Marcin Poręba

Poglądy Kanta na matematykę a konstruktywizm

Filozofia Nauki 20/1, 93-102

2012

Filozofia Nauki
Rok XX, 2012, Nr 1(77)

Marcin Poręba

Poglądy Kanta na matematykę a konstruktywizm[1]

W potocznej świadomości ogółu filozofów, jak również w bardziej specjalistycznych kręgach filozofów matematyki, zwłaszcza tych zainteresowanych historią swej dyscypliny, utarło się myślenie o różnych dawnych filozofiach matematyki, w tym o filozofii matematyki Kanta. Warto jednak zauważyć, że mówiąc o „filozofii matematyki" Kanta, i odnosząc to, co tak nazywamy, do dwudziestowiecznych nurtów w rodzaju logicyzmu, konstruktywizmu czy formalizmu, dopuszczamy się dwóch nadużyć, a w każdym razie dwóch ewidentnych anachronizmów. Po pierwsze, sugerujemy, że Kant posiadał jakąkolwiek filozofię matematyki w sensie porównywalnym do Brouwera czy Hilberta, tj. że filozofię matematyki uprawiał i że zajmował jakieś stanowisko przynajmniej w części właściwych dla niej zagadnień. Po drugie, zestawiamy Kantowskie uwagi o matematyce z nurtami w filozoficznych podstawach matematyki, których korzeni — nawet przy najbardziej liberalnym podejściu do kwestii historycznych — nie sposób szukać wcześniej niż w ostatnich dekadach XIX wieku. Co więcej, jak się zdaje, Kant nie mógł nawet znać matematycznych, filozoficznych i historycznych *przesłanek* powstania intuicjonizmu i innych dwudziestowiecznych stanowisk w filozofii matematyki, przesłanki te bowiem miały się dopiero wyłonić w toku rozwoju dziewiętnastowiecznej matematyki i filozofii. Nie mógł zatem, niejako zawczasu, zająć żadnego z tych stanowisk ani wziąć udziału w toczących się między nimi sporach, tak jak mogli to już czynić Frege, Cantor czy Hilbert.

---

[1] Tezy zawarte w niniejszym artykule miałem okazję prezentować na sympozjum „Immanuel Kant — ontologia i teoria poznania" (Kraków, 4 czerwca 2011 r.). Ostateczna wersja tekstu wiele zawdzięcza uwagom anonimowego recenzenta „Filozofii Nauki", za które przy tej sposobności serdecznie dziękuję.

Można oczywiście mówić o Kantowskiej filozofii matematyki w sensie ogólniejszym i mniej technicznym, w jakim mówi się np. o filozofii matematyki Platona, a nawet Hume'a. Nie wydaje się jednak, by dawało to pole do jakichś ciekawych dociekań nad relacją myśli Kanta do współczesnych dyskusji w filozofii matematyki, chyba że na podobnej zasadzie, na jakiej np. dostrzega się pokrewieństwa między koncepcją idei Platona a logicyzmem w podstawach matematyki, co jest niewiele mówiącym sloganem, w dodatku mylącym, gdyż przedmiotów matematyki Platon nie umieszczał w sferze idei. Należy w ogóle z wielką ostrożnością traktować wszelkie rozważania na temat tych dawnych filozofii matematyki, przeważnie są one projekcją współczesnych zagadnień w przeszłość, tak więc ów ogólniejszy sens, w jakim mówimy o filozofii matematyki, jest wtórny wobec węższego i bardziej technicznego sensu współczesnego.

Sprawę dodatkowo pogarsza następująca okoliczność. Otóż Kant nie uprawiał filozofii matematyki nie tylko dlatego, że nie mógł jej uprawiać z racji historycznych, lecz także dlatego, że nawet gdyby mógł, uprawiać by jej pewnie nie chciał — matematyka nigdy, ani w okresie przedkrytycznym, ani w różnych fazach okresu krytycznego, nie stanowiła dlań samoistnego przedmiotu namysłu. O matematyce Kant zwykł mówić w dwóch podstawowych kontekstach. Po pierwsze — zarówno w okresie przedkrytycznym, jak i krytycznym — próbując odpowiedzieć na pytanie o naturę i właściwą metodę poznania filozoficznego. Uważał bowiem, że dogodnym sposobem dotarcia do owej natury i metody jest skontrastowanie poznania filozoficznego z matematycznym. Po drugie, to już głównie w *Krytyce czystego rozumu*, argumentując na rzecz swej koncepcji przestrzeni i czasu jako stanowiącej istotny składnik właściwego wytłumaczenia aprioryczności, a zarazem syntetyczności twierdzeń matematyki.

W obu przypadkach matematyka została przez Kanta potraktowana raczej instrumentalnie. W pierwszym, gdzie chodzi o jej przeciwstawienie filozofii, Kant zmaga się przede wszystkim z pewną koncepcją metafilozoficzną leżącą u podstaw nowożytnych prób wzorowania filozofii na matematyce. Kant wykazuje, że takie próby są z przyczyn zasadniczych skazane na niepowodzenie, gdyż nie respektują odmienności pojęć występujących w obu dyscyplinach. Matematyk, powiada Kant, konstruuje swe pojęcia w naoczności, tzn. w pewnym sensie dopiero je tworzy, tymczasem filozof operuje na pojęciach zastanych, o ustalonym poza filozofią znaczeniu, które może, a nawet powinien, precyzować, nie może go jednak zasadniczo zmienić ani od podstaw ustanowić. Zadaniem filozofa jest dociekanie natury tego, do czego owe pojęcia się odnoszą.[2] W sformułowaniach tych kryje się bardzo poważna problematyka, o której będę tu jeszcze mówić, gdyż teza o konstrukcji pojęć w na-

[2] Zob. I. Kant, *Rozprawa o wyraźności zasad naczelnych teologii naturalnej i filozofii moralnej*, tłum. K. Rak, w: I. Kant, *Pisma przedkrytyczne*, Wydawnictwo Rolewski, Toruń 1999, s. 56-59. Por. I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, A712-717, B740-745. Tu i w dalszym ciągu *Krytykę czystego rozumu* cytuję, podając strony I i II wydania oryginalnego.

oczności wyraźnie podsuwa skojarzenia z intuicjonizmem i konstruktywizmem. Zanim jednak rozważę, na ile skojarzenia te są trafne, chciałbym zauważyć, że wszystko, co we wskazanych, metateoretycznych kontekstach Kant mówi o matematyce, to o wiele za mało, by mu jakąkolwiek filozofię matematyki przypisać, zbyt wiele kwestii dotyczących samej matematyki zakłada on tu jako bezdyskusyjnie oczywistych. Może to banał, ale warto o nim pamiętać: Kant należy do epoki, w której naprawdę jeszcze nie wiedziano, jak problematyczna może być matematyka, i nawet nie podejrzewano, jak zasadnicze kwestie, również filozoficzne, trzeba będzie kiedyś pod jej adresem postawić.

W drugim z wymienionych przypadków, tj. w kontekście argumentowania na rzecz swej koncepcji przestrzeni i czasu, Kant nie dodaje w zasadzie niczego do wspomnianych już uwag o roli konstrukcji w matematyce. Mogłoby się wprawdzie wydawać, że takim dodatkiem jest teza o apriorycznym, a zarazem syntetycznym charakterze twierdzeń matematyki. Jednak sposób, w jaki Kant tezę tę uzasadnia, o ile można tu w ogóle mówić o uzasadnieniu, wyraźnie sugeruje, że ona po prostu wynika logicznie z rozważań o konstrukcji, a więc niczego do nich nie wnosi.[3] Jeśli chodzi natomiast o transcendentalną idealność czasu i przestrzeni, to nie jest ona przez Kanta pomyślana jako specjalne rozwiązanie na użytek dociekań nad podstawami matematyki, lecz stanowi pewną globalną koncepcję ontologiczną i epistemologiczną, wyrosłą przede wszystkim z refleksji nad naturą przestrzeni i czasu, w odpowiedzi m.in. na dyskusje na pograniczu filozofii i fizyki. Dyskusje te były integralną częścią rozwoju nowożytnej fizyki, a Kant był pod szczególnym wrażeniem sporów prowadzonych wokół koncepcji Newtona, w których jak wiadomo sam brał udział i już w okresie przedkrytycznym proponował rozwiązania mające w założeniu jakoś pogodzić strony tych sporów.[4] Koncepcja z *De mundi sensibilis*... legła u podstaw późniejszej teorii przestrzeni i czasu w *Krytyce czystego rozumu*, tyle że tutaj Kant obudował ją nową teorią poznania, w tym zwłaszcza jego aspektów dyskursywnych, związanych z sądzeniem. Teoria przestrzeni i czasu jako form oglądania promieniuje na wszystkie obszary epistemologii i ontologii Kantowskiej okresu krytycznego, w tym na jego koncepcję matematyki, gdzie zdaniem filozofa znajduje

[3] Kantowskie uzasadnienie tezy o apriorycznej syntetyczności twierdzeń matematyki składa się z dwóch kroków: (1) deklaracji, że żadne takie twierdzenie nie jest analityczne, tj. — zgodnie z Kantowskim pojmowaniem analityczności — nie wynika logicznie z rozbioru zawartych w nim pojęć; deklaracji tej Kant nie dowodzi w ogólności, lecz ilustruje ją kilkoma przykładami z elementarnej arytmetyki i geometrii, oraz (2) scenariusza opisującego to, jak dochodzimy do poznania koniecznej prawdziwości twierdzeń matematycznych. To właśnie ten krok jest wyraźnie zależny od koncepcji matematyki jako konstrukcji — z jednej strony wynika z niej logicznie, z drugiej zaś bez jej założenia staje się wysoce nieoczywisty. Zob. I. Kant, *Krytyka czystego rozumu*, B14-17.

[4] Czynił to m.in. w pracach *Monadologia physica* z 1756 r. (wyd. polskie w: I. Kant, *Dzieła zebrane*, Wydawnictwo UMK, Toruń 2010, t. I, tłum. A. Pacholik-Żuromska, s. 437-454), zwłaszcza tw. VI-VIII oraz *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis,* wyd. pol. w: *Pisma przedkrytyczne*, op. cit., tłum. A. Banaszkiewicz, s 155-166.

szczególne potwierdzenie. Wydaje się zatem, że refleksja nad matematyką była nie tyle punktem wyjścia Kantowskiej reinterpretacji przestrzeni i czasu, ile raczej jednym z jej punktów dojścia, czy może lepiej zastosowań, choć nie jest dla mnie w pełni jasne, czy wskutek zastosowania tej koncepcji do matematyki Kant uzyskał jakieś nowe wglądy w naturę tej ostatniej, wykraczające poza wyznawany już wcześniej pogląd o roli konstrukcji w poznaniu matematycznym, czy też ograniczył się po prostu do uzyskania w matematyce wsparcia dla koncepcji epistemologicznej o znacznie szerszym zasięgu.

Skoro już padło tu określenie „refleksja nad matematyką", pozwolę sobie na małą dygresję dotyczącą kwestii rzadko poruszanej, a mającej w moim przekonaniu fundamentalne znaczenie dla zrozumienia roli, jaką matematyka odegrała w kształtowaniu się myśli Kanta. Otóż uderzające jest to, że gdy Kant mierzy się z filozoficznymi problemami podstaw matematyki, analizuje przykłady matematyki skrajnie elementarnej — elementarnej geometrii i arytmetyki. Strategia taka może być racjonalna, o ile stoi za nią uzasadnione przekonanie, że matematyka właściwa, a więc to wszystko, co zaczyna się *po* matematyce elementarnej, nie wnosi żadnych istotnie nowych pojęć czy założeń, które wymagałyby odrębnego filozoficznego zbadania. Z podobnym przekonaniem mamy później do czynienia np. u Wittgensteina, który zarówno w *Traktacie*, jak i w późniejszych pismach, stoi na stanowisku, że wszystko, co z filozoficznego punktu widzenia da się istotnego powiedzieć o matematyce, da się powiedzieć już na materiale najbardziej elementarnych operacji arytmetycznych.[5] Osobiście nie podzielam tego poglądu, rozumiem jednak jakoś jego ducha, ducha na wskroś redukcjonistycznego, a redukcjonizm wszak dla każdego filozofa ma pewien powab.

A teraz zapowiedziana dygresja: czy Kant brał w swej filozofii pod uwagę to, co w jego czasach *nie* było matematyką elementarną, a co kojarzy się z takimi choćby postaciami, jak Leibniz, Johann i Jacob Bernoulli czy K. L. Euler? Otóż sądzę, że tak, i że, co więcej, wpłynęło to w zasadniczy sposób na kształt filozofii krytycznej. To, że tak rzadko mówi się o tym w związku z tzw. Kantowską filozofią matematyki, w niemałym stopniu przyczyniało się zawsze do jej trywializacji. Ze współczesnej sobie wyższej matematyki Kant zaczerpnął trzy pojęcia, które stały się trzema filarami całej filozofii krytycznej: (1) pojęcie funkcji, które legło u podstaw Kantowskiej teorii sądów, pojęć, myślenia i podmiotowości, (2) pojęcie analityczności, które Kant rozciągnął z funkcji analitycznych badanych w matematyce na funkcje sądzenia, (3) pojęcie transcendentalności, któremu Kant nadał sens zupełnie inny niż tradycyjny, a więc nie czegoś ponadkategorialnego (transcendentaliów w tym sensie Kant nie uznawał[6]), lecz czegoś przekraczającego określone w pewien sposób środki opisu czy wyrazu. W takim sensie o obiektach transcendentnych mówiono w ówcze-

[5] Zob. L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, tłum. B. Wolniewicz, PWN, Warszawa 2000, tezy 6.2-6.24. Zob. też *Uwagi o podstawach matematyki*, tłum. M. Poręba, Wydawnictwo KR, Warszawa 2000.

[6] Zob. *Krytyka czystego rozumu*, B113-116.

snej analizie i teorii liczb. Kant dokonał tych zapożyczeń pojęciowych, jak sądzę, całkiem świadomie, będąc pod wrażeniem niesamowitego przyspieszenia rozwoju matematyki, przede wszystkim wskutek metodycznego zastosowania pojęcia funkcji, i żywiąc nadzieję, że może podobny sukces przyniesie ono w filozofii. Należy od razu zauważyć, że takie czerpanie pojęć z matematyki tylko pozornie stoi w sprzeczności z „niewzruszonym" przekonaniem Kanta, iż w filozofii nie wolno (a raczej nie sposób) wzorować się na matematyce.[7] Rzecz w tym, że pojęcia rodem z matematyki Kant wykorzystuje do analizowania pojęć bynajmniej nie matematycznych, jak np. „sąd", „pojęcie", „kategoria", „myślenie" etc., i w sposób bynajmniej nie matematyczny, a więc nie konstruując ich, lecz starając się głębiej zrozumieć ich sens zastany. To wielka szkoda, że prawie cała tradycja rozważań nad Kantowską filozofią matematyki, zarówno ta generalnie aprobatywna, jak i zdecydowanie krytyczna, nie próbuje łączyć tych dwóch wymiarów obecności matematyki w strukturze Kantowskiej filozofii krytycznej.

Przy czym oba wymiary nie są bynajmniej niepowiązane ze sobą. W tym bowiem, co zwykło się określać jako Kantowską filozofię matematyki, mamy do czynienia z zastosowaniem do twierdzeń i dowodów należących do matematyki elementarnej pewnych pojęć filozoficznych, przede wszystkim epistemologicznych, ale także ontologicznych (np. pojęć przestrzeni i czasu), które to pojęcia zostały przez Kanta uprzednio zanalizowane, doprecyzowane, a częściowo zredefiniowane, przy użyciu pojęć zaczerpniętych z matematyki, tyle że tym razem nie elementarnej, lecz jak na owe czasy niezwykle zaawansowanej. Ujmując rzecz nieco hasłowo, filozofia Kanta musiała zbliżyć się do matematyki, by wyłonić z siebie elementy filozofii matematyki.

Wróćmy teraz do tytułowej kwestii stosunku Kantowskiej koncepcji matematyki do konstruktywizmu[8]. Ponieważ pytanie o konstruktywizm filozofii Kanta stawiane bywa w bardzo ogólny sposób wykraczający nie tylko poza filozofię matematyki, lecz także poza epistemologię jako taką, m.in. w kierunku filozofii praktycznej, zacznę może od wskazania na związki między tymi ogólnymi sposobami rozumienia konstruktywizmu a jego rozumieniem w filozofii matematyki. Ponieważ związki te są ściśle, można żywić nadzieję, że naświetlenie relacji między filozofią matematyki Kanta a konstruktywizmem matematycznym dostarczy też wskazówek co do relacji

---

[7] Zob. np. *Rozprawa o wyraźności zasad*…, dz. cyt., s. 64-66, *Krytyka czystego rozumu*, A735-738, B764-766.

[8] Intuicjonizm i nawiązujące do niego nurty konstruktywistyczne w filozofii matematyki to obszerny i ważny rozdział dziejów dwudziestowiecznej filozofii i matematyki. Nie podejmuję się tutaj w najmniejszym stopniu oddania całej złożoności pojawiających się tu stanowisk, do czego uprawnia mnie to, że zajmuję się Kantem, a więc filozofem, z perspektywy którego większość specjalistycznych kwestii składających się na współczesny konstruktywizm byłaby i tak niezauważalna, a nawet zapewne niewyrażalna w jego języku. Dlatego w dalszym ciągu przyjmuję pewne bardzo ogólne rozumienie konstruktywizmu, dające się bez trudu zestawić z myślą Kanta. Rozumienie to jest bliskie intuicjonistycznym wersjom konstruktywizmu, z tym zastrzeżeniem, że na dalszy plan odsuwa psychologiczną stronę dowodu matematycznego.

między innymi obszarami myśli Kantowskiej a pojawiającymi się na tych obszarach ideami konstruktywistycznymi.

Przez konstruktywizm w odniesieniu do jakiejś dziedziny ludzkiej aktywności (poznawczej i nie tylko) proponuję rozumieć stanowisko, zgodnie z którym właściwa dla tej dziedziny własność wyróżniona (prawdziwość w dziedzinie poznawczej, dobro w dziedzinie etycznej, sprawiedliwość w dziedzinie prawnej itd.) sprowadza się do tego, że posiadający ją stan rzeczy został osiągnięty czy wytworzony zgodnie z pewną z góry określoną, mniej lub bardziej ściśle, procedurą. Tak sformułowana teza konstruktywizmu przeciwstawia się przede wszystkim poglądowi, zgodnie z którym posiadanie owej wyróżnionej wartości polega na adekwatnym odzwierciedlaniu, wyrażaniu lub egzemplifikowaniu czegoś, co jest od jakichkolwiek procedur rozstrzygania niezależne. Jak nazwać ten drugi pogląd? Otóż zależnie od tego, na jaki jego aspekt pragnie się zwrócić uwagę, bywa on nazywany realizmem, obiektywizmem, absolutyzmem, a nawet intuicjonizmem (w innym oczywiście sensie niż intuicjonizm w filozofii matematyki, który wszak sam jest pewną wersją konstruktywizmu).

Ten ogólnie rozumiany konstruktywizm ma się do intuicjonizmu czy konstruktywizmu w filozofii matematyki tak, że, po pierwsze, stanowi jego uogólnienie i rozciągnięcie na inne dziedziny, po drugie zaś, wiąże się z opuszczeniem pewnego istotnego warunku nakładanego w intuicjonizmie i konstruktywizmie matematycznym na procedury dowodowe, a mianowicie, że mają one być konstruktywne. Przykładowo, dowodem twierdzenia egzystencjalnego „istnieje takie **x**, że P(**x**)”, spełniającym ten warunek, jest konstrukcja wskazująca pewien obiekt **a** taki, że prawdziwe (oczywiście, w sensie konstruktywistycznym) jest zdanie P(**a**). Przenosząc idee konstruktywizmu na inne dziedziny (nauki empiryczne, etykę, prawo czy filozofię polityki), nie zawsze znajdziemy naturalny odpowiednik konstruktywności tak rozumianej, z reguły trzeba się tu zadowolić wskazaniem na pewne procedury pozwalające w większości sytuacji uzyskać jakieś rozstrzygnięcie czy decyzję. Z reguły nie będzie się to wiązać z jakkolwiek rozumianą konstrukcją jakiegoś obiektu.

To akurat nie jest jednak wielkim problemem, gdy odnosimy problematykę konstruktywizmu do filozofii Kanta, gdyż w jego czasach nie istniała jeszcze problematyka matematyczna i filozoficzna, która ponad sto lat później dała początek intuicjonistycznym żądaniom dowodów konstruktywnych (w naszkicowanym przed chwilą sensie). Dlatego zupełnie naturalne jest, że zestawiając Kantowską koncepcję podstaw matematyki z konstruktywizmem, korzystać będziemy jedynie z jego aspektów ogólniejszych, dzielonych przez konstruktywizm matematyczny z innymi wersjami konstruktywizmu.

Określając konstruktywizm jako tezę, że własność wyróżniona w danej dziedzinie, np. prawdziwość w dziedzinie poznawczej, jest sprowadzalna do osiągalności w drodze pewnej procedury, np. odpowiednio rozumianego dowodu w matematyce, warto pamiętać o pewnej subtelności, która, przeoczana, może prowadzić do grubych nieporozumień w filozofii. Otóż ową sprowadzalność do procedury można rozumieć w dwojaki sposób. Po pierwsze, jako w ostatecznym rachunku prowadzącą do pozbycia się pojęcia wartości wyróżnionej, np. prawdy, na rzecz pojęcia osiągalności w drodze zastosowania procedury. Po drugie, jako próba redefinicji wartości wyróżnionej. A więc np., w przypadku prawdy, zastąpienia klasycznego rozumienia prawdziwości, zgodnie z którym prawdziwość sądu polega na zajściu jego warunków prawdziwości rozumianych klasycznie, rozumieniem intuicjonistycznym, w myśl którego sąd jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jego intuicjonistycznie rozumiany dowód. Stanowiska te mogą się wydawać bardzo podobne, a jednak mają drastycznie odmienne konsekwencje, zwłaszcza jeśli chodzi o kwestie semantyczne i logiczne.

Jak się wydaje, intuicjonizm i konstruktywizm znajdują się zdecydowanie po stronie drugiej ewentualności: zdania matematyki mają warunki prawdziwości, tyle że warunki te są ulokowane gdzie indziej niż zwykło się tradycyjnie sądzić — nie w sferze domniemanych obiektów matematyki w rodzaju liczb czy zbiorów, lecz w sferze naszych konstrukcji umysłowych, choć niekoniecznie tylko umysłowych, które odgrywają dla nas rolę dowodów tych zdań.

Tak rozumiany konstruktywizm zestawię teraz z Kantowską filozofią matematyki. Nie warto bowiem tracić czasu na konfrontowanie Kanta z pierwszą ewentualnością, tj. próbą eliminacji pojęcia prawdy na rzecz jakoś rozumianej dowodliwości czy innego pojęcia proceduralnego, w oczywisty sposób jest ona bowiem sprzeczna z poglądami Kanta w kwestii pojęcia prawdy. Również jednak w odniesieniu do konstruktywizmu rozumianego jako pewna koncepcja prawdy (a nie jej eliminacja) można, jak sądzę, skutecznie argumentować, że Kantowska koncepcja matematyki nie ma z tak rozumianym konstruktywizmem wiele wspólnego.

Jakie racje mogłyby przemawiać za upatrywaniem w myśli Kanta wątków zbliżonych jakoś do konstruktywizmu w filozofii matematyki? Przede wszystkim, mamy wypowiedzi Kanta niedwuznacznie podkreślające rolę „konstrukcji" w matematyce. „Matematyka rozważa to, co ogólne, za pomocą znaków *in concreto*" — tak brzmi podstawowa bodaj metateoretyczna charakterystyka matematyki przez Kanta przeciwstawiająca ją metafizyce jako badającej „to, co szczegółowe, za pomocą znaków *in abstracto*".[9] Jako równoważną przytoczonej Kant podaje też formułę, iż matematyka jest „poznaniem z konstrukcji pojęć".[10] Przykład: mamy pojęcie trójkąta, które jest ogólne, tj. podpadają pod nie wszystkie trójkąty. By móc dowieść jakiegoś twierdzenia prawdziwego o wszystkich trójkątach, musimy jednak posłużyć się „znakiem *in concreto*", tj. np. rysunkiem trójkąta na tablicy, który poddajemy pewnym przekształceniom, naocznie pokazującym, że musi być prawdą to, co głosi dane twierdzenie, np. że suma jego kątów wewnętrznych równa jest dwóm kątom prostym. Otóż to, co robimy, kreśląc ów rysunek *in concreto* na podstawie ogólnej definicji trójkąta, Kant nazywa właśnie „konstrukcją" pojęcia, w tym przypadku pojęcia trójkąta.

---

[9] Zob. *Rozprawa o wyraźności zasad...*, dz. cyt., s. 58. Por. *Krytyka czystego rozumu*, A714, B742.

[10] Tamże, A713, B741.

Ma to niewątpliwie posmak konstruktywistyczny, zwłaszcza jeśli wziąć pod uwagę, iż odpowiednia konstrukcja jest tworzona przede wszystkim gwoli przeprowadzenia za jej pomocą dowodu jakiegoś twierdzenia matematycznego. Można wtedy Kanta rozumieć wręcz tak, że jego zdaniem prawdziwość jakiegoś twierdzenia matematycznego polega na tym, że została przeprowadzona lub jest możliwa do przeprowadzenia odpowiednia konstrukcja dowodowa. Miałoby to oczywiście wszystkie charakterystyczne dla konstruktywizmu konsekwencje, włącznie z zawieszeniem metalogicznej zasady wyłączonego środka, a fakt, że sam Kant konsekwencji takich nie dostrzegał, można by tłumaczyć ogólnym stanem ówczesnej refleksji logicznej, ewentualnie tym, że filozofię matematyki Kant uprawiał jedynie jako część znacznie szerszego przedsięwzięcia i nie skupiał się na wyciąganiu specyficznych dla niej konsekwencji.

Zgodziwszy się, że pewne tezy Kanta mają posmak konstruktywistyczny, zapytajmy teraz, czy rzeczywiście są one konstruktywistyczne. Przede wszystkim, zastanówmy się, czym są znaki *in concreto*, które konstruujemy, i za pomocą których w matematyce rozważamy to, co ogólne. Pytanie to umieszcza nas też od razu w centrum *Krytyki czystego rozumu*, tu bowiem Kant silniej niż we wcześniejszych pracach wskazuje na rolę naoczności w owej konstrukcji. Konstrukcje, o które chodzi w matematyce, są konstrukcjami w naoczności, ściślej, w naoczności czystej. W efekcie tych konstrukcji powstają dane naocznie znaki *in concreto*, które następnie można przekształcać, uzyskując dowody twierdzeń matematycznych.

Czym są owe znaki *in concreto*? Wydaje się, że w kontekście zajmującej nas tu kwestii domniemanego konstruktywizmu Kanta należy rozważyć następującą alternatywę: albo znaki te same są właściwym przedmiotem matematyki, a matematyka jest nauką *o* pewnych konstruktach danych w naoczności (czystej), albo nie. W pierwszym przypadku tezy Kanta nieuchronnie prowadzą do konsekwencji konstruktywistycznych, w drugim — niekoniecznie. Czym jednak mogłyby być owe znaki *in concreto*, jeśli nie przedmiotami matematyki? I co mogłoby być przedmiotem matematyki, jeśli nie konstrukcje w czystej naoczności?

Ze znanych mi możliwych odpowiedzi na pierwsze pytanie najbardziej trafia mi do przekonania ta, że są one *reprezentacjami* właściwych przedmiotów matematyki, reprezentacjami szczególnego rodzaju, gdyż w jakiś sposób egzemplifikującymi, modelującymi pewne własności tych przedmiotów, zwłaszcza ich własności strukturalne. To właśnie Kant moim zdaniem ma na myśli, nazywając je znakami *in concreto*. Znaki *in concreto* to znaki w taki sposób wytworzone, że unaoczniają one w swej budowie własności swych desygnatów. A zatem np. „trójkąt", kreślony w czystej naoczności gwoli dowiedzenia czegoś na temat trójkąta, to wprawdzie nie jest trójkąt, jest to jednak coś *trójkątnego*, np. odpowiedni rysunek na piasku lub na tablicy, którego używamy jako reprezentacji dowolnego trójkąta z racji tego, że z dowolnym trójkątem dzieli pewne własności strukturalne (np. posiadanie trzech boków i trzech kątów). Uwagi te prowadzą do pewnego fundamentalnego zastrzeżenia, które należy poczynić zawsze, gdy wprowadzamy pojęcie reprezentacji lub modelu. Otóż nie wszystkie własności modelu wolno nam przypisywać temu, co modelowane. Jeśli chodzi o modele, których zdaniem Kanta używa matematyka, a więc konstrukcje w naoczności, to najbardziej oczywistą kandydaturą na owe własności należące do modelu, a nie należące do tego co modelowane, wydaje mi się przestrzenno-czasowy charakter naocznych konstrukcji, a ogólniej, wszystkie te własności, które w nierozerwalny sposób związane są ze *zmysłowym* charakterem naoczności, na której operuje matematyka. Ostatnie zdania prowadzą już w gruncie rzeczy do kolejnej kwestii, zanim jednak do niej przejdę, wskażę, w jaki sposób zaproponowana odpowiedź na pierwsze pytanie pozwala uniknąć konsekwencji konstruktywistycznych. Mianowicie przyjąwszy, że przedmiotem matematyki jest coś innego niż konstrukcje w naoczności, które służą jedynie jako reprezentacje, znaki, symbole, modele jej właściwych przedmiotów, możemy z powodzeniem operować klasyczną semantyką dla zdań matematyki, klasyczną koncepcją ich warunków prawdziwości, pozwalającą mówić m.in. o nierozstrzygniętych, a nawet nierozstrzygalnych problemach matematycznych, które mimo to mają dobrze określony sens i „naprawdę" mają jakieś rozwiązanie, nawet jeśli my, skończone istoty rozumne, nigdy tego rozwiązania nie poznamy. To na dobrą sprawę wystarczy, by oddalić wszelkie podejrzenia Kanta o konstruktywizm.

Co do drugiej kwestii, dotyczącej tego, czym zatem są owe różne od naszych konstrukcji przedmioty matematyki, sytuacja jest zdecydowanie bardziej skomplikowana. Proponuję najpierw postawić pytanie łatwiejsze, egzegetyczne: jakie wskazówki na temat przedmiotu matematyki znajdziemy w pismach Kanta? Odpowiedź jest prosta, choć niełatwo mi było do niej dojść: żadnych. Kant mówi jedynie, że matematyka bada to, co ogólne. Trzeba przyznać, że sformułowanie to samo jest tak ogólne, że mało co daje się z niego wywnioskować. Można by rzec, zapożyczając termin z Ingardenowskiej teorii literatury, że kwestia przedmiotu matematyki należy do miejsc niedookreślenia *Krytyki czystego rozumu* i innych pism Kanta. Zanim spróbujemy to miejsce niedookreślenia wypełnić, zastanówmy się przez chwilę nad tym, dlaczego Kant sam go nie wypełnił. Nie mam oczywiście wyczerpującej odpowiedzi na to pytanie, wydaje mi się jednak, że Kant po prostu świadom był złożoności tej kwestii, świadom był w zarysie kontrowersji, jakie się w związku z nią pojawiały, świadom był istnienia zarówno rozwiązań w duchu realizmu, jak i nominalizmu, i zgodnie ze swoją typową strategią starał się przedstawić koncepcję, która byłaby neutralna względem tych sporów. Cokolwiek uznamy za przedmiot matematyki — tak zdaje się argumentować Kant — musimy pamiętać, że jedynym sposobem dowiedzenia się czegoś o nim na sposób matematyczny jest praca na jego naocznej reprezentacji *in concreto*. Jest to oczywiście interpretacja maksymalnie życzliwa. Można też sobie wyobrazić, że Kant po prostu bezrefleksyjnie akceptował pewien zastany pogląd, np. Leibnizjańską wersję nominalizmu w kwestii matematyki, który uważał za tak oczywisty, że niewart podkreślania. Być może, choć to nie bardzo zgodne z tym, co skądinąd wiadomo o Kancie. Jednak również przy takiej interpretacji zachowuje moc to, że przedmioty matematyki są różne od swych reprezentacji naocznych *in concreto,* co daje możliwość uniknięcia konsekwencji konstruktywistycznych.

Pozostaje pytanie najtrudniejsze: czym są przedmioty matematyki, jeśli stoimy na stanowisku, że twierdzenia matematyki posiadają warunki prawdziwości, a zarazem odrzucamy konstruktywistyczną interpretację tych warunków w kategoriach teoriodowodowych? To, co mówi Kant, nie pozwala na to pytanie udzielić odpowiedzi. Sądzę jednak, że istnieje coś takiego, jak duch filozofii Kantowskiej, który pewien rodzaj odpowiedzi na to pytanie sugeruje. Nie wchodząc głębiej w kwestię, czym jest ów duch, chciałbym jedynie zadeklarować, że za najbardziej z nim zgodne w rozważanej kwestii uważam następujące sformułowanie: jedyną zasługującą na poważne potraktowanie odpowiedzią na pytanie o przedmioty matematyki jest matematyka. Filozof, gdy próbuje matematyka wyręczać czy przewyższać w tym zadaniu, nieuchronnie partaczy, często w sposób żenujący. Filozof może natomiast skutecznie zajmować się krytyką różnych opacznych wyobrażeń o tym, czym jest matematyka i jej przedmioty, tropieniem różnych nieporozumień, zwłaszcza tych, w które obfituje historia samej filozofii, od zarania zafascynowana matematyką, a i — przyznajmy to — trochę zakompleksiona na jej punkcie. I Kant wiele takich nieporozumień rozwiewa, na czele z tymi, które legły u podstaw prób uprawiania filozofii na wzór matematyki.

Należy wszakże pamiętać, że odpowiedź, której sama matematyka udziela na pytanie o naturę jej przedmiotów, nigdy nie jest ostateczna. Matematyka się zmienia, i to zmienia bardzo głęboko. Zmieniają się jej podstawowe pojęcia i metody, a wraz z tym zmienia się ogólna wizja obiektów, z którymi mamy w niej do czynienia. Dziś przeważa pogląd, że tymi obiektami są zbiory. Z pewnością prędzej czy później pogląd ten ustąpi miejsca jakiemuś innemu, w którym pojawią się nowe pojęcia, bardziej wyrafinowane i głębsze niż pojęcie zbioru. Zdawali sobie z tego doskonale sprawę ludzie tacy jak Gödel.[11] Mrzonką byłaby jednak chęć uprzedzenia tych zmian pojęciowych na drodze namysłu filozoficznego. Efekty takich prób zawsze wypadają beznadziejnie. Filozof nigdy nie wyprzedzi matematyka w dociekaniach nad naturą świata matematycznego.

[11] Zob. np. jego wykład Gibbsowski „Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications" z 1951 r., w: Kurt Gödel, *Unpublished Philosophical Essays*, wyd. F. A. Rodríguez-Consuegra, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 1995, ss. 129-157.