**Zbigniew Semadeni**

# Koncepcja idei głębokich epistemicznych i idei głębokich indywidualnych w matematyce

Filozofia Nauki 20/4, 119-138

2012

*Filozofia Nauki*
*Rok XX, 2012, Nr 4(80)*

Zbigniew Semadeni

# Koncepcja idei głębokich epistemicznych i idei głębokich indywidualnych w matematyce

## 1. POSTAWIENIE PROBLEMU

Główny problem tej pracy sformułujemy, odwołując się do następującego przykładu. Do połowy XX wieku teoretycznym wzorcem liczb rzeczywistych była teoria Dedekinda i pojęcie *przekroju*. Przekrój zbioru uporządkowanego $X$ to rozkład tego zbioru na dwa podzbiory $A$, $B$ rozłączne, niepuste i spełniające warunek: każdy element zbioru $A$ jest mniejszy od każdego elementu zbioru $B$ (dla uproszczenia dalszych rozważań będziemy zakładać, że w $A$ nie ma elementu największego).

Okazuje się, że nawiązujące do Dedekinda prezentacje teorii liczb rzeczywistych różnią się zadeklarowaną (mniej lub bardziej wyraźnie) ontologią liczb rzeczywistych. Analizując różne sformułowania, wyróżnimy *trzy stanowiska ontologiczne*.

Pierwsze z nich to deklaracja ($O_1$), że liczba rzeczywista *jest* przekrojem zbioru $\boldsymbol{Q}$ liczb wymiernych. Dedekind uważał, że liczby są wolnym wytworem ludzkiego umysłu, a przez użycie słowa „jest" *stwarza się nowy byt* (Murawski 1986, s. 135; Murawski 2001, s. 65). W XX wieku ($O_1$) było widoczne m.in. w (Landau 1930).

Przy drugim, umiarkowanym stanowisku ($O_2$) *nie precyzuje się wyraźnie, jakimi obiektami są liczby rzeczywiste*. Zakłada się, że odpowiadają one punktom prostej, i deklaruje się wzajemną odpowiedniość między tymi liczbami a przekrojami zbioru $\boldsymbol{Q}$. Używane bywają słowa „może być" (zamiast „jest") lub „można utożsamić", co wskazuje na inną intencję ontologiczną.

Trzecie stanowisko ($O_3$) to *aksjomatyczne ujęcie* liczb rzeczywistych. Przyjmuje się aksjomaty ciała uporządkowanego $\boldsymbol{R}$, z aksjomatem ciągłości w wersji Dedekinda. Rola konstrukcji w języku przekrojów zbioru $\boldsymbol{Q}$ zostaje ograniczona do *dowodu istnienia modelu* tej teorii. Rozwijając następnie teorię liczb rzeczywistych, korzysta się jedynie z aksjomatów i dowodzi się twierdzeń (lemat Ascoliego, twierdzenie o istnieniu supremum zbioru ograniczonego itp.), z których każde może być przyjęte jako równoważne sformułowanie aksjomatu ciągłości. Przekroje stają się niepotrzebne, można o nich zapomnieć i nigdy się do nich nie odwoływać.

W tym samym roku 1872, w którym Dedekind opublikował swą słynną pracę *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Cantor opublikował inną koncepcję. We współczesnym ujęciu liczba rzeczywista Cantora to odpowiednio zdefiniowana klasa równoważności ciągów liczb wymiernych spełniających warunek Cauchy'ego.

Od początku te dwie teorie były traktowane jako konkurencyjne rozwiązania problemu ścisłego przedstawienia teorii liczb rzeczywistych. Jest to precyzyjnie przedstawione w (Hobson 1907, s. 22-40). Obie te teorie były lepsze od innych koncepcji owych czasów (Boyer 1939/1964, s. 406; Ferreirós 1999, s. 117-137). Do połowy XX wieku w podręcznikach akademickich wyraźnie preferowano teorię Dedekinda jako prostszą. Później, gdy w świadomości matematyków kwestia zbudowania podstaw analizy matematycznej stała się dość odległym faktem historycznym, ujęcie Dedekinda zeszło na dalszy plan.

Górę wzięła konstrukcja Cantora, nie ograniczona wszakże do ciągów liczb wymiernych, lecz prowadzona w ramach znacznie ogólniejszych teorii jako bardzo ważna konstrukcja uzupełnienia przestrzeni metrycznej (kanoniczne zanurzenie jej w przestrzeni zupełnej) oraz jako analogiczne konstrukcje uzupełnienia grup topologicznych, przestrzeni liniowych topologicznych i przestrzeni jednostajnych (Kelley 1955, s. 174 i 211). Wprawdzie konstrukcja Dedekinda da się uogólnić na przypadek zbiorów częściowo uporządkowanych (Birkhoff 1948, rozdz. IV, §7), ale ma to bez porównania mniejsze znaczenie w matematyce niż uzupełnianie metodą Cantora. Tak więc nie prostota czy większa sugestywność okazały się decydujące w ostatecznym wyborze podejścia Cantora, lecz zakres stosowalności jego metody w innych dziedzinach matematyki.

Przy koncepcji Cantora również możliwe są trzy stanowiska ontologiczne ($O_1$), ($O_2$), ($O_3$), analogiczne do sformułowanych powyżej, w tym deklaracja ($O_1$), że liczba rzeczywista *jest* klasą abstrakcji ciągów Cauchy'ego.

Zarówno Dedekind, jak i Cantor byli przekonani do aksjomatycznego ujęcia ciągłości w geometrii, ale nie w arytmetyce. Aksjomat w geometrii miał wyrażać intuicyjną pewność. Arytmetyka miała dla nich tę wyższość nad geometrią, że ciągłość zbioru liczb rzeczywistych była dowodzona, a nie postulowana. Natomiast jako aksjomat Cantor przyjął odpowiedniość między liczbami rzeczywistymi i punktami prostej. Dokładną analizę historyczną kwestii *construction vs. axiomatization* w owym okresie daje (Ferreirós 1999, s. 117-137).

Oznaczmy symbolem $\pi_D$ liczbę $\pi$ wyrażoną w języku teorii liczb rzeczywistych Dedekinda. Jest to odpowiedni przekrój, czyli pewna para zbiorów liczb wymiernych. Symbolem $\pi_C$ oznaczmy liczbę $\pi$ w teorii Cantora; jest to zbiór (klasa równoważności) pewnych ciągów liczb wymiernych. Oczywiście $\pi_D \neq \pi_C$. W świetle powyższych faktów można postawić pytanie: *Czy jeden z tych zbiorów, $\pi_D$ lub $\pi_C$, jest* *właściwą czy też „prawdziwą” liczbą π, a jeśli nie, to czym jest liczba π?* Oczywiście żaden z tych dwóch zbiorów nie jest wyraźnie „lepszy”, nie ma więc podstaw, by definitywnie jeden z nich przyjąć, a drugi odrzucić; podobnie nie widać argumentu, by jakiś inny obiekt teorii mnogości uznać za właściwą liczbę π. Znane są różne odpowiedzi na postawione pytanie:

(a) prawdziwą liczbą π jest jej idea typu platońskiego,

(b) powyższe pytanie jest bezprzedmiotowe, źle postawione, jest pseudoproblemem,

(c) nie istnieją odrębne od zbiorów obiekty matematyczne, więc liczba π niebędąca zbiorem nie istnieje.

Pogląd (a) nie usuwa trudności, a stwarza nowe.[1] Pogląd (b) jest uchyleniem się od prób odpowiedzi. Pogląd (c) jest przejawem redukcjonizmu, który ma wiele fundamentalnych zalet, ale może być przyjęty jedynie jako postulat metodologiczny. Faktem zaś jest, że *wszyscy matematycy na świecie wiedzą, co to jest liczba π. Może być przedstawiana w różny sposób, w ramach rozmaitych teorii, ale mimo to nie ma wątpliwości, że wszyscy mają na myśli ten sam obiekt.*[2]

Pytanie o $\pi_D$ i $\pi_C$ jest prototypem mnóstwa podobnych pytań, dotyczących innych pojęć matematyki. Szczególnie znana jest kwestia liczb naturalnych, sformułowana jako *What numbers could not be* (Benacerraf 1983; Wójtowicz 1999, s. 127; Wójtowicz 2003, s. 319; Bondecka-Krzykowska 2004, s. 23); wrócimy do tego w części 7 poniżej. Są to przykłady ogólniejszego *problemu wieloredukcji*. To, co dla matematyka jest jednym pojęciem, ma wiele modeli w teorii mnogości. *Czym jest jednak to pojęcie, jeśli nie jest tożsame z jakimś swoim modelem*?

Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie pewnej odpowiedzi na to pytanie. Zarazem prezentowane tu przykłady ukazują różne oblicza matematyki, wymagające krytycznej analizy filozoficznej. Są to rozmaite, niezbyt znane odstępstwa od idealnego obrazu dedukcyjnej matematyki. Stosowaną tu metodą jest *analizowanie autorytatywnych tekstów* pisanych przez matematyków, prezentujących *ustabilizowane teorie matematyczne*. Nie obejmuje to żadnych kwestii dotyczących procesu twórczego, rozwiązywania problemów i formułowania hipotez. Zajmujemy się tu wytworami matematyki, a nie czynnościami do nich wiodącymi.

---

[1] Piaget pisze: „Platonizm nigdy nie dodaje niczego do naszej efektywnej wiedzy, ponieważ jedyną metodą dotarcia do wiecznych Idei jest ich rekonstruowanie i ta konstrukcja jest samowystarczalna” (Piaget 1972, s. 54).

[2] Z. Król pisze o *zastanych fenomenach* w matematyce, faktach domagających się wyjaśnienia i analizy (Król 2006, s. 11). Takie właśnie rozmaite fenomeny są punktem wyjścia prezentowanych tu analiz i propozycji wyjaśnień.

## 2. KONCEPCJA IDEI GŁĘBOKICH I TROJAKIEJ NATURY MATEMATYKI

Nowy impuls do zastanawiania się nad postawionym tu problemem dała mi psycholingwistyka i rozważane tam *struktury głębokie zdań*, przeciwstawiane ich *strukturom powierzchniowym*.[3] Odwołanie się do struktur głębokich w matematyce zdarzało się okazjonalnie, bez dokładniejszych wyjaśnień.

> W końcu nie należy sądzić, że znajomość standardowych struktur daje wiedzę o matematyce; przeciwnie, struktury te reprezentują matematykę bardzo powierzchownie. […] nasza analiza rozwoju myśli ujawnia jedynie najgrubsze wiązanie procesu rozumowania, zaniedbując subtelne wzajemne oddziaływanie wynikające z sensu, znaczenia, które z trudem daje się wyrazić czy sformalizować. Te grube wiązania są właściwą dziedziną logiki, rachunku zdań. Odpowiada to strukturze „powierzchniowej", jak to się mówi w lingwistyce. W języku potocznym jest ona stale zachwiana, załamywana przez wymogi „głębokich" struktur znaczeniowych (Thom 1973/1974b, s. 134).

> Rozróżnia się struktury powierzchniowe (składnię) systemu symboli matematycznych od struktur głębokich (semantyki) schematów matematycznych. Znaczenie matematycznej wiadomości leży w strukturach głębokich — w samych ideach matematycznych i w ich związkach. Jednakże znaczenie to może jedynie być przekazane i odebrane pośrednio, przez struktury powierzchniowe; odpowiedniość między strukturami głębokimi a powierzchniowymi jest tylko częściowa. […] Tym, *co* próbujemy przekazać, są struktury pojęciowe. Sposobem, *w jaki* to przekazujemy lub próbujemy przekazać, jest pisanie lub wymawianie symboli. Te pierwsze są najważniejsze. Tworzą *głęboką strukturę* matematyki (Skemp 1982, s. 281).

Słowo „struktura" jest używane w matematyce w innych znaczeniach (Bondecka-Krzykowska, 2004), lepiej więc użyć innego terminu. Ponadto specyfiką matematyki jest istnienie formalnych modeli. Prowadzi to do koncepcji *trojakiej natury matematyki*. Wyróżnimy mianowicie:[4]

1) *idee głębokie* tworów matematycznych — może to być *idea głęboka pojęcia indywidualnego* (np. liczby $\pi$) lub *ogólnego* (np. liczby rzeczywistej), lub *idea głęboka sądu*,

2) *formy powierzchniowe* — to wszelkie znaki reprezentujące dany twór matematyczny, które można percypować zmysłami,

3) *modele formalne* tworów matematycznych — to ich odpowiedniki w teoriach aksjomatycznych, niekoniecznie sformalizowanych (zbiory $\pi_D$ i $\pi_C$ to modele idei głębokiej $\pi$).

---

[3] Koncepcje te pochodzą od Chomsky'ego (Kurcz 1992, s. 26-27). Należy tu wyraźnie podkreślić, że — pomimo pewnych analogii — struktury głębokie rozważane w lingwistyce były jedynie inspiracją rozważanej tu (istotnie różnej) koncepcji idei głębokich.

[4] Pierwszy zarys tej koncepcji, w kontekście dydaktyki matematyki, został opublikowany w (Semadeni 2002).

Nie da się zdefiniować, czym jest idea głęboka. *Nieostrość tego pojęcia jest inherentna*. Można jedynie dać ogólny zarys tej koncepcji, ilustrując to na rozmaitych przykładach.

Załóżmy, że $X$ jest pojęciem matematycznym znajdującym się w stabilnym stadium swego rozwoju w *filogenezie*.[5] W pierwszym przybliżeniu można opisać ideę głęboką $X$ jako dojrzałą konstrukcję umysłową tego pojęcia, używaną w rozumowaniach, bogato ustrukturowioną.[6] Cechuje się ona *charakterystycznym poczuciem sensu i celów, którym to pojęcie służy, oraz charakterystycznym poczuciem pewności rozumienia tego pojęcia* (toteż często używa się go bez potrzeby odwoływania się do definicji). Poczucie to wywołuje u wielu matematyków poczucie, że obiekty matematyki istnieją realnie jako coś z góry danego i zastanego, a sądy w ten sposób udowodnione są odczuwane jako aprioryczne. Idee głębokie cechuje też *odporność na dysonanse poznawcze*. Z poczucia zaś sensu wynika opinia wielu matematyków, że pojęcia i sądy matematyki, nawet na bardzo zaawansowanych szczeblach abstrakcji, są wyposażone w pewną specyficzną treść.

Nawiązując do zasady paralelizmu (Duda 1982; Freudenthal 1985), rozważamy idee głębokie dwóch rodzajów:

*idee głębokie indywidualne*, czyli *intuicje głębokie*, rozwinięte w ontogenezie, tj. z drugiego świata Poppera,[7]

*idee głębokie epistemiczne*, z dziedziny przedmiotów idealnych, rozwinięte w filogenezie, z trzeciego świata Poppera, wspólne dla całej społeczności matematyków.

Idee głębokie epistemiczne ujawniają się wyraźnie, gdy analizujemy nieusuwalne niezgodności między definicjami podstawowych pojęć matematycznych a ich faktycznym użyciem przez matematyków. W dalszej części tej pokazane są ilustrujące to przykłady.

---

[5] Założenie to znaczy, że nie zajmujemy się tu matematyką *in statu nascendi*, a ponadto rozpatrywane pojęcie nie ulega już istotnym zmianom w rozwoju historycznym, takim jak opisane m.in. w (Lakatos 1964/2005) i że zostało doprecyzowane jako wynik pracy pokoleń. Jakkolwiek teoretycznie nie można wykluczyć, że okaże się konieczne zakwestionowanie w przyszłości rozważanych pojęć lub ich zasadnicza modyfikacja, nie widać żadnych powodów, dlaczego tak miałoby się stać (oczywiście nie chodzi o zmiany takie, jak wprowadzenie innej terminologii lub rozszerzenie zakresu danej nazwy przez uogólnienie pojęcia).

[6] Rozróżnienie: struktury bogate — struktury ubogie analizował Freudenthal. Na przykład czworościan $A$ ma wiele struktur: struktura zbioru $A$ (najuboższa), struktura metryczna na $A$, struktura afiniczna, struktura kompleksu geometrycznego (wierzchołki, krawędzie, ściany) i inne (Freudenthal 1991, s. 20).

[7] Analizowałem je w terminach *concept image*, będącym teoretyczną podbudową pewnych koncepcji z dydaktyki matematyki (Semadeni 2008). Idea głęboka indywidualna tworu $X$ to jakby konkretna realizacja idei epistemicznej $X$ w umyśle danej osoby.

## 3. KONTRASTOWANIE TERMINU „IDEA GŁĘBOKA" Z INNYMI TERMINAMI

Warto zastanowić się, czy potrzebny jest nowy termin „idea głęboka". Czy nie da się go zastąpić przez jakiś ogólnie przyjęty termin?

Czy zamiast *idea głęboka pojęcia X* nie wystarczy po prostu mówić: *pojęcie X*? Zgodnie z Oksfordzkim Słownikiem Filozoficznym posiadam pojęcie, gdy umiem posługiwać się wyrażającym je terminem w celu wydawania sądów. Otóż matematyk może znać definicję jakiegoś pojęcia i umieć ją wykorzystać np. w dowodach, ale gdy musi on w rozumowaniach wracać do *tekstu* definicji, nie będzie to jeszcze idea głęboka indywidualna.

Niewątpliwie w pewnych kontekstach idee głębokie można określić słowem *intuicja*, co dobrze ilustruje następujący cytat:

> Uczymy się, że liczby rzeczywiste są dane przez przekroje liczb wymiernych. Skąd właściwie to wiemy? Jest to „Teza Dedekinda". Łączy pojęcie nieformalne ze ścisłym, tzn. utożsamia ich zakresy. Nie dostrzegamy w tym problemu, bo poprawność tego kroku wydaje się oczywista. Każdą liczbę rzeczywistą w sensie intuicyjnym da się przedstawić jako odpowiedni przekrój (Krajewski 2010, s. 193).

Użyte tu określenie „liczba rzeczywista w sensie intuicyjnym" to idea głęboka liczby rzeczywistej, a przekrój — to jej model formalny. Jednakże słowo „intuicja" używane jest w wielu sensach, nieraz różnych od użytego tutaj (Gödel 1947/2002, s. 120-122; Hahn 1956; Beth, Piaget 1966, s. 101-113, 208, 223; Kitcher 1983, s. 49-64; Fischbein 1987; Davis, Hersh 1981/1994, s. 340-347; Parsons 2000; Feferman 2000). Definicja oparta na pojęciu intuicji niewiele by więc wyjaśniła. Z pewnością jednak idee głębokie nie polegają na jakimś intuicyjnym wglądzie.

Można próbować określać ideę głęboką *X*, odwołując się do *rozumienia X*. Prowadzi to do trudnej kwestii: „Czym jest rozumienie pojęcia lub sądu matematycznego?" (Sierpińska 1994). Ponadto *dla rozumienia matematyki konieczna jest intuicja* (Feferman 2000, s. 319).

Inna możliwa interpretacja: idea głęboka epistemiczna *X* to *znaczenie X*. Jednakże na pytanie: „Co to jest znaczenie pojęcia matematycznego?" nie ma jednoznacznej, dobrej odpowiedzi. Najtrafniejsze w kontekście tej pracy jest określenie: *znaczenie jest tą własnością wyrażeń, dzięki której rozumiemy je* (Woleński 2003, s. 119). Idea głęboka epistemiczna może być interpretowana jako *znaczenie wielokontekstowe*, bogate, kontrastowane ze *znaczeniem definicyjnym*, rozumianym jako dokładnie to, co opisuje definicja. W logice termin „pojęcie" bywa określany jako znaczenie nazwy. Przyjmując to, należy rozróżnić: nazwa *X*, pojęcie *X* jako znaczenie definicyjne nazwy *X*, idea głęboka epistemiczna *X* jako wielokontekstowe znaczenie pojęcia *X*. Podobnie rozróżnienie można czynić w wypadku sądu jako znaczenia zdania oznajmującego.

> Czy dowód zmienia znaczenie dotychczas nieudowodnionego zdania matematycznego? Czy nowy dowód twierdzenia matematycznego zmienia jego znaczenie? Niewątpliwie odpowiedzią jest: czasem zmienia, na ogół nie. Sednem tego pytania nie jest zapewne sugerowanie niestabilności pojęć matematycznych, lecz raczej wskazanie na abstrakcyjnie ludzki element w znaczeniu pojęć matematycznych (Wang 1974, s. 230).

Te uwagi Hao Wanga warto rozważyć w kontekście stosunku idei głębokiej sądu do jego znaczenia. Na przykład *sens* lematu Gaussa i jego idea głęboka indywidualna zmienia się po zrozumieniu geometrycznej wersji jego dowodu przedstawionego poniżej w części 5 tej pracy. Zamiast czysto formalnego rozumienia algebraicznej konkluzji lematu pojawia się rozumienie, że $w(z)$ obiega $k$-krotnie punkt $w(z_0)$ i że stąd wynika teza lematu. Rozstrzygnięcie, czy to jest zarazem zmiana *znaczenia* tego lematu, zależy od tego, jak interpretuje się termin „znaczenie".

## 4. WPŁYW IDEI GŁĘBOKICH NA INTERPRETACJĘ TEKSTU

W przykładzie tym rozważamy zbiory figur na płaszczyźnie. Pierwszy z nich to zbiór $E$ wszystkich wielokątów czworobocznych i sześciobocznych; może być zapisany jako $W_4 \cup W_6$, gdzie $W_n$ oznacza zbiór wielokątów o $n$ bokach ($n \geq 3$). Drugi to zbiór $F$ wszystkich wielokątów wypukłych i czworobocznych, czyli $C \cap W_4$, gdzie $C$ to zbiór wielokątów wypukłych.

Godna uwagi jest tu narzucająca się interpretacja zbioru $E$ jako sumy i zbioru $F$ jako części wspólnej, choć *składniowo* oba określenia są zbudowane tak samo, za pomocą dwóch przymiotników połączonych spójnikiem „i". Różnica jest *semantyczna.* Interpretacja zbioru $E$ jako $W_4 \cup W_6$ oraz zbioru $F$ jako $C \cap W_4$ ma swoje źródło w ideach głębokich; matematyk odruchowo wybiera tę interpretację, która ma dla niego sens. Interpretacja $E$ jako $W_4 \cap W_6$ jest pomijana, bo te dwie własności są sprzeczne. Interpretacja $F$ jako $C \cup W_4$ jest wprawdzie formalnie poprawna i możliwa, ale sytuacje typu $C \cap W_4$ są typowe, ważne w geometrii i często spotykane, a sytuacja $C \cup W_4$ jest mało przydatna i nieoczekiwana. Logik natomiast mógłby określenia zbiorów $E$ i $F$ odbierać bardziej formalnie, zgodnie ze strukturą powierzchniową zdań i oba zbiory interpretować jako części wspólne.

W określeniach zbiorów E i F spójnik „i" łączy dwa przymiotniki. Gdyby „i" łączyło zdania podrzędne w określeniach: „zbiór wszystkich wielokątów, które są czworoboczne i są sześcioboczne" oraz „zbiór wszystkich wielokątów, które są wypukłe i są czworoboczne", mielibyśmy oczywiste części wspólne i nadto pierwsza z nich byłaby pusta. Gdyby „i" łączyło rzeczowniki w określeniach: „zbiór wszystkich czworokątów i sześciokątów" oraz „zbiór wszystkich wielokątów wypukłych i czworokątów", byłyby to sumy zbiorów. Przypadek „i" łączącego przymiotniki jest chwiejny, może być interpretowany jako koniunkcja lub jako alternatywa zależnie od sensu tych przymiotników.[8]

---

[8] Thom, analizując granice użyteczności teorii zbiorów do opisu procesów zwykłej dedukcji,

Warto dodać, że różnica między interpretacjami zbiorów $E$ i $F$ jest bardziej wyraźna, gdy ich określenia pojawiają się w osobnych tekstach, niż w sytuacji, gdy jedno z nich zapisane jest przy drugim, jedna bowiem interpretacja wywiera wpływ na drugą. Ponadto pewien wpływ ma kolejność, w której podane są te określenia, a także inne szczegóły tekstu. Słowo „zbiór" uczula na bardziej formalne, syntaktyczne interpretowanie tekstu, a np. w zdaniu „na rysunku przedstawione są wielokąty czworoboczne i sześcioboczne" bardziej narzuca się interpretacja potoczna, semnatyczna, oparta na doświadczeniu czytelnika z takimi sytuacjami.[9]

## 5. ROLA IDEI GŁĘBOKICH I PRZEKSZTAŁCANIA FORM POWIERZCHNIOWYCH W ROZUMOWANIACH MATEMATYCZNYCH

Idee głębokie są podstawą rozumowań. Zdarza się, że całe rozumowanie można przeprowadzić w myśli, a formy powierzchniowe są niezbędne jedynie do przekazania tego innej osobie. Nieraz zaś trzeba opierać fragmenty wywodu na czysto mechanicznym przekształcaniu symboli (do tego w szczególności należą m.in. przekształcenia algebraiczne), przy czym poszczególne kroki mogą nie być łatwo interpretowalne, możemy nie rozumieć ich sensu, ufając jednak w otrzymany na tej drodze końcowy wynik.

Wójtowicz omawia stosunek realnego dowodu, akceptowanego przez matematyków, do hipotetycznego Dowodu Idealnego (Wójtowicz 2010, s. 343). Używa nazwy „dowód treściowy" na określenie dowodu spełniającego wymogi Kartezjusza: rozumowanie ma składać się z kolejnych kroków i każdy z nich ma być postrzegany jako oczywisty, a nadto powinno być możliwe ogarnięcie struktury dowodu jako pewnej całości. Te same wymogi dotyczą też dowodu opartego na ideach głębokich; różnica polega na tym, że owa oczywistość poszczególnych kroków nie opiera się na intuicji rozumianej jako zdolność rozumu do ujmowania podstawowych prawd w nieredukowalnym akcie poznania, lecz na wykorzystaniu adekwatnych idei głębokich, będących wynikiem wieloletniego procesu konstrukcji umysłowych pojęć i sądów.

Następujące przykłady pokazują, że wzajemny stosunek idei głębokich i form powierzchniowych może być różnie kształtowany nawet w wypadku tych samych pojęć i tych samych rozumowań.

---

sformułował następującą zasadę: Jeśli $X$ i $Y$ są dwiema jakościami (gramatycznie reprezentowanymi przez przymiotniki), to zdania „$A$ jest $X$ lub $Y$" i „$A$ jest $X$ i $Y$" nie mogą być jednocześnie semantycznie akceptowalne. Alternatywa $X$ lub $Y$ jest akceptowalna, gdy $X$, $Y$ są jakościami wykluczającymi się, należącymi do tego samego obszaru semantycznego i takimi, że dystans semantyczny między nimi nie jest zbyt duży. Koniunkcja $X$ i $Y$ jest akceptowalna, gdy jakości $X$, $Y$ należą do niezależnych aspektów rzeczywistości i ponadto spójnik „i" może być zastąpiony przecinkiem (Thom 1970/1974a, s. 122-129).

[9] Rozważany tu przykład przypomina jedną z typowych kwestii psycholingwistyki, a mianowicie badanie roli struktury głębokiej zdania w procesie jego przetwarzania, co szczególnie uwidocznia się przy zdaniach o dwuznacznej strukturze powierzchniowej (Kurcz 1992, s. 24-26).

Pierwszy przykład dotyczy symboliki rachunku zdań i kwantyfikatorów, którą Kuratowski umieścił nie na początku swego podręcznika, lecz dopiero po wyłożeniu dość zaawansowanego materiału dotyczącego zbieżności zwykłej i zbieżności jednostajnej ciągu funkcji (Kuratowski 1967, s. 86-100).[10] Oba rodzaje zbieżności zdefiniował on najpierw słownie, z opisem *czynności* umysłowych („ustalić $k$ niezależnie od $x$-ów", „dobieramy"), a następnie udowodnił pewne dotyczące ich twierdzenia. Dopiero potem uzupełnił on obie kontrastowane definicje symbolicznym zapisem z użyciem czterech kwantyfikatorów

$$\bigwedge_x \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_k \bigwedge_n [(n>k) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

przy zbieżności zwykłej i przestawionych kwantyfikatorów

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_k \bigwedge_x \bigwedge_n [(n>k) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

przy zbieżności jednostajnej. Nasuwa się tu następująca interpretacja: ta kolejność materiału nastawiona jest na wstępne kształtowanie odpowiednich idei głębokich przed bardziej mechanicznym użyciem form powierzchniowych. *Stosowanie zbyt wcześnie aparatu logiki do teorii mnogości uczy czytelnika czysto mechanicznego prowadzenia dowodów i pozbawia go matematycznej intuicji* (Rasiowa 1968, s. 6); uwaga ta jest słuszna ogólnie, nie tylko w odniesieniu do teorii mnogości.

Drugi przykład. Dowód zasadniczego twierdzenia algebry opiera się na lemacie Gaussa (zwanym też lematem d'Alemberta): Jeśli $w$ jest wielomianem stopnia $m \geq 1$ i $w(z_0) \neq 0$, to istnieje liczba zespolona $z_1$ taka, że $|w(z_1)| < |w(z_0)|$. W podręczniku (Sierpiński 1951) dowód lematu Gaussa jest łatwy do sprawdzenia krok po kroku (dwie strony elementarnych przekształceń form powierzchniowych) i bardzo trudny do zapamiętania. Pisany jest w typowym *euklidesowym stylu deduktywistycznym* w sensie opisanym w (Lakatos 1964/2005, s. 216-233) — żadnej próby wyjaśnienia, dlaczego tak właśnie wyglądają poszczególne kroki.

Otóż gdy odwołamy się do idei głębokich działań na liczbach zespolonych, ten dowód da się niemal przedstawić słownie na spacerze. Zaczynamy od tego, że bez zmniejszenia ogólności można założyć, że $z_0=0$ i $w(z_0)=1$. Rozpatrujemy przypadek szczególny wielomianu pierwszego stopnia $w(z)=1+a_1z$, $a_1 \neq 0$. Jeśli punkt $z$ obiega punkt 0 po okręgu o promieniu $r$, to punkt $1+a_1z$ obiega punkt 1 po okręgu o promieniu $|a|r$. Przy dostatecznie małym $r$ okrąg ten przecina oś $x$ w punkcie $w(z_1)$ leżącym bliżej zera niż punkt 1, tzn. $|w(z_1)|<1$ dla pewnego $z_1$, a to jest właśnie teza dowodzonego lematu. Przypadek, gdy $w(z)=1+a_kz^k$, $a_k \neq 0$, jest analogiczny; punkt $1+a_kz^k$ obiega $k$-krotnie punkt 1. Pozostaje przypadek ogólny $w(z)=1+a_kz^k+a_{k+1}z^{k+1}+\ldots+a_mz^m$, $m>k$, $a_k \neq 0$, $a_m \neq 0$. Pierwsze dwa wyrazy są takie same, jak w poprzednim przypadku

[10] Kuratowski uzupełnił swój podręcznik o symbolikę logiki w III wydaniu w związku z wprowadzeniem na studiach matematycznych elementów logiki i teorii mnogości w nowym przedmiocie *Wstęp do matematyki* (Rasiowa 1968).

i zachodzi dla nich poprzednie rozumowanie; natomiast dla dostatecznie małych wartości $|z|$ wyższe potęgi $z^n$ ($n>k$) są zbyt małe, by skompensować różnicę $1-|w(z_1)|$, co zasadniczo kończy dowód, pozostają techniczne detale. Wykorzystana w nim została interpretacja geometryczna mnożenia przez liczbę zespoloną, a także idee głębokie związane z szybkością dążenia potęg $z^n$ do 0, gdy $z$ dąży do 0.

Gdyby w ostatnim zdaniu słowa „idee głębokie" zostały zastąpione przez słowo „intuicja", można by to inaczej odebrać. Powyższy dowód jest w pełni kompletny, nie ma w nim istotnej luki, a przez dowód oparty na intuicji zazwyczaj rozumie się dowód niedający gwarancji poprawności.[11] Jak wiadomo, nie da się zadowalająco zdefiniować, co się uważa za rozumowanie wystarczająco ścisłe (Thom 1970/1974a, s. 118; Davis, Hersh 1981/1994, s. 340).

Okazuje się, że w dowodzie podanym w (Sierpiński 1951) użyte jest w zasadzie to samo rozumowanie, napisane jednak w sposób, który był odbiciem przekonania wielu osób owej epoki, że dowód twierdzenia powinien być prowadzony możliwie blisko form powierzchniowych, możliwie blisko hipotetycznego dowodu formalnego. Był to ideał dedukcji w podręczniku akademickim.

Inne nastawienie filozoficzne przedstawił później Andrzej Mostowski:

> Wprawdzie często mówimy, że matematykę można przedstawić w postaci formalnego systemu i zbudować ją na gruncie logiki, wzbogaconej niewielką liczbą aksjomatów, ale naprawdę tego wcale nie robimy. Przeciwnie, przeważająca część matematyków stroni od formalnych dowodów i jak dawniej rozumuje tylko na gruncie intuicji. […] Umysł ludzki pracuje najwyraźniej w świecie inaczej niż maszyna. Toteż nie należy twierdzić, że dowód jest tym lepszy, im bardziej zbliża się do dowodu sformalizowanego. […] Dowód matematyczny jest czymś o wiele bardziej skomplikowanym niż proste następstwo elementarnych prawideł zawartych w tzw. regułach wnioskowania. […] Dowód matematyczny jest zawiłym tworem, ma zawsze część konstrukcyjną, występuje w nim „punkt istotny", dookoła którego cały dowód się obraca, i oczywiście także wiele punktów pomocniczych, mniej ważnych (Mostowski 1972, s. 82-83).

W teorii sformalizowanej dowody zredukowane są do przekształcania form powierzchniowych zgodnie ze ściśle określonymi regułami inferencji, a o ich uznaniu decydują jedynie kryteria o charakterze syntaktycznym. Natomiast sama formalizacja, porównanie formuł z ich zamierzonym znaczeniem odbywa się właśnie w sferze idei głębokich. Do początków XX wieku wszelka dedukcja w teoriach aksjomatycznych opierała się na ideach głębokich (uzupełnianych formami powierzchniowymi). Jeżeli w każdym kroku dowodowym jest oczywiste, że odwołujemy się tylko do znaczenia definicyjnego występujących tam pojęć, taki dowód odpowiada współczesnym standardom. W szczególności dowody w *Grundlagen der Geometrie* (Hilbert

[11] Oczywiście dowód ten może być uznany za kompletny przez osobę, która ma wprawę w takich typach rozumowań. Jednakże to jest normalny sposób redagowania wielu dowodów we współczesnej matematyce, uznanych za kompletne przez kompetentne osoby. Rozpisywanie wszystkich szczegółów w takim stopniu, jak w (Sierpiński 1951), byłoby niecelowe i niewykonalne, wiele prac bowiem stałoby się zbyt długich, aby je można było opublikować, a nawet zbyt długich, by je przeczytać.

1899) wykorzystywały idee głębokie. Nie uważamy ich jednak za dowody oparte na intuicji i to właśnie pokazuje różnicę między intuicją a ideami głębokimi.

## 6. SKLEJENIA POJĘĆ

Idee głębokie pojęć matematycznych są zazwyczaj uwikłane w sieć wzajemnych związków z innymi pojęciami. To, co jest przyjmowane za definicję, jest redukcją w stosunku do epistemicznej idei głębokiej.

Idea głęboka „liczba naturalna" jest *syntezą wielu aspektów pojęcia liczby*: kardynalnego, porządkowego, miarowego. W pojęciu ułamka (takiego jak ¾ lub 170/34) sklejone są różne znaczenia tego słowa, m.in. to, że w jednych sytuacjach ułamek jest liczbą, a w innych parą liczb. Próbowano tego uniknąć przez staranne odróżnianie pojęć: „ułamek ¾" i „liczba wymierna dodatnia ¾". W praktyce akademickiej nadal używa się pojęcia „ułamek" w obu sensach, czasem w tym samym zdaniu. Dwuznaczność pewnych terminów nie jest słabością matematyki, lecz jej ważną, specyficzną cechą i stanowi o jej sile i uniwersalności. *Matematyka jest sztuką nadawania tej samej nazwy różnym rzeczom* (Poincaré 1908/1912, s. 20).

Matematyk używa takich sklejonych pojęć, nadając im znaczenie kontekstowe, dopóki nie natrafi na sytuację, w której jedna ze składowych pojęcia jest nieadekwatna i należy dokonać wyboru.[12] Zdarza się, że nie jest nawet świadom zmiany, tak ta zmiana bywa naturalna i oczywista. Np. trójkąt $\Delta ABC$ bywa definiowany jako albo

($T_0$) twór 0-wymiarowy — trójka (nieuporządkowana) punktów $A$, $B$, $C$ nieleżących na jednej prostej (Borsuk, Szmielew 1955), albo

($T_1$) twór jednowymiarowy — trójka odcinków $AB$, $BC$, $CA$ nieleżących na jednej prostej (Hilbert 1899, s. 6), albo

($T_2$) twór dwuwymiarowy — domknięta część płaszczyzny ograniczona przez łamaną $ABCA$ niezawartą w jednej prostej.

W rozumowaniach dedukcyjnych przyjmuje się jedną z tych definicji, pozostałe zaś wyraża się w terminach tej wybranej. W idei głębokiej „trójkąt" tkwią wszystkie te trzy cechy, są bowiem nieodłącznie związane z pojęciem trójkąta. Będziemy mówić, że są one *sklejone* w idei trójkąta.[13] W tym przykładzie mamy sytuację *normalną*, nie ma tu trudności.

Trudności pojawiają się np. przy pojęciu *kąta*. Kąt może być rozumiany jako miara, tzn. jako liczba rzeczywista przypisana pewnej konfiguracji geometrycznej. Takie kąty można zdefiniować w sposób w pełni zgodny z intuicją. Nie ma jednak dobrej definicji kąta jako figury geometrycznej — obszaru na niezorientowanej płaszczyźnie. Każda propozycja ma jakiś mankament. Według Encyklopedii Szkolnej

---

[12] „Matematycy tym różnią się od filozofów, że sklejają pojęcia tam, gdzie filozofowie je rozszczepiają" — powiedział przed laty Andrzej Grzegorczyk w trakcie dyskusji w IFiS PAN.

[13] Myślałem o użyciu tu słów „zbitka pojęć", ale słowo „zbitka" ma zabarwienie pejoratywne, natomiast słowo „sklejenie" jest neutralne.

WSiP „kąt płaski to dwie półproste o wspólnym początku wraz z jednym z dwóch obszarów, które półproste te wycinają z płaszczyzny". Słowo „wraz" jest dwuznaczne i zręcznie ukrywa pojawiające się tu trudności.[14]

(K1) Słowo „wraz" można rozumieć jako $\cup$. Wówczas kąt półpełny nie ma wierzchołka (lub ma ich nieskończenie wiele).

(K2) Kąt można rozumieć jako trójkę nieuporządkowaną powyższych zbiorów. Wówczas kąt nie jest podzbiorem płaszczyzny.[15]

(K3) Kwestię kąta półpełnego można ratować, usuwając (niezgodnie z intuicją) wierzchołek z kąta (K1).

Mimo tych drobnych kłopotów matematycy świetnie wiedzą, co to jest kąt, jak używać tego pojęcia, a często nawet nie są świadomi, że nie znają definicji. W razie potrzeby każdy potrafiłby wymyśleć jakąś definicję i zapewne nie były one równoważne. Nie zakłóca to rozumowań ani komunikowania się *dzięki wspólnej epistemicznej idei głębokiej kąta*. Idea ta ma nieizomorficzne modele formalne (K1), (K2), (K3) w aksjomatycznej geometrii euklidesowej płaszczyzny. Jest ona jakimś sklejeniem (K1) i (K2); w rozumowaniu używa się tego aspektu, który akurat pasuje. Idea głęboka kąta jest elastyczna, jej model modyfikowany jest w razie potrzeby w specjalnym przypadku kąta półpełnego.

## 7. LOKALNOŚĆ UTOŻSAMIANIA POJĘĆ

Zdarza się nieraz, że zmiana znaczenia terminu matematycznego jest wyraźnie zadeklarowana. Ma to często formę *utożsamiania* dwóch pojęć $X$ i $X'$. Powstaje nowy byt złożony $X''$, nieraz nazwany tak, jak jeden z utożsamianych obiektów.

Punkt $P=(x,y,z)$ w $\boldsymbol{R}^3$ nieraz utożsamia się z wektorem swobodnym $W=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ (o tych samych współrzędnych). Miewa to postać redukcji. Jedno z tych pojęć eliminuje się jako zbędne bądź deklaruje się, że np. „ciąg $(x,y,z)$ będzie nazywany punktem *lub* wektorem". Pomimo takiej deklaracji oba znaczenia tkwią nieusuwalnie w idei głębokiej. Dwa byty $P$ i $W$ stają się jednym sklejonym bytem $P\&W$, który ujawnia cechy punktu bądź wektora zależnie od kontekstu. Wektor swobodny $W$ w $\boldsymbol{R}^3$ bywa

---

[14] Analizując w podręcznikach miejsca, w których pojawiają się kłopoty tu opisane i inne podobnego typu, można nieraz stwierdzić zręczność w zredagowaniu danego fragmentu tak, aby był merytorycznie poprawny, a zarazem nie zwracał niepotrzebnej uwagi na drugorzędne detale.

Odwrotne nastawienie było widoczne w okresie tzw. *mathématique moderne* (lata sześćdziesiąte i siedemdziesiąte XX wieku), gdy to (w prawie 40 lat po twierdzeniu Gödla) formalistyczne prądy filozofii matematyki zaczęły przenikać do podręczników szkolnych. Jednym z objawów tego było zwiększenie precyzji wysłowień, w szczególności staranne rozróżnianie składowych sklejonych pojęć. Wbrew oczekiwaniom reformatorów nie stało się to ułatwieniem dla uczniów, lecz źródłem nowych trudności. Jednym z najbardziej znanych przeciwników owych zmian był René Thom (Thom 1970/1974a; Thom 1973/1974b).

[15] Definicja (K2) pojawiła się w 1967 r. w polskim podręczniku Krygowskiej do liceum.

również utożsamiony z translacją $T{:}\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ (przesunięciem o wektor *W*). Powstaje inny byt *W&T.*

Każde z tych utożsamień: *P* z *W* oraz *W* z *T* jest prawomocne, ale oba naraz są nieakceptowalne. Punkt nie może być utożsamiony z translacją. *Te utożsamienia są więc lokalne, nie mogą funkcjonować równocześnie w całej matematyce*.

Wróćmy do argumentu Benacerrafa. Zmodyfikujemy go następująco. Rozważamy pojęcie liczby naturalnej *n* jako czysto liczbowe, tzn. bez żadnych innych konotacji. Wprowadzimy symbol relacji », zakładając, że *n*»*E* może zachodzić między liczbą naturalną *n* a zbiorem *E.* Wyrażenie *n*»*E* będziemy interpretować kolejno na trzy różne sposoby, zgodnie z trzema stanowiskami ontologicznymi, sformułowanymi na początku tej pracy: ($O_1$) *n*»*E* oznacza, że liczba *n* jest identyczna ze zbiorem *E*, tzn. $n=E$, a znak » jest po prostu znakiem równości, ($O_2$) *n*»*E* oznacza, że liczba *n* może być utożsamiona ze zbiorem *E*, ($O_3$) *n*»*E* oznacza, że *E* odpowiada liczbie *n* w danym modelu arytmetyki w teorii mnogości.

W modelu Zermela liczb naturalnych mamy $0»0_Z$, $1»1_Z$, $2»2_Z$,…, gdzie

$0_Z=\varnothing$, $1_Z=\{\varnothing\}$, $2_Z=\{\{\varnothing\}\}$, $3_Z=\{\{\{\varnothing\}\}\}$,… i ogólnie jeśli $n»E$, to $n+1»\{E\}$.

Gdy przyjmie się jedną z ontologii ($O_1$), ($O_2$), ($O_3$), wówczas zgodnie z nią należy interpretować symbol ». W modelu von Neumanna mamy

$0»0_N$, $1»1_N$, $2»2_N$, …, gdzie $0_N=\varnothing$, $1_N=\{\varnothing\}$, $2_N=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, $3_N=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$,…

i ogólnie jeśli $n»E$, to $n+1»E\cup\{E\}$. Otóż jedną z własności zbioru $3_N$ jest to, że jego elementem jest $0_N$. Z uwagi na poczynione wyżej założenie o czysto arytmetycznej konotacji liczby 3, nie ma ona tej własności. Tak więc na mocy kryterium Leibniza $3_N\neq3$. Podobnie pokazujemy, że $3_Z\neq3$. Rozumowanie to wyklucza więc interpretację ($O_1$) w obu modelach: Zermela i von Neumanna. Możliwa jest ontologia ($O_2$), ale z zastrzeżeniem, że utożsamianie — jak w przypadku wektorów — ma charakter lokalny, nie dotyczy całej matematyki.

Problem wieloredukcji liczb naturalnych jest podobny do problemu wieloredukcji dla liczb rzeczywistych, od którego rozpoczęliśmy tę pracę. Zachodzi między nimi jednak fundamentalna różnica. Konstrukcje Zermela i von Neumanna mają znaczenie jedynie dla podstaw matematyki (ta pierwsza — jedynie historyczne) i dla filozofii matematyki. Natomiast konstrukcje Dedekinda i Cantora odgrywają istotną rolę we współczesnej matematyce, a druga na trwałe weszła do kanonu wiedzy.

## 8. ANOMALIA PAR UPORZĄDKOWANYCH I FUNKCJI

Omówimy najbardziej wyrazisty przykład ujawniający wykorzystywanie idei głębokich epistemicznych. Jest to pewnego typu błędne koło, nieusuwalne, niezgodne z zaakceptowanym formalizmem, związane z pojęciami: pary uporządkowanej i funkcji. Definiuje się kolejno w dobrze znany sposób: $(a,b)_{\text{para}}=\{\{a\},\{a,b\}\}$; iloczyn kartezjański dwóch zbiorów $X{\times}Y$ to zbiór par $(x,y)_{\mathrm{para}}$ takich, że $x{\in}X$, $y{\in}Y$; relacja to podzbiór zbioru $X{\times}Y$; funkcja $f\colon X{\to}Y$ to relacja spełniająca znane warunki; ciąg $(a_1,\ldots,a_n)$ to funkcja ze zbioru $\{1,\ldots,n\}$; iloczyn kartezjański $n$ zbiorów $X_1{\times}\ldots{\times}X_n$ to zbiór ciągów $(x_1,\ldots,x_n)$ takich, że $x_j{\in}X_j$ dla $j{\in}\{1,\ldots,n\}$.

Jednakże dla $n$=2 iloczyn $X_1{\times}X_2$ zdefiniowany przez ciągi o dwóch wyrazach nie jest identyczny z iloczynem $X_1{\times}X_2$ zdefiniowanym przez pary uporządkowane, gdyż $(x,y)_{\mathrm{ciąg}}$ to $\{(1,x)_{\mathrm{para}}, (2,y)_{\mathrm{para}}\}$, czyli $\{\{\{1\}, \{1,x\}\}, \{\{2\},\{2,y\}\}\}$, a więc nie jest tym samym co para $(x,y)_{\mathrm{para}}$ równa $\{\{x, \{x,y\}\}$.

Fakt ten jest anomalią w dedukcyjnym obrazie matematyki, opartym na precyzyjnej dedukcji w aksjomatycznym systemie teorii mnogości. Co więcej, niezgodności między parą uporządkowaną użytą w definicji pojęcia funkcji a ciągiem dwuwyrazowym zdefiniowanym jako funkcja na $\{1,2\}$ nie da się usunąć przez zmianę definicji pary uporządkowanej.

Ta niezgodność jest znana. Kuratowski i Mostowski komentują ją, pisząc: „W zastosowaniach jest jednak zazwyczaj obojętne, którego z tych dwóch pojęć użyć; rozróżnienie między nimi jest nieistotne, ze względu na możliwość wzajemnie jednoznacznego przyporządkowania każdej parze $(x,y)_{\mathrm{para}}$ ciągu $(x,y)_{\mathrm{ciąg}}$" (Kuratowski, Mostowski 1952, s. 56 i 73; Rasiowa 1968, s. 72).

Nasuwa się jednak inne, bardziej przekonujące wyjaśnienie: ta niezgodność jest dla matematyków nieistotna, bo $1^0$ do formalnej dedukcji nie jest potrzebna interpretacja ciągów jako funkcji na początkowych liczbach naturalnych,[16] $2^0$ matematycy posługują się ideą głęboką pary, a nie jej modelami $(x,y)_{\mathrm{para}}$ lub $(x,y)_{\mathrm{ciąg}}$.

Na źródło tej idei wskazał jeden z twórców teorii mnogości:

> To pojęcie [pary uporządkowanej] jest więc fundamentalne w matematyce; z psychologicznego punktu widzenia uporządkowane, niesymetryczne powiązanie (*Verknüpfung*) dwóch rzeczy jest nawet pierwotniejsze (*ursprünglicher*) niż nieuporządkowane, symetryczne, kolektywne. Myślenie, mowa, czytanie i pisanie są powiązane z następstwem czasowym. Wyraz jest czymś wcześniejszym niż zbiór jego liter, para uporządkowana $(a,b)$ jest wcześniejsza od nieuporządkowanej $\{a, b\}$ (Hausdorff 1914, s. 32).

## 9. IDEE GŁĘBOKIE A EPISTEMOLOGIA GENETYCZNA

Opisy mechanizmów tworzenia się pojęć w ontogenezie można znaleźć w teoriach konstruktywistycznych wywodzących się z epistemologii genetycznej Piageta.[17] Ich istotę stanowi teza, że struktury logiczno-matematyczne w umyśle człowieka powstają w wyniku długiego procesu rozwojowego, *z koordynacji czynności* na przedmiotach — najpierw konkretnych, później na coraz wyższym stopniu abstrakcji

---

[16] Gödel uniknął tej trudności, nie definiując ciągów jako funkcji, lecz indukcyjnie. We współczesnej symbolice teorii mnogości jego definicje można zapisać jako $(x,y,z) = (x,(y,z))$, $(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (x_1,(x_2,\ldots,x_n))$ (Gödel 1940).

[17] Są one istotnie różne od prądów konstruktywistycznych w filozofii matematyki.

— *i refleksji* nad tymi czynnościami. Piaget podkreślał też analogie między mechanizmami wpływającymi na kolejne przejścia rozwojowe w filogenezie i ontogenezie.

Szczególnie wart uwagi jest opis przechodzenia obiektów konstruowanych w ramach poszczególnych teorii w ich rozwoju historycznym na kolejne poziomy w trójkowych cyklach (Piaget, Garcia 1989, s. 28):

etap *intra*: konstruowanie i analizowanie pojedynczych obiektów,

etap *inter*: wykonywanie czynności na obiektach, analizowanie związków między nimi i ich przekształceń,

etap *trans*: budowanie nowych obiektów wyższego poziomu z obiektów skonstruowanych w poprzednim etapie i budowanie struktur.[18]

Dla Piageta bardzo ważne było to, że *zawsze nowe struktury poznawcze są integrowane z poprzednimi*. Wcześniejsze struktury nie są odrzucane, lecz są wbudowane w późniejsze.

Przyjmujemy, że idee głębokie — zarówno indywidualne, jak i epistemiczne — są produktem rozwojowym tego rodzaju mechanizmów. Wynika stąd m.in., że *idee głębokie nie polegają jedynie na sklejeniu różnych znaczeń i aspektów*. Tkwi w nich wiele wcześniejszych, nieusuwalnych konstrukcji umysłowych. W szczególności wczesne konstrukcje dotyczące m.in. liczb kształtów tkwią nawet w zaawansowanych, bardzo wyrafinowanych pojęciach matematycznych.

Niezgodności między ideami głębokimi a ich modelami formalnymi dotyczą głównie *tych pojęć, których intuicje przestrzenno-temporalne są wcześniejsze niż ich współczesne ujęcie definicyjne*. Natomiast na wyższych piętrach matematyki, w wypadku idei głębokich pojęć zaawansowanych, tworzonych od razu w ujęciu mnogościowym, takich niezgodności nie widać.

## 10. PRZECHODZENIE OD PROCESU DO OBIEKTU W GENEZIE IDEI GŁĘBOKICH

Pojęcia arytmetyczne mają swe źródło w doświadczeniach logiczno-matematycznych, wywodzących się z czynności na przedmiotach, jednakże *poznanie wyprowadzane jest z samych czynności, a nie z owych przedmiotów* (Piaget 1971/1977, s. 80).

Pojęcia arytmetyki, algebry i analizy wywodzą się z (szeroko rozumianych) *procesów* rozumianych jako sekwencje czynności wykonywanych najpierw na przedmiotach realnych, a potem stopniowo na coraz wyższym poziomie abstrakcji (Gray, Tall 1994). W wyniku wielokrotnych powtórzeń i stopniowej kondensacji to, co początkowo było jedynie procesem, staje się — wraz z wynikiem tego procesu —

[18] Również Thom wyrażał pogląd, że rozwój matematyki oparty jest na konstrukcjach nowych obiektów, a struktury są wtórne (Thom 1997).

Piaget pisał, że strukturalizm idzie w parze z pewnego rodzaju konstruktywizmem i nawet struktury w matematyce (abstrakcyjne, nietemporalne, z narzuconymi ograniczeniami formalizacji) pochodzą z samoregulacji i z operacji, których są wytworem (Piaget 1972, s. 54).

obiektem myślowym.[19] Mamy więc: proces, utworzenie się nowego obiektu, proces na nowych obiektach, utworzenie się obiektu wyższego rzędu, proces na tych obiektach wyższego rzędu itd. Przejście od procesu do obiektu nazywa się *enkapsulacją* lub *reifikacją.*[20]

Na przykład, w wyniku wielokrotnie powtarzanego procesu liczenia 1, 2, 3, 4, 5, 6 powstaje samodzielny obiekt: liczba 6. W konstruowaniu dodawania, np. liczb 5 i 4, wyróżnia się trzy etapy. Pierwszy: dziecko potrafi jedynie przeliczać wszystkie elementy, wymawiając liczebniki od 1 do 9. Drugi poziom to doliczanie: 6, 7, 8 (składnik 5 jest już dla dziecka obiektem, a „dodać 4" jest jeszcze jedynie procesem). Trzeci poziom: dziecko wie, że wynik jest 9, i ponadto symbol 5+4 nie jest już dla niego jedynie poleceniem: „oblicz", jest ono już w stanie traktować 5+4 jako nowy obiekt, jako pojedynczą liczbę. Istotną rolę w takich przejściach odgrywa to, że i proces, i tworzony obiekt oznaczane są tym samym symbolem, np. 5+4 lub $\int_a^b \sin x\, dx$.

W początkach arytmetyki prowadzi to do następującego uproszczonego obrazu kolejnego przejścia: proces liczenia $\rightarrow$ pojęcie liczby $\uparrow$ proces doliczania $\rightarrow$ pojęcie sumy $\uparrow$ proces powtarzania dodawania $\rightarrow$ pojęcie iloczynu. Strzałka $\uparrow$ symbolizuje tu przejście na wyższy poziom rozwoju, na poziom wcześniej nieosiągalny dla poznającego podmiotu.

Powyższy przykład hierarchii procesów i obiektów dotyczy jedynie okresu ich powstawania. Kluczowe jest zjawisko *spłaszczania się hierarchii pojęć w filogenezie i w ontogenezie*, które obrazowo można przedstawić symbolicznie na omawianym przykładzie jako: pojęcie liczby $\rightarrow$ pojęcie sumy $\rightarrow$ pojęcie iloczynu, *na równym poziomie*, bez strzałek $\uparrow$, bez dawniejszych progów trudności (Gray, Tall 1994).

Można podać wiele podobnych przykładów spłaszczania się hierarchii w rozwoju historycznym i w rozwoju osobniczym. Sugestywne jest zestawienie dawniejszego olbrzymiego skoku pojęciowego od liczb dodatnich do ujemnych z późniejszym traktowaniem liczb ujemnych na tym samym zasadniczo poziomie (jedne są na osi na prawo od zera, drugie na lewo). Wprawdzie liczby ujemne nadal są trudniejsze w obliczeniach, ale nie ma już takiej jakościowej różnicy poznawczej, jaka była wcześniej.

Inny przykład to przejście od $\boldsymbol{R}^n$ do abstrakcyjnie określonej przestrzeni wektorowej. Dla początkującego jest to bardzo trudne; później ta sama osoba może uznać aksjomatycznie ujęcie za łatwiejsze do stosowania.

*Spłaszczanie się hierarchii jest istotnym czynnikiem w rozwoju idei głębokich*.

---

[19] Również w rozwoju historycznym można wyróżnić pewne etapy interpretowane jako procesy i następujące po nich tworzenie się pojęć jako obiektów.

[20] Naszkicowany tu mechanizm proces $\rightarrow$ obiekt dotyczy jedynie kształtowania pojęć arytmetyczno-algebraiczno-analitycznych. Rozwój pojęć geometrycznych przebiega inaczej, kluczową bowiem rolę odgrywa w nim percepcja (oprócz percepcji nieodzowna jest też aktywność podmiotu, czynności wykonywane na realnych kształtach, a potem na wyobrażonych i na pojęciach).

## 11. PRZYKŁAD HIERARCHII TEORII AKSJOMATYCZNYCH BUDOWANYCH JEDNE NA DRUGICH

Warte podkreślenia są pewne analogie między opisanymi wyżej etapami konstruowania wiedzy matematycznej w ontogenezie i filogenezie na coraz wyższych piętrach pojęciowych a typowymi hierarchiami teorii XX wieku. Na szczególną uwagę zasługuje fakt pojawiania się kolejnych teorii aksjomatycznych na coraz wyższych piętrach, unifikujących struktury skonstruowane na poprzednim etapie. Jako ilustrację opiszemy kolejne poziomy jednej z nich:[21]

(1a) zbiór $X$ (dowolny); (1b) σ-ciało $\mathcal{M}$ podzbiorów zbioru $X$; (1c) miara $\mu:\mathcal{M}\to\boldsymbol{R}$,

(2) zespolone przestrzenie Hilberta $L^2(X,\mathcal{M},\mu)$ funkcji $f$ na $X$ takich, że $\int_X |f|^2\, d\mu < \infty$;

(3) aksjomatycznie określone przestrzenie Hilberta $H$ (ich modelami są przestrzenie $L^2$ z poprzedniego szczebla);

(4) operatory liniowe ograniczone $\Phi:H\to H$ i operatory $\Phi^*:H\to H$ do nich sprzężone;

(5) algebry $B(H)$ operatorów liniowych ograniczonych na $H$;

(6) aksjomatycznie określone algebry $A$ typu $C^*$; ich modelami są *-podalgebry algebr typu $B(H)$;

(7) stany na algebrze $A$ typu $C^*$ zdefiniowane jako funkcjonały liniowe $\varphi$ na $A$ o wartościach zespolonych, takie że $\varphi(I)=1$ i $\varphi(x^*x)\geq 0$ dla każdego $x\in A$;

(8) zbiór $K$ (wypukły i zwarty) wszystkich stanów na $A$;

(9) zbiór $\partial K$ stanów czystych zdefiniowanych jako punkty ekstremalne zbioru $K$ (pojęcie punktu ekstremalnego to uogólnienie pojęcia wierzchołka bryły wypukłej);[22]

(10) całki względem miar Radona po zbiorze $\partial K$;

(11) sympleksy Choqueta (zbiory wypukłe zwarte $K$ takie, że przedstawienia elementów zbioru $K$ w postaci całek po $\partial K$ są jednoznaczne).

Powyższe pojęcia wymagają specjalistycznej wiedzy. Celem tego zestawienia jest pokazanie pewnych analogii między kolejnymi warstwami wiedzy matematycznej integrującej się w umyśle dziecka na początku okresu szkolnego a zaawansowanymi teoriami XX wieku. Różnica polega na tym, że w tym drugim wypadku poszczególne warstwy są wyraźnie wyodrębnione. Z filozoficznego punktu widzenia istotne jest to, że szczeble (3) i (6) to teorie aksjomatyczne, unifikujące obiekty poprzedniego etapu. Szczeble (4), (7), (9), (10), (11) to definicje wyrażone w języku danej teorii aksjomatycznej, pozostałe zaś szczeble to zbiory obiektów zbudowanych

[21] Szczegóły można znaleźć w (Żelazko 1968; Semadeni 1971).

[22] W wielu rozumowaniach punkt ekstremalny $x$ uważany jest za 0-wymiarową ścianę; ściany są zbiorami, tkwi więc tu nieuświadomione sklejenie $x$ z $\{x\}$.

na poprzednim etapie. Do studiowania — w pewnym zakresie — obiektów na każdym ze szczebli (3), (6) i (8) nie jest niezbędne opanowanie teorii wcześniejszych. Hierarchia ta może być dalej rozbudowywana, w różny sposób, np. przez rozważanie kategorii obiektów pewnego szczebla, następnie funktorów na tych kategoriach, następnie transformacji naturalnych tych funktorów itd.

Podstawowe pojęcia i sądy każdego z tych szczebli są ideami głębokimi epistemicznymi. W ich tworzeniu się istotne było spłaszczanie się hierarchii pojęć.

## 12. PODSUMOWANIE

Praca ta należy do deskryptywnego nurtu w filozofii matematyki. Jako punkt wyjścia analiz przyjęta jest teza o trojakiej naturze matematyki, w której wyróżnia się idee głębokie tworów matematycznych, formy powierzchniowe (znaki reprezentujące te twory) i modele formalne w teoriach aksjomatycznych.

Podane w pracy przykłady pokazują, że koncepcja idei głębokich pozwala wyjaśnić i lepiej zrozumieć pewne zjawiska dotyczące matematyki i sposobów jej prezentacji przez matematyków, w szczególności niezgodności między zadeklarowanymi definicjami a ich praktycznym użyciem.

Idee głębokie indywidualne powstają w ontogenezie w długim procesie konstruowania pojęć w umyśle, konstruowania rozmaitych związków między nimi i ich restrukturyzacji przy przechodzeniu na wyższe piętra.

Idee głębokie epistemiczne powstają w filogenezie, a między procesami tworzenia się jednych i drugich idei są widoczne pewne analogie.

## BIBLIOGRAFIA

Benacerraf, P. (1983), *What numbers could not be*, [w:] *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, red. P. Benacerraf, H. Putnam, Cambridge, University Press, s. 272-294.

Beth, E. W., Piaget, J. (1966), *Mathematical Epistemology and Psychology*, Dordrecht, D. Reidel.

Birkhoff, G. (1948), *Lattice Theory*, New York, Amer. Math. Soc. [przekład ros.: *Tieorija struktur*, Moskwa 1952].

Bondecka-Krzykowska, I. (2004), *Matematyka w ujęciu strukturalnym*, „Filozofia Nauki” 12 nr 1, s. 19-28.

Borsuk, K., Szmielew, W. (1955), *Podstawy geometrii*, Warszawa, PWN.

Boyer, C. B. (1939/1964), *Historia rachunku różniczkowego i całkowego i rozwój jego pojęć*, Warszawa, PWN.

Davis, P. J., Hersh, R. (1981/1994), *Świat matematyki*, Warszawa, PWN.

Duda, R. (1982), *Zasada paralelizmu w dydaktyce*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki” 1, s. 127-138.

Feferman, S. (2000), *Mathematical Intuition Vs. Mathematical Monsters*, „Synthese” 125(3), s. 325-332.

Ferreirós, J. (1999), *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Basel, Birkhäuser.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in Mathematics and Science. An Educational Approach*, Dordrecht, Reidel.
Freudenthal, H. (1985), *Niejawna filozofia historii i dydaktyki matematyki*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki" 5, s. 7-25.
Freudenthal, H. (1991), *Revisiting Mathematical Education. China lectures*, Dordrecht, Kluwer.
Gödel, K. (1940), *The consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum-Hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton, University Press.
Gödel, K. (1947/2002), *Co to jest Cantora problem continuum?*, [w:] *Współczesna filozofia matematyki. Wybór tekstów*, red. R. Murawski, Warszawa, PWN, s. 103-123.
Gray, E. M., Tall, D. O. (1994), *Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic*, „Journal for Research in Mathematics Education" 25, no. 2, s. 115-141.
Hahn, H. (1956), *The Crisis in Intuition*, [w:] *The World of Mathematics*, vol. 3, New York, Simon and Schuster, s. 1956-1976.
Hausdorff, F. (1914), *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit.
Hilbert, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner.
Hobson, E. W. (1907), *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, vol. 1, Cambridge, University Press.
Kelley, J. L. (1955), *General Topology*, Princeton, Van Nostrand.
Kitcher, P. (1984), *The nature of mathematical knowledge*, Oxford, University Press.
Krajewski, S. (2010), *Czy matematyka jest nauką humanistyczną*, [w:] *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Poznań, Wyd. Nauk. UAM, s. 187-202.
Król, Z. (2006), *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Warszawa, Wyd. Inst. Filoz. i Soc. PAN.
Kuratowski, K. (1967), *Wykłady rachunku różniczkowego i całkowego*, wyd. III, Warszawa, PWN.
Kuratowski, K., Mostowski, A. (1952), *Teoria mnogości*, Warszawa, PTM.
Kurcz, I. (1992), *Język a psychologia*, Warszawa, WSiP.
Lakatos, I. (1964/2005), *Dowody i refutacje. Logika odkrycia naukowego*, Warszawa, Tikkun.
Landau, E. (1930), *Grundlagen der Analysis*, Leipzig, Akademisch Verlagsgesellschaft.
Mostowski, A. (1972), *Matematyka a logika*, „Wiadomości Matematyczne" 15, s. 79-89.
Murawski, R. (1986), *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań, Wyd. Nauk. UAM.
Murawski, R. (2001), *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, wyd. II, Warszawa, PWN.
Parsons, C. (2000), *Reason and Intuition*, „Synthese" 125(3), s. 299-315.
Piaget, J. (1972), *The concept of structure*, [w:] *Scientific thought*, Paris-The Hague, UNESCO Division of Philosophy, s. 35-56.
Piaget, J. (1971/1977), *Psychologia i epistemologia*, Warszawa, PWN.
Piaget, J., Garcia, R. (1989), *Psychogenesis and the History of Science*, New York, Columbia University Press.
Poincaré, H. (1908/1912), *Nauka i Metoda*, Warszawa-Lwów, J. Mortkowicz.
Rasiowa, H. (1968), *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa, PWN.
Semadeni, Z. (1971), *Banach spaces of continuous functions*, Warszawa, PWN.
Semadeni, Z. (2002), *Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki" 24, s. 41-92.
Semadeni, Z. (2008), *Deep intuition as a level in the development of the concept image*, „Educational Studies in Mathematics" 68, s. 1-17.
Sierpińska, A. (1994), *Understanding in Mathematics*, Falmer Press, London.

Sierpiński, W. (1951), *Zasady algebry wyższej*, Warszawa, PTM.
Skemp, R. (1982), *Communicating mathematics: surface structures and deep structures*, „Visible Language", 16 nr 3, s. 281-288.
Thom, R. (1970/1974a), *Matematyka „nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?*, „Wiadomości Matematyczne" 18, s. 113-129.
Thom, R. (1973/1974b), *Czy istnieje matematyka nowoczesna?*, „Wiadomości Matematyczne" 18, s. 130-142.
Thom, R. (1997), *The hylemorphic schema in mathematics*, [w:] *Philosophy of Mathematics Today*, red. E. Agazzi, G. Darvas, Dordrecht-Boston-London 1997, Kluwer, s. 101-113.
Wang, H. (1974), *From Mathematics to Philosophy*, London, Routledge & Kegan Paul.
Woleński, J. (2003), *Epistemologia*, tom III, Kraków, Aureus.
Wójtowicz, K. (1999), *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Warszawa, Wydz. Filozofii i Socjologii UW.
Wójtowicz, K. (2003), *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa, Semper.
Wójtowicz, K. (2010), *Empiryczne aspekty dowodów matematycznych*, [w:] *Światy matematyki. Tworzenie czy odkrywanie?*, red. I. Bondecka-Krzykowska, J. Pogonowski, Poznań, Wyd. Nauk. UAM, s. 187-202.
Żelazko, W. (1968), *Algebry Banacha*, Warszawa, PWN.