego*, „Poradnik Językowy", Vol. 8, s. 10-28.

Semadeni Z. (2002), *Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne*, „Dydaktyka Matematyki", Vol. 24, s. 41-92.

Skemp, R. (1982), *Communicating mathematics: surface structures and deep structures*, „Visible Language", Vol. 16, Number 3, s. 281-288.

Spelke E. S., Kindler K. D. (2007), *Core knowledge*, „Developmental Science", Vol. 10, No. 1, s. 89-96.

Tałasiewicz M. (2006), *Filozofia składni*, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe *Semper*.

Zebian S. (2005), *Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: the SNARC effect and the REVERSE SNARC effect in English and Arabic monoliterates, biliterates, and illiterate Arabic speakers*, „Journal of Cognition and Culture", Vol. 5(1-2), s. 165-190.