Katarzyna Patro, Wojciech Krzysztofiak

# Umysłowe osie liczbowe : efekt SNARC : aspekty filozoficzne

Filozofia Nauki 21/3, 45-98

2013

*Filozofia Nauki*
*Rok XXI, 2013, Nr 3(83)*

Katarzyna Patro, Wojciech Krysztofiak

# Umysłowe osie liczbowe. Efekt SNARC Aspekty filozoficzne*

Celem artykułu jest skonstruowanie modelu struktury reprezentacyjnej wyjaśniającej wyniki niektórych współczesnych badań eksperymentalnych w zakresie tzw. arytmetyki kognitywnej, w szczególności wyniki nazywane technicznie efektem SNARC, efektem odległości, efektem wielkości oraz efektem skali. Nasz cel badawczy może zostać zinterpretowany jako filozoficzna próba formalnego modelowania, z uwagi na wyniki badań eksperymentalnych, podstawowej formy poznawczej procesów myślenia arytmetycznego. Zakładamy bowiem w duchu neokantowskiej epistemologii, że umysł wyposażony jest w system form poznawczych, składających się na tzw. wiedzę rdzenną (*core knowledge*). Umożliwiają one umysłowi wykonywanie różnych elementarnych czynności poznawczych, w szczególności konceptualizację tego, co jest mu dane w codziennym doświadczeniu[1].

Modele formalne jednostek funkcjonalnych umysłu nie są tu rozumiane jako modele formalne ich neuronalnych implementacji, czyli „symulatorów pracy mózgu"

---

* Praca została częściowo napisana w ramach projektu sfinansowanego ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/B/HS1/04029.

[1] Badacze podkreślają, że na system wiedzy rdzennej składa się pięć modułów „odpowiedzialnych" za: (1) reprezentowanie nieożywionych przedmiotów i ich wzajemnych interakcji, (2) reprezentowanie agentów i ich celowo zorientowanych działań, (3) reprezentowanie liczebności, porządków i wielkości, (4) reprezentowanie miejsc geometrycznych w ich przestrzennym rozmieszczeniu, (5) reprezentowanie własnej grupy społecznej oraz obcych grup społecznych, a także ich członków (Kinzler, Spelke 2007, Spelke, Kinzler 2007). Moduły te można więc interpretować jako mechanizmy poznawcze umożliwiające umysłowi wykonywanie aktów odnoszenia się do: (1) przedmiotów i układów przedmiotów nieożywionych, (2) podmiotów i ich działań, (3) liczebności, pozycji porządkowych i wielkości, (4) miejsc, obszarów i regionów w przestrzeni fizycznej, (5) zbiorowości ludzkich.

w określonych obszarach poznawczych. Między umysłowymi modelami formalnymi a „symulatorami mózgowymi" zachodzi jedno-wieloznaczna relacja realizacji. Dany formalny model umysłowy może się realizować w wielu różnych symulatorach mózgowych, które są zbudowane z neuronów i stanowią systemy obliczeniowe naśladujące pracę umysłu w danym aspekcie[2]. Nie konstruujemy symulatora mózgowego imitującego pracę mózgu podczas wykonywania przez umysł czynności odniesienia liczebnikowego. Dlatego też nasze uwagi dotyczące sposobów implementacji umysłowych reprezentacji liczbowych w sieci neuronów mają charakter wyłącznie ilustracyjny. Ich celem jest pokazanie, że sposób implementacji określonych formalnych modeli umysłu może wpływać na ich rozwój i przekształcanie się w inne formalne modele umysłowe, które lepiej spełniają funkcje poznawcze modeli starszych ontogenetycznie. W związku z tym przyjmujemy w pracy „naiwne" rozumienie implementacji w sieci neuronowej, zgodnie z którym implementacjami reprezentacji liczebników są zbiory aktywacji neuronów. Abstrahujemy więc od kategorii „rozproszonych populacji neuronowych" rozumianych jako systemy łącznych reakcji pewnych neuronów na impulsy wysyłane przez grupy innych neuronów. Opracowanie takich ścisłych symulatorów mózgowych dla naszego formalnego modelu posługiwania się liczebnikami należy do kompetencji informatyków kognitywnych. Pracę nad takim symulatorem pozostawiamy więc informatykom-inżynierom.

Wielu badaczy za podstawową formę poznawczą myślenia arytmetycznego uznaje umysłową oś liczbową, o której istnieniu mają świadczyć w szczególności efekty SNARC. Stanowi ona fundament dojrzałej kompetencji arytmetycznej, obejmującej m.in. zdolność do odniesienia liczebnikowego. Kompetencja ta nie wymaga znajomości definicji, praw ani algorytmów matematycznych używanych podczas rozwiązywania technicznych problemów dotyczących liczb i jest niekiedy określana w literaturze jako *number sense* (zmysł liczby) (Giaquinto 2001, Dehaene 2001, Berch 2005) czy też jako arytmetyka poznawcza lub umysłowa (Ashcraft 1992). Ponieważ aktywność umysłu ludzkiego obejmuje trzy różne typy odniesienia liczebnikowego (odnoszenie się do liczności, odnoszenie się do wielkości oraz odnoszenie się do pozycji porząd-

---

[2] Np. perceptron Rosenblatta (skonstruowany w 1958 roku) był pierwszym komputerem neuronowym (symulatorem mózgowym) naśladującym czynności umysłowe klasyfikowania postrzeganych wzorców. Rzecz jasna symulator ten nie stanowił adekwatnej implementacji umysłowego modelu rozpoznawania wzorców percepcyjnych. Aby lepiej zrozumieć relację między formalnym modelem pewnej jednostki funkcjonalnej umysłu a formalnym modelem jej implementacji w systemie neuronów, można posłużyć się następującą analogią: aksjomatyka arytmetyki Peana (PA) stanowi opis czegoś, co byłoby odpowiednikiem pewnego umysłowego modelu formalnego, natomiast jej rozmaite gödelizacje (arytmetyzacje) stanowiłyby odpowiedniki różnych implementacji PA w układach cyfrowych. Symulatory mózgowe opisują więc fizyczny mechanizm funkcjonowania określonego formalnego modelu danej funkcjonalnej jednostki umysłu (systemu umysłowego), podobnie jak określona gödelizacja arytmetyki PA opisuje rekurencyjny mechanizm jej funkcjonowania. W pracy abstrahujemy od zaproponowanej przez Marra (1982) trójpoziomowej koncepcji analizy zjawisk umysłowych.

kowych), wyłania się następujący problem epistemologiczny: w jaki sposób przetwarzana jest umysłowa oś liczbowa, skoro wynikiem tych procesów jest powstanie (synteza) arytmetycznych reprezentacji umysłowych, których aktywacja w umyśle towarzyszy czynnościom odniesienia liczebnikowego wymienionych typów? Pytanie to uzasadnia celowość konstruowania formalnego modelu umysłowej osi liczbowej. Przy czym przyjmujemy w naszych analizach założenie, że w umyśle zakodowana jest dokładnie jedna, zintegrowana (być może nader skomplikowana ontologicznie) struktura reprezentacyjna liczb, której model stanowi narzędzie wyjaśnienia wielu efektów eksperymentalnych dotyczących posługiwania się przez umysł liczebnikami.

## 1. TYPY ODNIESIENIA LICZEBNIKOWEGO

Czynności odniesienia liczebnikowego są wszelkiego rodzaju czynnościami intencjonalnego odnoszenia się umysłu za pomocą liczebników do rozmaitych przedmiotów zarówno doświadczanych zmysłowo, jak i tych, które nie są dane w doświadczeniu zmysłowym. Kategoria liczebników jest rozumiana szeroko — obejmuje liczebniki symboliczne oraz liczebniki niesymboliczne.

Liczebnikami niesymbolicznymi są wszelkie rozmaitości indywiduów doświadczane zmysłowo lub przedstawiane w przypomnieniach bądź w wyobrażeniach przez umysł. W tym sensie liczebnikami niesymbolicznymi są na przykład rozrzucone na ekranie komputera ciemne kropki, ale także kaczuszki w elementarzu pierwszoklasisty czy w końcu doświadczana na sali wykładowej rozmaitość złożona ze studentów. Liczebnik niesymboliczny ujawnia się więc zawsze w jakiejś doświadczanej zmysłowo lub przedstawianej sytuacji jako pewnego rodzaju rozmaitość obiektów, za pomocą której umysł odnosi się do ustalonej jednoznacznie lub wieloznacznie liczebności. Liczebniki niesymboliczne oddziałują na umysł przez składające się na nie obiekty, czego skutkiem jest odniesienie się przez umysł do określonej liczebności. Może mieć ono charakter wyrażalny lub niewyrażalny językowo. W pierwszym wypadku, kiedy na umysł działa liczebnik niesymboliczny utworzony przez pięć plamek na ekranie komputera, umysł może zareagować, formułując wypowiedź „Jest pięć plamek”. Przy czym swoją wypowiedź może traktować jako jednoznaczną lub wieloznaczną. W drugim wypadku sformułowanie „Jest pięć plamek” rozumiane jest jako synonim wypowiedzi „Jest około pięciu plamek”. Z kolei akty odniesienia, które nie są wyrażalne językowo, mają miejsce wtedy, gdy umysł nie jest w stanie nazwać liczebności, do których się odnosi. Umysły niektórych zwierząt (gołębi, szczurów, małp), a także niemowląt odnoszą się w taki sposób do liczebności, gdy doświadczają liczebników niesymbolicznych (Brannon, Merritt 2011, Xu, Spelke 2002). W niektórych wypadkach umysły mogą także odnosić się niejęzykowo w sposób jednoznaczny do małych liczebności (Feigenson, Carey, Hauser 2002, Hauser, Carey 2003). Wieloznaczność lub jednoznaczność odniesienia liczebnikowego nie zależy więc od jego językowej wyrażalności.

Liczebniki symboliczne są wyrażeniami językowymi służącymi do wykonywania przez umysł czynności odniesienia liczebnikowego (do liczności, wielkości oraz porządków) zarówno w sposób jednoznaczny, jak i wieloznaczny. Są one zbudowane zgodnie z regułami gramatycznymi danego języka. Należy przy tym rozróżniać dwa rodzaje liczebników symbolicznych: liczebniki w sensie werbalnym oraz liczebniki cyfrowe (proste lub złożone, które stanowią konkatenacje cyfr elementarnych). Liczebniki w sensie werbalnym są tworzone przez umysł zgodnie z gramatykami języków etnicznych, podczas gdy liczebniki cyfrowe rządzą się swoistymi gramatykami[3] skorelowanymi z różnymi systemami zapisu cyfrowego (np. system zapisu cyfr arabskich w różnych układach, takich jak dziesiątkowy lub piątkowy). Między liczebnikami cyfrowymi a liczebnikami w sensie werbalnym zachodzi relacja przekładalności w tym znaczeniu, że każdy liczebnik cyfrowy jest przekładalny na koreferencyjny i synonimiczny liczebnik w sensie werbalnym. Odwrotna zależność nie zachodzi. Liczebniki w sensie werbalnym, nawet rozumiane jednoznacznie, nie zawsze są przekładalne na synonimiczne liczebniki cyfrowe (choć zawsze są przekładalne na koreferencyjne liczebniki cyfrowe, zob. Krysztofiak 2012: 67). Co więcej, liczebniki w sensie werbalnym rozumiane niejednoznacznie (np. „około pięciu") nie są przekładalne na synonimiczne liczebniki cyfrowe[4].

W kognitywnej psychologii arytmetyki przyjmuje się założenie, że czynnościom posługiwania się liczebnikami towarzyszą procesy syntezy lub aktywacji rozmaitych liczbowych (liczebnikowych) reprezentacji umysłowych. Odróżnienie liczebników symbolicznych od niesymbolicznych przekłada się na rozróżnienie dwóch typów procesów zachodzących w umyśle podczas wykonywania przezeń czynności odniesień liczebnikowych. Gdy na umysł oddziałuje liczebnik niesymboliczny, będziemy mówili, że w umyśle zachodzi proces kodowania reprezentacji liczbowych. Gdy zaś na umysł oddziałuje liczebnik symboliczny, będziemy mówili, że w umyśle zachodzi proces dekodowania reprezentacji liczbowych. Schematycznie oraz idealizacyjnie oba procesy można przedstawić następująco:

(i) Liczebnik niesymboliczny oddziałuje na umysł. Skutkiem tego oddziaływania jest synteza i aktywacja reprezentacji odpowiadającej mu liczebności w umyśle. Taka reprezentacja zazwyczaj jest utrwalana (zapisywana) w postaci określonej funkcjonalnej struktury umysłowej[5]. Kolejną fazą procesu jest powiązanie asocjacyjne tej

---

[3] Gramatyki języków cyfrowych można określić mianem gramatyk typu *Jumblese*. Na ich gruncie funktory występujące w liczebnikach cyfrowych są ukryte; nie ujawniają się ani w warstwie brzmieniowej, ani w warstwie napisowej języka (Krysztofiak 2012: 63).

[4] Dokonując takiego przekładu, umysł formalizuje w języku jakiejś teorii matematycznej cały kontekst językowy z występującym w nim liczebnikiem w sensie werbalnym. Efektywność takich przekładów zależy od inwencji formalizacyjnej umysłu; wymaga eksperckiej wiedzy matematycznej.

[5] Kategoria zapisywania czy też utrwalania reprezentacji w umyśle nie jest tu rozumiana zgodnie z metaforą magazynu pamięciowego. Umysłowy proces zapisania czy też utrwalenia reprezentacji w umyśle należy rozumieć jako zdolność umysłu do systematycznej syntezy i aktywacji danej reprezentacji. Warto dodać, że hipokamp — struktura odpowiedzialna za konsolidację śladu pamię-

reprezentacji z reprezentacją głęboką liczebnika symbolicznego, a tej ostatniej — z reprezentacjami językowymi leksemów liczebnikowych (werbalnych lub cyfrowych; w sensie graficznym lub fonicznym). Jeśli umysł nie jest w stanie przejść którejś z kolejnych faz kodowania reprezentacji, to nie potrafi wykonywać określonych czynności odniesienia liczebnikowego. Niezdolność umysłu do przechowywania (zapisywania i/lub utrwalania) reprezentacji liczebnikowych uniemożliwia mu odnoszenie się do liczebności różnych rozmaitości, zwłaszcza tych danych w przypomnieniach lub wyobrażeniach. Z kolei brak powiązania asocjacyjnego reprezentacji liczb z reprezentacjami liczebników werbalnych uniemożliwia umysłowi wykonywanie wyrażalnych językowo czynności odniesienia liczebnikowego. Może się więc zdarzyć (np. w chorobie Alzheimera), że umysł rozpoznaje liczność trzech osób i umie ją odróżnić od liczności czterech osób, ale nie potrafi wyrazić językowo swojego odniesienia liczebnikowego.

(ii) Liczebnik symboliczny oddziałuje na umysł. Skutkiem tego oddziaływania jest aktywacja odpowiedniej językowej reprezentacji liczebnika. Jeśli jest to liczebnik w sensie werbalnym, to w umyśle aktywuje się wcześniej zakodowana (funkcjonalnie zapisana czy też utrwalona) reprezentacja danego leksemu liczebnikowego na gruncie danego języka etnicznego w modalności graficznej (wzrokowej) lub fonicznej (słuchowej). Jeśli jest to liczebnik cyfrowy, to w umyśle syntetyzuje się i aktywuje reprezentacja liczebnika cyfrowego. W odmiennych systemach zapisu cyfrowego reprezentacje te są różne. Dzięki związkom asocjacyjnym aktywacja reprezentacji językowej liczebnika symbolicznego powoduje aktywację reprezentacji głębokiej tego liczebnika (wspólnej dla wszystkich umysłów danego gatunku), a ta z kolei wywołuje aktywację reprezentacji odpowiadającej mu liczby, wcześniej zakodowanej w umyśle. Jeśli umysł nie jest w stanie przejść którejś z faz dekodowania reprezentacji, to nie potrafi wykonać określonych czynności odniesienia liczebnikowego. Na przykład, jeśli pokazanie liczebnika symbolicznego nie wywołuje w umyśle jego recepcji, to w takim umyśle nie zostały wcześniej zakodowane reprezentacje językowe liczebników. Jeśli pokazanie liczebnika cyfrowego wywołuje w umyśle jego recepcję, a graficzny liczebnik w sensie werbalnym nie wywołuje takiego stanu, oznacza to, że w umyśle zostały wcześniej zakodowane tylko cyfrowe reprezentacje językowe[6]. Stany recepcji liczebników symbolicznych polegają na przykład na tym, że jesteśmy w stanie przeczytać dany liczebnik, powtórnie go wypowiedzieć, napisać go czy też bez trudu przepisać itd. Asocjacja reprezentacji językowych liczebników z głębokimi reprezentacjami liczebników symbolicznych umożliwia natomiast rozumienie liczebników werbalnych. Dzięki niemu umysł potrafi oszacować, który li-

---

ciowego w pamięci długotrwałej — nie jest znacząco angażowany w procesach kodowania liczebników (uwagę tę zawdzięczamy recenzentowi artykułu).

[6] Badania kliniczne (Benson, Denkla 1969) wskazują na rozmaite przypadki pacjentów z deficytami w zdolnościach przekładania liczebników cyfrowych na werbalne i *vice versa*. Tego rodzaju deficyty występują w zaburzeniach określanych jako akalkulia.

czebnik jest większy, a który mniejszy, czy też dokonać przekładu liczebników cyfrowych na liczebniki werbalne lub odwrotnie. Z kolei powiązanie asocjacyjne głębokich reprezentacji liczebników z reprezentacjami liczb umożliwia umysłowi dokonywanie aktów odniesienia liczebnikowego, czyli aktów konceptualizowania rozmaitych sytuacji za pomocą liczb, liniowych struktur porządkowych lub wielkości.

Przedstawione schematyczne i idealizacyjne opisy typów liczebnikowych procesów umysłowych pokazują, że kodowanie reprezentacji liczb stanowi proces odwrotny do ich dekodowania. W procesie kodowania stanem na wejściu jest synteza i aktywacja reprezentacji liczby, stanem końcowym jest zaś aktywacja językowej reprezentacji liczebnikowej (o ile przebieg tego procesu nie jest zakłócony przez jakieś czynniki). Natomiast w procesie dekodowania stanem na wejściu jest aktywacja określonej językowej reprezentacji liczebnika, a stanem na wyjściu — aktywacja reprezentacji określonej liczby. Przy czym procesy dekodowania wymagają wcześniejszego zakodowania w umyśle reprezentacji liczb, podczas gdy „pełne" procesy kodowania wymagają wcześniejszego zakodowania językowych reprezentacji liczebnikowych. Innymi słowy w procesie rozwoju myślenia arytmetycznego umysł dziecka musi najpierw „nauczyć się" kodowania liczebności (syntetyzowania, magazynowania i przetwarzania reprezentacji liczb), żeby mógł w następnej fazie rozwojowej dekodować liczebniki.

Przedstawimy formalny model sposobów syntezy systemu reprezentacji liczb naturalnych. Jeśli przyjmie się konwencję terminologiczną, zgodnie z którą asocjacja reprezentacji liczebników symbolicznych z reprezentacjami liczb wywołuje w umyśle stany rozumienia liczebników, to reprezentacje liczb można określić mianem liczebnikowych reprezentacji semantycznych. Zgodnie z podstawowym założeniem przedstawianej teorii systemem reprezentacji liczb jest właśnie umysłowa oś liczbowa.

Procesy umysłowe — syntezę, przekształcanie i aktywację reprezentacji umysłowych — należy odróżniać od procesów neurofizjologicznych, w których te pierwsze są zaimplementowane. Mówiąc metaforycznie, reprezentacjom umysłowym odpowiadają w sieci neuronowej określone stany fizyczne neuronów, a przekształceniom, aktywacjom i dezaktywacjom tych reprezentacji odpowiadają procesy zmiany odpowiednich stanów neuronalnych. Niektóre nieobliczeniowe własności skonstruowanego w pracy formalnego modelu umysłowej osi liczb są wyjaśniane jako skutek procesów jego implementacji w systemie neurofizjologicznych procesów rozgrywających się w sieci neuronowej dowolnego mózgu (sztucznego, ludzkiego lub innych organizmów) na poziomie przepływu impulsów informacyjnych. Przedstawiony model formalny tych procesów implementacyjnych spełnia jedynie funkcję ilustracyjną. Celem jego konstrukcji jest pokazanie, jak procesy implementacyjne wpływają na rozwój umysłowego modelu formalnego opisującego mechanizmy odniesienia liczebnikowego.

## 2. EKSPERYMENTALNE EFEKTY SNARC

Efekty SNARC (*Spatial-Numerical Associations of Response Codes*; zob. Dehaene, Bossini, Giraux 1993, Cipora, Nęcka 2012) są określane w literaturze przedmiotu jako asocjacje względnych wielkości liczbowych ze stronami w przestrzeni. Najczęściej używanym wskaźnikiem tych efektów są zachodzące między prawą a lewą ręką (prawym a lewym przyciskiem) różnice w czasach reakcji na przedstawiane osobie badanej liczebniki (cyfrowe lub werbalne) z danego zakresu. W eksperymencie przeprowadzonym przez Dehaene'a i współpracowników (1993) osoby badane miały za zadanie ocenić parzystość cyfry pokazanej na środku ekranu, naciskając odpowiednie przyciski po prawej lub lewej stronie. Reakcje na mniejsze liczby były szybsze przy użyciu lewego przycisku, a reakcje na większe liczby były szybsze przy użyciu przycisku prawego[7]. Okazuje się, że efekt SNARC można uzyskać, uzmienniając podstawowe parametry eksperymentu: (i) zakres liczebników (liczby jedno- i wielocyfrowe, ujemne itd.), (ii) format i modalność liczebników, (iii) sposób przestrzennego przedstawiania bodźca liczebnikowego, (iv) sposób reagowania (nogą, przez wskazywanie, kierowanie spojrzenia na lewo i prawo itp.), (v) ocenianą własność (np. bycie większym lub mniejszym liczebnikiem).

(i) *Zakres liczebników.* W badaniach nad efektem SNARC najczęściej stosuje się jako bodźce cyfry z przedziału od 1 do 9. Jednak w odpowiednich warunkach eksperymentalnych efekt ten powstaje dla dowolnego przedziału liczbowego zawartego w przedziale [1, 9]. Okazuje się bowiem, że to nie absolutne, a względne wartości liczbowe (mniejsze oraz większe w danym przedziale) decydują o różnicach w szybkości reakcji wykonywanych po lewej i prawej stronie. W jednej z wersji procedury Dehaene'a (Dehaene, Bossini, Giraux 1993: Eksperyment 3) osoby badane oceniały parzystość cyfr losowanych z jednego z dwóch przedziałów liczbowych: [0, 5] lub [4, 9]. Okazało się, że dla każdego przedziału uformował się inny typ efektu SNARC. Jeśli bodźce losowano z zakresu [0, 5], to efekt przewagi lewej ręki był rejestrowany w wypadku cyfr 0 i 1, a efekt przewagi prawej ręki w wypadku cyfr 4 i 5. Jeśli bodźce losowano z zakresu [4, 9], to efekt przewagi lewej ręki był widoczny przy cyfrach 4 i 5, czyli odwrotnie niż w pierwszym wypadku, a efekt przewagi prawej ręki pojawił się przy cyfrach 8 i 9 (por. Fias, Brysbaert, Geypens, d'Ydewalle 1996). Do tej pory powodzeniem kończyły się próby obserwacji efektu w zakresie liczebników dwucy-

---

[7] Następująca sytuacja eksperymentalna stanowi przykład efektu SNARC: załóżmy, że badanemu pokazujemy na środku ekranu komputerowego w sposób losowy cyfry z przedziału od 0 do 9. Badany ma rozpoznawać parzystość danej cyfry i odpowiedzieć *Tak* lub *Nie* za pomocą lewego oraz prawego przycisku. Okazuje się, że przy rozstrzyganiu parzystości cyfr 0 i 1 czas reakcji prawym przyciskiem jest dłuższy o około 30 milisekund od czasu reakcji lewym przyciskiem. Z kolei w wypadku cyfr 2 i 3 czas reakcji jest taki sam niezależnie od przycisku. W wypadku pozostałych cyfr czas reakcji prawym przyciskiem jest krótszy od czasu reakcji lewym: dla 4 o ok. 15 milisekund, dla 5 o ok. 10 ms, dla 6 i 7 nieco mniej niż 30 ms, dla 8 oraz 9 nieco więcej niż 30 ms (Dehaene, Bossini, Giraux 1993).

frowych (Dehaene, Dupoux, Mehler 1990, Dehaene, Bossini, Giraux 1993, Zhou, Chen, Chen, Dong 2008, Brysbaert 1995), a także trzycyfrowych (Tlauka 2002).

Bardziej problematyczna jest natomiast kwestia obserwowalności efektu w przedziale liczb mniejszych od 0. Z jednej strony można przypuszczać, że liczby ujemne nie mają własnej reprezentacji na umysłowej osi liczbowej, ale tworzą ją jako przestrzenny kontrast do reprezentacji liczb dodatnich. Efekt SNARC w zakresie liczb ujemnych byłby więc lustrzanym odbiciem efektu SNARC dla liczb dodatnich. Gdy w zadaniu polegającym na ocenie parzystości uwzględniamy zakres [–9, –1], największe liczebniki z zakresu, tj. –1 i –2, wywołują szybsze reakcje lewą ręką, tak jakby traktowane były jako liczby 1 czy 2 z zakresu [1, 9] (Fischer, Rottmann 2005, Shaki, Petrusic 2005). Jednak w innych warunkach eksperymentalnych obserwuje się sytuację, w której rzeczywiste wartości liczebników ujemnych, a nie ich wartości bezwzględne, prowadzą do powstania efektu SNARC. Jeśli osoba badana ma za zadanie porównać pod względem wartości dwa liczebniki, z których jeden jest dodatni, a drugi ujemny, to w takich warunkach można zaobserwować, że osoba badana szybciej reaguje na liczebniki ujemne lewą ręką, a na liczebniki dodatnie ręką prawą (Shaki, Petrusic 2005).

(ii) *Format i modalność bodźców*. Asocjacja liczbowo-przestrzenna, której wskaźnikiem jest efekt SNARC, nie ogranicza się do wzrokowo przetwarzanych cyfr arabskich, ale może się wytworzyć w wypadku liczebników przedstawianych i odbieranych w różnej postaci. W jednym z eksperymentów (Castronovo, Seron 2007) wzięły udział osoby niewidome, którym odtwarzano z głośników liczebniki od „jeden" do „dziewięć". Zadaniem uczestników było określenie, czy usłyszany liczebnik reprezentuje liczbę parzystą, czy nieparzystą (bądź w drugiej wersji — określenie, czy jest większy, czy mniejszy od 5). Wyniki wskazały na regularny efekt SNARC. Reakcje na mniejsze liczebniki były szybsze przy użyciu przycisku znajdującego się po lewej stronie, a reakcje na większe liczebniki były szybsze przy użyciu przycisku po prawej stronie. Podobny efekt zaobserwowano u osób głuchoniemych, którym pokazywano na ekranie cyfry (Bull, Marschark, Blatto-Vallee 2005, Iversen, Nuerk, Willmes 2004) bądź układy palców reprezentujących określone liczebniki w języku migowym (Iversen, Nuerk, Jäger, Willmes 2006, Bull, Blatto-Vallee, Fabich 2006).

Liczne eksperymenty z udziałem osób bez żadnych deficytów pokazują, że uzmiennianie kanału zmysłowego, którym jest odbierany bodziec liczebnikowy (słuch, wzrok) oraz formatu, w którym jest przedstawiany (liczebniki cyfrowe, werbalne, zbiory elementów), nie wpływa na zanik efektu SNARC. Do tej pory efekt ten zaobserwowano między innymi podczas przedstawiania liczebników symbolicznych: cyfr arabskich, indyjsko-arabskich (Shaki, Fischer, Petrusic 2009), chińskich (Hung, Hung, Tzeng, Wu 2008), zapisanych liczebników werbalnych (Fias, Brysbaert, Geypens, d'Ydewalle 1996, Nuerk, Wood, Willmes 2005), odsłuchiwanych liczebników werbalnych (Nuerk, Wood, Willmes 2005, Castronovo, Seron 2006), a także liczebników niesymbolicznych, takich jak układy oczek na kostce do gry (Nuerk, Wood, Willmes 2005) czy liczności zbiorów losowo rozrzuconych elementów (Patro, Haman 2012). Efekt SNARC występuje zarówno w procesach kodowania, jak i dekodowania umysłowych reprezentacji liczebników. Przeprowadzone analizy pokazują ponadto, że w wypadku reagowania na liczebniki cyfrowe efekt jest tak samo silny jak w wypadku odczytywania bądź odsłuchiwania liczebników w sensie werbalnym (Nuerk, Wood, Willmes 2005, Wood, Willmes, Nuerk, Fischer 2008).

(iii) *Sposób przestrzennego przedstawiania bodźca*. Schemat badawczy z centralnie przedstawianą cyfrą i dwoma przyciskami odpowiedzi po obu stronach można zastąpić takim układem, w którym dwie cyfry pokazywane są na ekranie równocześnie — jedna po lewej stronie, druga po prawej. W takim schemacie układ cyfr jest albo zgodny z kierunkiem osi liczbowej (mniejsza cyfra po lewej stronie, większa po prawej), albo przeciwny. Osoba badana wskazuje, który liczebnik jest większy lub mniejszy (Patro, Haman 2012), albo ocenia, czy wartości prezentowanych liczebników są takie same, czy różne (Zebian 2005). Wskaźnikiem efektu SNARC w takim schemacie badawczym są krótsze czasy reakcji na podwójny bodziec liczebnikowy zgodny z kierunkiem osi liczbowej.

(iv) *Sposób reagowania*. Zgodnie z klasycznym schematem badawczym osoby badane udzielają odpowiedzi, naciskając lewą ręką przycisk znajdujący się po lewej stronie oraz prawą ręką przycisk znajdujący się po prawej stronie. W wielu eksperymentach odpowiedzi można udzielać, naciskając przyciski lewą lub prawą nogą (Schwarz, Müller 2006), wskazującym i środkowym palcem prawej ręki (Priftis, Zorzi, Meneguello, Marenzi, Umiltà 2006), wskazując jedną ręką na lewą lub prawą stronę (Fischer 2003), kierując spojrzenie na lewo lub prawo (Fischer, Castel, Dodd, Pratt 2003, Schwarz, Keus 2004). W takich wypadkach również obserwuje się efekt SNARC. Uogólniając, efekt ten zachodzi wtedy, gdy w obecności bodźca liczebnikowego osoba badana jest zmuszona do zorientowanych przestrzennie reakcji behawioralnych.

(v) *Oceniana własność*. Spośród zadań wykorzystywanych do obserwacji efektu SNARC najczęściej stosowane jest zadanie oceny parzystości. Innym popularnym zadaniem badawczym jest ocena cyfr ze względu na ich wartość (van Galen, Reitsma 2008, Herrera, Macizo, Semenza 2008, van Dijck, Gevers, Fias 2009). W takim zadaniu na środku ekranu można pokazywać kolejno cyfry od 1 do 9 z wyłączeniem 5 i poprosić osobę badaną o określenie, czy dana cyfra jest większa, czy też mniejsza od 5. Osoba badana ma do wyboru dwa przyciski odpowiedzi rozmieszczone po lewej i prawej stronie, z których jeden zastępuje odpowiedź „większa", a drugi odpowiedź „mniejsza". Wskaźnikiem efektu SNARC są krótsze czasy reakcji, kiedy odpowiedź „mniejsza" powiązana jest z lewym przyciskiem, a odpowiedź „większa" z prawym. W niektórych badaniach stosuje się również procedurę porównywania wartości dwóch liczebników pokazywanych jednocześnie na ekranie (większa czy mniejsza, takie same czy różne; Zebian 2005). Innym przykładem jest zadanie jak najszybszego wykrycia bodźca poprzedzonego przedstawieniem cyfry (Fischer, Castel, Dodd, Pratt 2003, van Galen, Reitsma 2008). W takim zadaniu osoba badana musi jak najszybciej zareagować na pojawienie się punktu po lewej lub po prawej stronie ekranu.

Pojawienie się punktu poprzedzone jest pokazaniem cyfry z przedziału [1, 9]. Okazuje się, że punkt jest szybciej wykrywany po lewej stronie, jeżeli wcześniej na ekranie pojawia się cyfra o mniejszej wartości, np. 1 lub 2, oraz szybciej po prawej stronie, jeżeli wcześniej pojawia się cyfra o większej wartości, np. 8 lub 9[8].

Zjawisko podobne do efektu SNARC obserwuje się w wypadku pokazywania nazw obiektów należących do rozmaitych liniowych, nieliczebnikowych struktur porządkowych, takich jak nazwy miesięcy, nazwy dni tygodnia czy litery alfabetu (Gevers, Reynvoet, Fias 2003, 2004). Efekt quasi-SNARC pojawia się w sytuacji, w której podmiot badany ma rozstrzygnąć lewą lub prawą dłonią, czy dany miesiąc z zakresu [styczeń, kwiecień] oraz z zakresu [wrzesień, grudzień] występuje przed czy też po lipcu w kalendarzu. Ten sam efekt daje się również zaobserwować, kiedy badany ma rozstrzygnąć, czy nazwa danego miesiąca z podanych zakresów kończy się na literę „R", czy też nie ma tej właściwości. Podobny eksperyment przeprowadzono na literach ze zbioru {E, G, I, L, R, U, W, Y}, pytając badanych, czy w alfabecie losowo wybrana litera występuje przed, czy też po literze „O". Efekt quasi-SNARC jest w tym wypadku nawet silniejszy niż w eksperymencie z nazwami miesięcy (Gevers, Reynvoet, Fias 2003).

Nieco słabszy efekt zaobserwowano w eksperymencie z dniami tygodnia. Badane osoby były pytane, czy dany dzień tygodnia występuje po środzie. Odpowiadały lewą lub prawą ręką (Gevers, Reynvoet, Fias 2004). Efekt quasi-SNARC zaobserwowano również w zadaniach, w których osoby badane oceniały wysokość dźwięków (Rusconi, Kwan, Giordano, Umiltà, Butterworth 2006) lub czas trwania danego zdarzenia (Vallesi, Binns, Shallice 2008) — wielkości reprezentowane w sposób ciągły, a nie dyskretny. Zjawiska te doczekały się nawet w literaturze swoich własnych określeń; są to odpowiednio efekty SMARC (*spatial-musical association of response codes*) i STARC (*spatial-temporal association of response codes*). Wymienione wyniki badań eksperymentalnych stoją w sprzeczności z wynikami zaprezentowanymi w (Dehaene, Bossini, Giraux 1993: Eksperyment 4). Dehaene i jego współpracownicy na podstawie swoich eksperymentów wyprowadzili wniosek, że efekt SNARC jest swoisty dla bodźców liczebnikowych i nie można go ekstrapolować na bodźce odbierane przez podmioty w rozmaitych schematach porządkowych. Najnowsze badania kwestionują jednak taki wniosek.

Istnieje jednak pewna grupa zadań, w których efektu SNARC nie da się zaobserwować lub jest on względnie słaby (stosunek różnicy między średnim czasem praworęcznej reakcji na bodziec a średnim czasem reakcji leworęcznej do średniego czasu reakcji wynosi poniżej 5%)[9]. Badania eksperymentalne pokazują, że jeśli podczas

[8] Efekt SNARC zachodzi w tym wypadku, mimo że treść cyfry (desygnowana przez nią wartość liczbowa) nie jest istotna informacyjnie w procesie wykrywania bodźca nieliczebnikowego.

[9] Np. w eksperymencie, w którym badani mieli rozstrzygnąć, czy pewne litery występujące w alfabecie przed literą „O" lub po niej są samogłoskami lub spółgłoskami, efekt SNARC daje się zaobserwować w natężeniu 4% (Gevers, Reynvoet, Fias 2003).

przetwarzania bodźca liczebnikowego lub porządkowego badany musi ujmować asemantyczną własność bodźca (kolor czcionki cyfry, bycie samogłoską lub spółgłoską, bycie liczebnikiem zbudowanym z określonego fonemu), wówczas efekt SNARC ma niższe natężenie lub zanika (Fias, Brysbaert, Geypens, d'Ydewalle 1996, Lammertyn, Fias, Lauwereyns 2002, Fias 2001). Eksperymenty pokazują, że im bardziej dane zadanie angażuje semantyczne przetwarzanie bodźca liczbowego, tym wyższe jest natężenie spodziewanego efektu SNARC (Wood, Willmes, Nuerk, Fischer 2008).

Opisana rozmaitość efektów SNARC wskazuje więc, że ludzki umysł koduje liczebniki niesymboliczne oraz dekoduje wyrażenia liczebnikowe, a także krótkie liniowo-porządkowe sekwencje leksemów (wyrażenia oznaczające dni tygodnia, miesiące) w sposób przestrzenny. W kognitywistyce arytmetyki ten fakt przestrzennego kodowania oraz dekodowania krótkich sekwencji liczebników (zarówno symbolicznych, jak i niesymbolicznych) lub leksemów próbuje się wyjaśniać, konstruując rozmaite modele funkcjonowania ludzkiego umysłu w dziedzinie liczebników, liczności, wielkości czy też porządków. Przy czym potencjalne modele tłumaczące omawiane zjawisko powinny również wyjaśniać dodatkowe fakty, które ujawniają się dopiero po zestawieniu rozmaitości zaobserwowanych efektów SNARC. Oto lista tych faktów:

(1) Kodowanie oraz dekodowanie przestrzenne liczebników ma miejsce wtedy, gdy (de)kodujący je umysł jest zmuszony do równoczesnych z percepcją bodźca liczebnikowego reakcji behawioralnych w przestrzeni fizycznej[10].

(2) Kodowanie oraz dekodowanie przestrzenne może dokonywać się w wypadku liczebników z różnych zakresów liczbowych, względnie krótkich sekwencji leksemów lub wielkości ciągłych (np. czasu trwania); ma więc ono charakter odcinkowy ze zwrotem[11].

[10] Recenzent pracy zwraca uwagę na ważny problem: czy orientacja przestrzenna jako ujawniana eksperymentalnie cecha jest własnością bodźca eksperymentalnego, czy też własnością reakcji na ten bodziec? Dotychczasowe eksperymenty nie pozwalają udzielić jednoznacznej odpowiedzi na postawione pytanie. Naszym zdaniem orientacja przestrzenna, wykrywana jako cecha w eksperymentach, jest własnością układu złożonego z bodźca i reakcji. Badania eksperymentalne nie upoważniają jednak do realistycznej epistemologicznie interpretacji efektów SNARC, zgodnie z którą przestrzenność kodowania oraz dekodowania liczebników jest odpowiedzią umysłu na odpowiadającą jej własność bodźca liczebnikowego. Przy takiej interpretacji przestrzenność jako własność bodźców liczebnikowych oznaczałaby, że reprezentacje liczb, kodowane w umyśle, są efektem oddziaływań bodźców fizycznych ulokowanych w fizycznej przestrzeni. W duchu neokantowskim można jednak podać taką oto interpretację efektów SNARC: umysł zmuszony do reakcji na bodźce liczebnikowe nakłada na nie własność orientacji przestrzennej. „Obliczanie niesymbolicznych bodźców liczebnikowych" wymagałoby umieszczania ich reprezentacji w przestrzeni umysłowej.

[11] Dotychczas nie przeprowadzono badania eksperymentalnego na efekt SNARC, w którym kodowane lub dekodowane byłyby liczebniki większe niż trzycyfrowe. Obecnie analizowany efekt jest potwierdzony dla liczebników trzycyfrowych. Nie można jednak wykluczyć, że efekt ten zostanie potwierdzony dla liczebników n-cyfrowych. Dotychczas nie przeprowadzono badań eksperymentalnych, które wykluczałyby zaistnienie efektu SNARC np. w wyniku pokazywania pięcio- czy sześciocyfrowych liczebników.

(3) Na zaistnienie (de)kodowania przestrzennego liczebników nie wpływa ich format syntaktyczny, czyli to, czy są zapisane w którymś z języków cyfrowych, czy też na gruncie danego języka etnicznego, ani to, czy są to liczebniki symboliczne czy też niesymboliczne.

(4) Na zaistnienie (de)kodowania przestrzennego liczebników nie wpływa modalność zmysłowa bodźców liczebnikowych, czyli to, czy są (de)kodowane jako napisy lub układy palców u ręki (wzrokowo), czy też jako dźwięki (słuchowo).

(5) Na zaistnienie (de)kodowania przestrzennego liczebników nie wpływa sposób przestrzennej organizacji bodźca liczebnikowego[12].

(6) (De)kodowanie przestrzenne liczebników odznacza się rozmaitymi stopniami natężenia; natężenie (de)kodowania przestrzennego liczebników jest wyższe w sytuacji, w której własność przetwarzanych liczebników ma charakter arytmetyczny, niż w wypadku przetwarzania niearytmetycznych własności tych samych liczebników[13].

---

[12] Recenzent nie zgadza się z wnioskiem (5). Przywołuje eksperyment współautorki artykułu (zob. Patro i Haman 2012). W eksperymencie tym na pytanie, gdzie jest więcej cukierków, dzieci reagowały szybciej, gdy na paterze po prawej stronie było więcej cukierków niż po lewej stronie. Na pytanie zaś, gdzie jest mniej, reagowały szybciej wówczas, gdy po lewej stronie było mniej cukierków niż po prawej. Przy czym w obu próbach dzieci odpowiadały za pomocą prawej ręki. Czy efekt został wywołany lokalizacją przestrzenną bodźca liczebnikowego, czy też sposobem reakcji na bodziec? Poprawna reakcja na pytanie eksperymentalne uzależniona jest od przebiegu aktu percepcyjnego dziecka. Efekt SNARC można w tym wypadku wyjaśnić w taki sposób, że położenie bodźca liczebnikowego jest zgodne z oczekiwaniem znalezienia „małych liczebników" niesymbolicznych po lewej stronie, a „dużych" liczebników niesymbolicznych po prawej stronie. Gdyby położenie przestrzenne bodźca wywoływało omawiany efekt, to nie powinien on dać się zaobserwować w eksperymentach z niewidomymi.

[13] Recenzent pracy nie zgadza się z wnioskiem (6), twierdząc, że nie można porównywać danych uzyskanych za pomocą różnych procedur eksperymentalnych. Taki zabieg porównywania danych wymagałby bowiem założenia, że „różnice w procedurach badawczych wpływają jedynie na przebieg procesów kodowania przestrzennego" bodźców liczebnikowych. Bez wątpienia zbadanie postulowanej własności, czyli natężenia efektu SNARC, wymaga posłużenia się co najmniej dwoma eksperymentami; w pierwszym z nich umysł zmuszany jest do przetwarzania arytmetycznej własności bodźca liczebnikowego, a w drugim jakiejś własności niearytmetycznej (np. koloru czcionki cyfry). Badacze efektu SNARC używają jednak kategorii wielkości (rozmiaru) efektu SNARC. Hipoteza, zgodnie z którą efekt ten posiada różne natężenia, wyprowadzana jest z faktu, że w niektórych wypadkach tak zwanego „asemantycznego" przetwarzania liczebników efektu nie daje się wywołać eksperymentalnie. W badaniach (Fias 2001) uczestnikom przedstawiano liczebniki werbalne (wizualnie i wypowiedzeniowo) oraz proszono ich o udzielenie odpowiedzi na pytanie, czy w danym holenderskim liczebniku występuje dźwięk „e". Nie zaobserwowano analizowanego efektu. Fias wyjaśnia tę asymetrię, posługując się koncepcją „dwóch ścieżek transkodowania liczebników werbalnych". Wydaje się, że jest to wyjaśnienie *ad hoc*, gdyż nie da się go zastosować do efektu quasi-SNARC w eksperymencie z literami alfabetu; w eksperymencie tym badani nie wykonują żadnych operacji „transkodowania" pozycji liter w alfabecie na pozycje liczbowo-porządkowe, a mimo to efekt quasi-SNARC się ujawnia. Według Fiasa zadanie wymaga asemantycznego, w sensie arytmetycznym, przetwarzania pozycji liter w alfabecie, zatem efekt quasi-SNARC nie powinien się ujawnić. Hipoteza o natężeniu efektu SNARC pozwala wyjaśniać efekty quasi-SNARC, klasyfikując je jako

(7) (De)kodowanie przestrzenne liczebników nie ma charakteru absolutnego: ten sam liczebnik może w różnych sytuacjach poznawczych znaleźć się w różnych miejscach na kodującym odcinku ze zwrotem.

Podsumowując, umysłowa oś liczbowa jest więc (i) odcinkiem (ii) ze zwrotem, (iii) o pewnym natężeniu; (iv) na odcinku tym umysł liniowo porządkuje obiekty liczbowe lub porządkowe. Na umysłowej osi liczbowej występują pododcinki będące reprezentacjami umysłowymi liczb. W tym znaczeniu umysłowa oś liczbowa stanowi system semantycznych reprezentacji liczebników.

## 3. TEORETYCZNE MODELE WYJAŚNIAJĄCE EFEKTY SNARC

Model umysłowej osi liczbowej (*mental number line*, Restle 1970; Dehaene, Bossini, Giraux 1993) jest najczęściej przywoływanym w literaturze modelem wyjaśniającym istnienie efektu SNARC[14]. Jest ona definiowana jako złożona reprezentacja umysłowa, która porządkuje reprezentacje kolejnych liczb naturalnych w sposób przestrzenny, przybierając określony kierunek: poziomy (od lewej do prawej bądź od prawej do lewej), pionowy (góra-dół) lub przekątniowy. Model ten zakłada, że liczby reprezentowane są w przestrzeni umysłowej[15] jako utworzone w niej obiekty geometryczne. Założenie to definiuje umysłową oś liczbową jako homeomorficzną do osi fizycznej, którą spostrzegamy zmysłami, co pozwala przypuszczać, że liczby kodowane są „na podstawie tej samej metryki" co punkty w przestrzeni fizycznej[16]. Hi-

efekty o słabym natężeniu. Należy dodać, że przedstawiony niżej model formalny umysłowych osi liczbowych nie uwzględnia parametru natężenia osi liczbowych.

[14] Idea umysłowej osi liczb pochodzi od Galtona (1880). Zwrócił on uwagę na fakt, że osoby badane często wyobrażają sobie liczby jako zorganizowane w oś o zwrocie od lewej do prawej strony.

[15] Pojęcie przestrzeni umysłowej rozumiemy za Fauconnierem (1994) jako byt intensjonalny wypełniony rozmaitymi treściami ustrukturowanymi formalnie na różne sposoby (nazywanymi w kognitywistyce reprezentacjami umysłowymi). Na temat przestrzeni umysłowych zob. Fauconnier 1994: xxxvi-xxxvii, Harder 2003: 91-99.

[16] Idea wspólnej umysłowej metryki dla liczb i przestrzeni przywoływana jest często w literaturze jako teoria ATOM (*A Theory of Magnitude*, Walsh 2003, Bueti, Walsh 2009). Teoria ta postuluje istnienie jednego, funkcjonującego od początku życia, systemu odpowiedzialnego za przetwarzanie wielkości, które mogą występować pod trzema postaciami: liczbową (wartości liczb), przestrzenną (np. odległość) oraz temporalną (np. czas trwania). Teorię tę wspierają dane empiryczne wskazujące na sąsiedztwo reprezentacji mózgowych tych wielkości w obrębie płata ciemieniowego oraz liczne interakcje tych wymiarów w różnych konfiguracjach, obserwowalne w zadaniach behawioralnych. Procesy formowania związków liczbowo-przestrzennych są więc tu rozpatrywane jako naturalne następstwo organizacji naszego mózgu. Bez wątpienia jest to teoria o kantowskiej proweniencji. System przetwarzania wielkości byłby odpowiednikiem kantowskich form czystej zmysłowości. Różnica między teorią ATOM a koncepcją Kanta sprowadzałaby się do tego, że filozof z Królewca traktował czas oraz przestrzeń jako oddzielne podsystemy, podczas gdy w koncepcji ATOM przestrzeń i czas stanowią „modusy" jednego podstawowego, apriorycznego systemu reprezentowania wielkości.

poteza ta jest jednak tylko częściowo potwierdzona empirycznie[17]. Badania neurofizjologiczne (Knops, Thirion, Hubbard, Michel, Dehaene 2009, Hubbard, Piazza, Pinel, Dehaene 2005) pokazują, że pewne sieci neuronalne w płacie ciemieniowym, wyspecjalizowane w planowaniu ruchu oczu w odpowiednią stronę (lewą lub prawą), zaangażowane są także w przetwarzanie wartości liczbowych lub wykonywanie operacji arytmetycznych (dodawania lub odejmowania). Można więc przypuszczać, że te same procesy, które leżą u podłoża sterowania uwagą w przestrzeni zewnętrznej, odpowiedzialne są za sterowanie uwagą wzdłuż umysłowej osi liczbowej. Umysłowa oś liczbowa byłaby zatem typem reprezentacji tworzonej między innymi na podstawie doświadczenia sensomotorycznego. Oczywiście to, czy bodźce zewnętrzne znajdujące się w przestrzeni fizycznej (sensomotorycznej) aktywują umysłową oś liczbową, czy też odwrotnie — aktywacja umysłowej osi liczbowej warunkuje intencjonalne skierowanie się umysłu na bodziec, jest kwestią filozoficzną[18].

Wystąpienie efektu SNARC w określonej sytuacji eksperymentalnej wyjaśnia się w modelu osi liczbowej działaniem mechanizmu bezpośredniego odwzorowania miejsca w przestrzeni umysłowej, które zajmuje dana liczba, na odpowiadające mu miejsce w przestrzeni fizycznej. Załóżmy, że na ekranie pokazywana jest cyfra o względnie małej wartości. Ponieważ zajmuje ona miejsce po lewej stronie osi umysłowej, na tę właśnie stronę zostaje skierowana uwaga. Wskutek tego procesu pokazanej cyfrze i odpowiadającej jej liczbie zostaje automatycznie przyporządkowana lewa strona przestrzeni fizycznej wraz ze znajdującym się tam jednym z dwóch przycisków odpowiedzi. Jeśli polecenie będzie wymagało zareagowania na tę cyfrę (liczbę) za pomocą lewego przycisku, reakcje będą szybsze ze względu na zgodność zajmowanej pozycji w przestrzeni umysłowej i fizycznej. Jeśli zaś polecenie będzie wymagało reakcji na tę cyfrę (liczbę) prawym przyciskiem, zajdzie konieczność

---

[17] Percepcyjna przestrzeń fizyczna charakteryzuje się ciągłością; linie i odcinki w tej przestrzeni są obiektami ciągłymi. Natomiast umysłowa oś liczb ma charakter dyskretny; na osi tej kodowane oraz dekodowane są liczby naturalne, czyli liczebności różnych rozmaitości doświadczanych przez umysł w większości sytuacji. Nie można jednak wykluczyć, że z takiej „pierwotnej" osi liczb umysł wytwarza w wyniku edukacji matematycznej „dojrzałą umysłową oś liczb", dla której istnieje homeomorficzne przekształcenie w fizyczną oś daną w percepcji zmysłowej.

[18] Gdyby Kant znał współczesne wyniki eksperymentów SNARC, stwierdziłby, że aktywacja umysłowej osi liczbowej warunkuje intencjonalne skierowanie się umysłu na bodziec. Dlatego też, zważywszy na fakt występowania efektu SNARC u osób niewidomych, można przyjąć istnienie wspólnego mechanizmu sterującego uwagą zarówno w przestrzeni fizycznej (sensomotorycznej), jak i w „umysłowej przestrzeni liczby" (uwagę tę zawdzięczamy recenzentowi pracy). Z filogenetyczno-ewolucyjnego punktu widzenia mechanizm ten ukształtowało bez wątpienia doświadczenie sensomotoryczne. Jednak w perspektywie neokantowskiej problem znika; umysł, nakładając „umysłową przestrzeń liczby" na przestrzeń fizyczną, w której występują bodźce zmysłowe i w której na nie reaguje, steruje swoją uwagą w procesach reakcji na bodźce za pomocą tych samych mechanizmów, które sterują jego uwagą w „umysłowej przestrzeni liczby". Obecność efektu SNARC u niewidomych ujawniałaby właśnie funkcjonowanie tych samych mechanizmów sterowania uwagą, które sterują uwagą w polu motoryczno-percepcyjnym osób bez deficytów.

zmiany umiejscowienia uwagi w przestrzeni fizycznej, wskutek czego czas reakcji się wydłuży. Mechanizm ten można uogólnić na wszelkie schematy badawcze wymagające skierowania reakcji w odpowiednią stronę w przestrzeni fizycznej, a więc bez względu na to, czy reaguje się rękami, nogami czy też w inny sposób. Wyjaśnia on również względność (de)kodowania liczbowo-przestrzennego: w zależności od tego, który przedział liczbowy jest aktywowany w danym zadaniu, uwaga kierowana jest na odpowiadający temu przedziałowi odcinek na umysłowej osi liczb, wskutek czego formuje się odpowiedni dla tego zadania typ efektu SNARC. Dla przykładu, gdy prezentujemy badanym osobom cyfry z zakresu 5-9, ich uwaga przemieszcza się na odcinku wyznaczonym przez punkt reprezentujący liczbę 5 po lewej stronie oraz punkt reprezentujący liczbę 9 po prawej stronie.

Autorzy opisujący efekty SNARC w ramach modelu osi liczbowej zwracają także uwagę na dwa inne aspekty. Po pierwsze przestrzenna reprezentacja liczby jest typem reprezentacji semantycznej, tzn. kodującej znaczenie (wartości) symboli liczebnikowych. Niezależność efektu SNARC od formatu i modalności wskazuje, że kod przestrzenny nie jest przypisywany strukturze powierzchniowej bodźca liczebnikowego, lecz jest powiązany z jego znaczeniem, czyli wartością (lub pozycją w ciągu). Z semantycznym charakterem osi pozostają również w zgodzie obserwacje dotyczące zmiany siły natężenia efektu SNARC w zależności od tego, jak bardzo w danym momencie umysł jest zaangażowany w przetwarzanie arytmetycznych własności bodźca liczebnikowego.

W kognitywistyce arytmetyki omawia się kwestię własności strukturalnych umysłowej osi liczb. Wyróżnia się dwa pytania (Verguts, Fias 2008): (i) W jaki sposób poszczególne liczby naturalne są kodowane na umysłowej osi liczbowej? (ii) W jaki sposób funkcja odległości jest skalowana na umysłowej osi liczbowej? Z punktu widzenia epistemologii myślenia matematycznego należy postawić jeszcze jedno pytanie: (iii) W jaki sposób umysłowa oś liczbowa, o określonych własnościach strukturalnych, może zostać przekształcona w standardowy model semantyczny arytmetyki Peana (PA)?

Załóżmy, że PA stanowi teorię wyjaśniającą poprawność lub niepoprawność wyników obliczeń wykonywanych przez umysł w rozmaitych codziennych sytuacjach. Obliczenia te są regulowane aktywacją (lub syntezą) określonych arytmetycznych reprezentacji umysłowych. Zatem PA musi również wyjaśniać skuteczność poznawczą umysłowych procesów aktywacji lub syntezy rozmaitych arytmetycznych reprezentacji umysłowych. W koncepcji umysłowej osi liczb zakłada się, że oś stanowi podstawową reprezentację umysłową, z której powstają pozostałe reprezentacje istotne przy rozwiązywaniu zadań arytmetycznych. Wobec tego skoro skuteczność poznawcza reprezentacji jest wyjaśniana przez PA, racjonalnie jest przyjąć, że standardowy model semantyczny PA stanowi strukturę ontologiczną wywodzącą się z osi umysłowej.

Na przykład, wykonując obliczenie $3 + 2 = 5$, umysł syntetyzuje (lub aktywuje) odpowiednią reprezentację arytmetyczną. Ta reprezentacja wywodzi się z umysłowej osi liczbowej. Ponieważ obliczenie jest poprawne, jego reprezentacja umysłowa musi odpowiadać określonemu zdaniu arytmetycznemu, prawdziwemu w modelu PA. Odpowiedniość taka powinna więc mieć charakter relacji zachodzącej między reprezentacją obliczenia 3 + 2 = 5 a modelem semantycznym PA — w tym znaczeniu, że składnikom reprezentacji odpowiadają, na mocy określonej funkcji, odpowiednie obiekty modelu semantycznego (liczby, funkcje oraz rozmaite teoriomnogościowe relacje zachodzące między liczbami lub funkcjami). Skoro wszystkie skuteczne poznawczo obliczeniowe reprezentacje arytmetyczne, syntetyzowane przez umysł w sytuacjach zadaniowych, wywodzą się z umysłowej osi liczb, to ów mechanizm derywacji wraz z umysłową osią liczb pełni funkcję generatora, w znaczeniu algebraicznym, zakodowanego w umyśle systemu reprezentacji arytmetycznych. Taki mechanizm generowania można określić jako dojrzałą kompetencję arytmetyczną. Dlatego pytanie (iii) można sparafrazować pytaniami w stylizacji realistycznej (iii*): „Jak arytmetyczny mechanizm kompetencyjny zakodowany w umyśle reprezentuje (obrazuje) modele semantyczne arytmetyki PA?”, w stylizacji konstruktywistycznej (iii**): „W jaki sposób na mocy kompetencyjnego mechanizmu arytmetycznego zakodowanego w umyśle konstruowane są standardowe modele semantyczne arytmetyki PA?”.

## 4. REPREZENTOWANIE LICZB NA UMYSŁOWEJ OSI LICZBOWEJ

Kognitywiści arytmetyczni wyróżniają dwa sposoby reprezentowania liczb na umysłowej osi liczbowej. Pierwszy można określić mianem reprezentowania analogowego, sumacyjnego (*summation coding*), a drugi — reprezentowania punktowo-miejscowego (*place coding*). Pierwszy sposób nazywa się niekiedy w literaturze przedmiotu kodowaniem akumulatorowym (Gallistel, Gelman 1992, 2000). Inni badacze nie wykluczają, że umysł reprezentuje liczby na umysłowej osi na oba sposoby. Przyjmuje się, że reprezentowanie analogowe (akumulatorowe) dotyczy liczebników niesymbolicznych (np. rozmaitości obiektów porozrzucanych na doświadczanej scenie zmysłowej), a reprezentowanie punktowo-miejscowe — liczebników symbolicznych (cyfrowych lub werbalnych). Zgodnie z założeniami pojęciowymi przyjętymi w pracy reprezentowanie analogowe liczb dokonuje się w procesach kodowania liczebników niesymbolicznych, a reprezentowanie punktowo-miejscowe — w procesach dekodowania liczebników symbolicznych. W procesach kodowania umysł przyporządkowuje reprezentacjom semantycznym liczb odpowiednie reprezentacje językowe liczebników, a w procesach dekodowania — na odwrót. W procesach kodowania umysłowa oś liczb jest syntetyzowana, podczas gdy w procesach dekodowania jest ona aktywowana jako gotowy wzorzec.

### 4.1. Analogowe kodowanie liczb na osi liczbowej

Według modelu kodowania analogowego jednostką kodującą liczbę na umysłowej osi liczbowej jest pododcinek osi. Kodując liczność lub wielkość *jeden* albo kolejność *pierwszy*, umysł wybiera pewien początkowy odcinek osi liczbowej. Zakodowanie liczności lub wielkości *dwa* albo kolejności *drugi* będzie polegało na przedłużeniu wejściowego odcinka o pewien odcinek bezpośrednio przylegający; podobnie kodowanie liczby *trzy* lub kolejności *trzeci* wymaga dodania następnego odcinka do odcinka, który koduje liczbę *dwa* lub kolejność *drugi*. Przy takim pojmowaniu sposobu kodowania liczb oś liczbowa jest traktowana jak pewna całość w sensie mereologicznym, która rozpada się na części wyznaczone przez system kodowania. Część pierwszą stanowi pewien początkowy odcinek, a kolejne części stanowią przedłużenia tego początkowego odcinka. Kognitywiści posługują się w tym wypadku metaforą płynu w akumulatorze: zakodowanie liczby wymaga „dolania płynu” do akumulatora (Meck, Church 1983)[19].

Należy zaznaczyć, że model akumulatorowy jest potwierdzany przez wyniki niektórych eksperymentów. W korze mózgowej ludzi i naczelnych udało się wykryć pewne grupy neuronów, które reagują na liczebności zbiorów w sposób gradacyjny, tzn. ich aktywność zmienia się monotonicznie w stosunku do wielkości zbioru, podobnie jak poziom płynu w akumulatorze (Roitman, Brannon, Platt 2007, Santens, Roggeman, Fias, Verguts 2010, Roggeman, Santens, Fias, Verguts 2011). Na poziomie behawioralnym kodowanie sumacyjne można wykryć za pomocą techniki zwanej poprzedzaniem lub torowaniem. W eksperymencie Roggemanna, Vergutsa i Fiasa (2007) uczestnicy mieli za zadanie nazywać wartości liczb z przedziału 1-5, przedstawianych w dwóch różnych formatach — symbolicznym (cyfrowym) oraz niesymbolicznym (jako zbiory kropek). Kluczową manipulacją w tym eksperymencie było poprzedzanie głównego bodźca tak zwanym bodźcem torującym, eksponowanym przez krótki okres (83 ms), tak że osoba badana nie była w stanie na niego zareagować. Takim bodźcem poprzedzającym, podobnie jak bodźcem docelowym, były cyfry lub zbiory kropek z zakresu 1-5. W ten sposób można było sprawdzić, czy i w jaki sposób wcześniejsze zakodowanie bodźca torującego wpływa na rozpoznanie bodźca docelowego. W wypadku formatu niesymbolicznego (zbiorów kropek) zauważono, że bodziec poprzedzający ułatwiał (torował) w tym samym stopniu nazywanie wszystkich bodźców docelowych, które były od niego mniejsze lub mu równe. Taki schemat torowania wskazuje wyraźnie na proces kodowania sumacyjnego: wartość bodźca torującego uaktywnia pewną część odcinka osi o początku w punkcie 0 i końcu w punkcie oznaczonym przez tę wartość, przy czym odcinek ten zawiera w sobie wszystkie możliwe pododcinki reprezentujące wartości mniejsze lub równe wartości bodźca torującego, co w równym stopniu ułatwia ich zakodowanie.

---

[19] W takim modelu oś liczbowa zachowywałaby się ontologicznie podobnie do ośrodka (np. ciekłego, gazowego, plazmowego) w sensie fizycznym. Fizykalna kategoria ośrodka ma również charakter mereologiczny; każdy ośrodek rozpada się na swoje kawałki, a nie elementy (Krysztofiak 1991). Podobnie każda zakodowana akumulatorowo liczba na osi liczb stanowiłaby kawałek osi-ośrodka. Ponadto każda zakodowana liczba większa od *dwa* stanowiłaby ośrodek dla wszystkich liczb mniejszych — w tym znaczeniu, że *jeden* jest częścią mereologiczną *dwa*, *dwa* częścią *trzy* itd.

Proponowany tu model kodowania liczb oraz wyniki eksperymentu z torowaniem prowadzą do osobliwej konsekwencji. Mianowicie zakodowanie dowolnej liczebności *n* wymaga wcześniejszego zakodowania wszystkich mniejszych od niej liczebności (por. Zorzi, Butterworth 1999)[20]. W wypadku „wielkich" liczb ten sposób kodowania wymagałby jednak niezwykle długiego czasu operacyjnego, w którym umysł miałby zakodować na przykład liczbę *sześć milionów sześćset tysięcy sześćset sześćdziesiąt sześć*. Z pewnością kodowanie liczebności denotowanej przez *6600666* nie dokonuje się w taki sposób, gdyż czas kodowania, według analizowanego sposobu, byłby niezwykle długi w wypadku liczb oznaczanych liczebnikami wielocyfrowymi.

Szkicowo opisany model wymaga więc pewnej modyfikacji. Należy założyć, że kodowanie dowolnej liczby dokonuje się na podstawie zakodowania pewnej innej liczby. Nazwijmy reprezentację takiej liczby kodem odniesieniowym. Kod odniesieniowy nie musi zawsze stanowić reprezentacji bodźca torującego, ponieważ taki bodziec, jako liczebnik niesymboliczny, ze względu na rozdzielczość percepcji zmysłowej ludzkiego umysłu nie może stanowić zbyt licznej rozmaitości, zatem jego zakodowanie na umysłowej osi liczb nie będzie użyteczne z punktu widzenia kodowania, na przykład, trzycyfrowych liczebników. Aby zakodować akumulatorowo liczbę *666*, umysł wcześniej koduje na przykład liczbę *660* i następnie przedłuża odcinek kodujący liczbę *660* na umysłowej osi liczb o sześć jednostkowych odcinków kolejno stykających się ze sobą. Można z kolei postawić pytanie o to, jak umysł koduje akumulatorowo liczbę *660*. Aby uniknąć osobliwości polegającej na niewspółmiernie długim czasie kodowania, należy założyć, że kodując akumulatorowo dowolną liczbę na osi liczb, umysł czyni to na podstawie konwencjonalnego ustalenia kodu odcinkowego pewnej innej liczby. Takie ustalanie stanowiłoby ogólny mechanizm odpowiedzialny również za ustalanie bodźca torującego. Model akumulatorowy wymaga więc odróżnienia dwóch podprocesów kodowania: (a) kodowanie liczb przez konwencjonalne ustalanie kodujących je odcinków na osi liczbowej, stanowiących punkt odniesienia dla kodowania pewnych innych liczb oraz (b) kodowanie jako sumowanie jednostkowych odcinków kodujących.

Formalnie taki mechanizm kodowania można przedstawić jako określony przez strukturę o postaci $<A, F, P, O>$, gdzie $A$ stanowi umysłową oś liczbową, $F$ jest elementem $A$, koduje (ustala) pewną liczbę naturalną i zwany jest kodem odniesieniowym, $P$ jest jednostkowym odcinkiem kodującym (jednostką kodowania), $O$ zaś jest iterowalnym operatorem przedłużania $F$ o $n$ jednostkowych odcinków kodujących $P$. $\alpha$, $\beta$, $\lambda$ są zmiennymi przebiegającymi zbiór umysłowych reprezentacji liczb. W tym wypadku przyjąć należy następujące aksjomaty opisujące analizowany model:

[20] W wypadku „małych" liczebności takie zjawisko obserwuje się u dzieci przedszkolnych. Na pytanie „Ile chcesz pierogów na obiad?" często odpowiadają określonym liczebnikiem po wcześniejszym wyliczeniu wszystkich liczebników, rozpoczynając od *1* i kończąc na liczebniku desygnującym oczekiwaną liczbę (w tym wypadku liczbę pierogów, którą chcą dostać na obiad).

(A1) $F \in A$

(A2) $(\forall\alpha)\ O(\alpha) = <\alpha, P>$

(A3) $(\forall\alpha)\ [(\exists i)\ O^i(F) = \alpha \rightarrow \alpha \in A]$

(A4) $(\forall\alpha)\ O(\alpha) \in A$

Zgodnie z (A1) $F$ jest składnikiem osi $A$. $F$ stanowi wyróżnioną reprezentację ustalonej liczby na osi $A$. Wybór tej reprezentacji przez umysł nie jest wyznaczany przez jakiekolwiek warunki formalne. Wyróżnienie przez umysł reprezentacji $F$ może więc mieć charakter losowy. (A2) stanowi definicję operacji przedłużania osi o odcinek kodujący $P$. Przedłużeniem reprezentacji $\alpha$ jest odcinek powstający z $\alpha$ oraz odcinka kodującego $P$, reprezentowany jako para uporządkowana o postaci $<\alpha, P>$. Jeśli $\alpha$ jest n-tką, to na mocy definicji redukującej dowolną n-tkę do pary i *vice versa*, $<\alpha, P>$ jest również n-tką dłuższą o odcinek $P$ od n-tki $\alpha$. Zgodnie z (A4) każde zastosowanie operatora przedłużania tworzy reprezentację liczby. Każdą akumulatorową reprezentację liczby ostatecznie można zredukować do struktury o postaci $<F, P, \ldots, P>$. Strukturę opisaną przez aksjomaty (A1)-(A4) można nazwać podstawową algebrą akumulatorowej osi liczb (*Basic Algebra of Summation Axis of Numbers* — BASAN).

Relacją liniowego porządku $\leq$ jest w tym wypadku relacja bycia częścią zachodząca między reprezentującymi liczby odcinkami. Jeśli więc pewien kod odcinkowy jest częścią drugiego kodu odcinkowego, to pierwsza liczba, której pierwszy z kodów jest reprezentacją, jest mniejsza od liczby, której reprezentacją jest drugi z kodów. Operator $O$ w formalizowanym modelu wytwarza reprezentacje liczb większych od liczby reprezentowanej przez kod odniesieniowy $F$.

(Df. $\leq$) $(\forall\alpha,\beta)\ [\alpha \in A \wedge \beta \in A \rightarrow (\alpha \leq \beta \equiv (\exists k)\ O^k(\alpha) = \beta)]$

Niech $\alpha = <F, P, P, P>$, $\beta = <F, P, P, P, P, P>$. Wówczas $\beta = O^2(\alpha)$, zatem $<F, P, P, P> \leq <F, P, P, P, P, P>$. Łatwo zauważyć, że sekwencja $<F, P, P, P>$ jest fragmentem sekwencji $<F, P, P, P, P, P>$. Zgodnie więc z przedstawionym sumacyjno-akumulatorowym modelem kodowanie w umyśle reprezentacji kolejnych liczb jest operacją „wydłużania" pewnej wyjściowej reprezentacji.

Badania eksperymentalne pokazują, że umysł w wypadku liczebników niesymbolicznych koduje także liczby mniejsze od liczby reprezentowanej przez kod liczebnika torującego. Należy więc założyć, że aktywowanie reprezentacji liczbowych na umysłowej osi liczb dokonuje się również na mocy operacji „skracania odcinka kodującego", a nie tylko dzięki operacji przedłużania. Mechanizmem odpowiedzialnym za taką operację skracania jest operacja odwrotna do operacji $O$, nazwijmy ją $O^-$. Zatem $O^{-i}$ stanowi i-tą iterację takich operacji. Operacje $O$ i $O^-$ mają odmienne własności formalne. Główna różnica między nimi polega na tym, że operację $O$ można iterować dowolnie wysokim wykładnikiem potęgowym i za każdym razem otrzymywać nową wartość. Tak jednak nie jest w wypadku operacji $O^-$: jej iterowanie w pewnym punkcie osi nie zwraca nowych wartości. Mówiąc metaforycznie, umysłowej osi liczb nie da się skracać w nieskończoność.

Struktura BASAN nie pozwala na wygenerowanie reprezentacji liczby zero. Jest to możliwe dopiero wtedy, gdy struktury BASAN rozszerzy się o operator skracania. Reprezentacja liczby zero stanowi wówczas granicę, poza którą każde jej skrócenie niczego nie zmienia. Zero stanowi wówczas idempotent (element idempotentny) operacji skracania. Podstawowy model akumulatorowy można więc rozszerzyć do modelu o postaci: $<A, F, P, O, O^-, \mathbf{0}>$, gdzie $\mathbf{0}$ stanowi punkt początkowy umysłowej osi liczb. Nazwijmy taką algebrę strukturą *CASAN* (*Complete Algebra of Summation Axis of Numbers*). Dodatkowe aksjomaty opisujące rozszerzony model akumulatorowy są następujące:

(A5) $\mathbf{0} \in A$

(A6) $O^-(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(A7) $(\forall\alpha)\ [O^-O(\alpha) = \alpha]$

(A8) $(\forall\alpha)\ [\alpha \neq \mathbf{0} \rightarrow O_i\, O_i^-(\alpha) = \alpha]$

(A9) $P \neq \mathbf{0}$

(A10) $(\forall\alpha)\ [\alpha \in A \equiv (\exists k)\ \alpha = O^k(F) \vee (\exists m)\ \alpha = O^{-m}(F)]$

W modelu rozszerzonym z (A10) wynika (A3). (A10) ustala definicyjnie zbiór akumulatorowych reprezentacji liczb, którymi są struktury uzyskane przez k-te przedłużenie reprezentacji $F$ lub przez m-te skrócenie reprezentacji $F$.

Bez wątpienia analizowany model ma pewną słabość związaną z tym, że nie wyjaśnia mechanizmu ustalania kodów odniesieniowych, czyli obiektu $F$ w danej strukturze kodującej. Inną słabością modelu jest to, że nie wyjaśnia mechanizmu ustalania odcinka kodującego — $P$. Model akumulatorowy w wersji rozszerzonej ma też jednak zalety. Wyjaśnia, dlaczego umysł nabywa reprezentację liczby *zero* w późniejszym okresie rozwoju poznawczego. Mechanizm syntezy reprezentacji liczby *zero* dokonuje się przez stosowanie operacji $O^-$ do kodu odniesieniowego $F$. Dlatego warunkiem posiadania przez umysł pojęcia liczby *zero* jest jego zdolność do operowania funkcją $O^-$ na reprezentacjach innych liczb.

Model akumulatorowy można rozszerzyć do akumulatorowego modelu wieloosiowego, aby można było za pomocą takiej konstrukcji formalnej wyjaśnić „akumulatorowo" syntezy reprezentacji dowolnie wysokich liczb. Takiego rozszerzenia można dokonać, konstruując rodzinę takich struktur o postaci $<A_k, F, P_k, O_k, O_k^-, \mathbf{0}>$, że można mówić o (i) nieskończenie wielu odcinkach kodujących $P_k$, z których każdy jest wielokrotnością odcinka kodującego reprezentację liczby *jeden*, oraz o (ii) nieskończenie wielu operatorach przedłużania osi liczbowych oraz ich skracania. Przy czym każdy taki operator byłby skorelowany jedno-jednoznacznie z odpowiednim odcinkiem kodującym $P_k$.

Strukturę o postaci <$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O}^{-}$, **0**> nazwijmy analogowo-sumacyjnym (akumulatorowym) modelem arytmetyki umysłowej. $\boldsymbol{A}$ stanowi zbiór umysłowych osi liczbowych $A_1, \ldots, A_k$ dla $1, \ldots, k$ stanowiących zbiór liniowo uporządkowany. Elementami osi liczbowych są akumulatorowe reprezentacje liczb. $\boldsymbol{P}$ jest zbiorem odcinków kodujących $P_1, \ldots, P_k$, z których syntetyzowane są odpowiadające im osie liczbowe $A_1, \ldots, A_k$ dzięki operatorom należącym do klas $\boldsymbol{O}$ oraz $\boldsymbol{O}^{-}$. Wymienione klasy składają się odpowiednio z operatorów $O_1, \ldots, O_k$ oraz $O_1^{-}, \ldots, O_k^{-}$, działających na elementach odpowiadających im osi liczbowych $A_1, \ldots, A_k$. Operatory $O_1, \ldots, O_k$ są odpowiedzialne za przedłużanie osi liczbowych, a operatory $O_1^{-}, \ldots, O_k^{-}$ służą ich skracaniu. $\boldsymbol{F}$ jest zbiorem wyróżnionych elementów $F_1, \ldots, F_k$, które są elementami odpowiadających im osi liczbowych. Elementy zbioru $F$ będą określane jako ustalone reprezentacje liczb na odpowiadających im osiach. **0** stanowi reprezentację liczby *zero*. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego indeksu $i$ struktury o postaci <$A_i$, $F_i$, $P_i$, $O_i$, $O_i^{-}$, **0**> stanowią realizacje schematycznej struktury <$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{O}^{-}$, **0**>. Każdą ze struktur o postaci <$A_i$, $F_i$, $P_i$, $O_i$, $O_i^{-}$, **0**> można określić jako mechanizm tworzący odpowiadającą jej umysłową oś liczbową. Dowolny zbiór takich osi jest konceptualizowany jako wiązka umysłowych osi liczbowych.

Aksjomaty opisujące funkcjonowanie mechanizmu wyznaczonego przez strukturę <$A_i$, $F_i$, $P_i$, $O_i$, $O_i^{-}$, **0**> dla dowolnego $i$ są następujące (gdzie $\alpha$, $\beta$, $\lambda$ są zmiennymi przebiegającymi zbiór reprezentacji umysłowych):

(A1 *CASAN*) $(\forall i)\ F_i \in A_i$

(A2 *CASAN*) $(\forall i)\ (\forall \alpha)\ O_i(\alpha) = <\alpha, P_i>$

(A3 *CASAN*) $(\forall i)\ \mathbf{0} \in A_i$

(A4 *CASAN*) $(\forall i)\ (\forall \alpha)\ [O_i^{-}\ O_i(\alpha) = \alpha]$

(A5 *CASAN*) $(\forall i)\ (\forall \alpha)\ [\alpha \neq \mathbf{0} \rightarrow O_i\ O_i^{-}(\alpha) = \alpha]$

(A6 *CASAN*) $(\forall i)\ O_i^{-}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(A7 *CASAN*) $(\forall i)\ (\forall \alpha)\ [\alpha \in A_i \equiv (\exists k)\ \alpha = O_i^{k}(F_i) \vee (\exists m)\ \alpha = O_i^{-m}(F_i)]$

(A8 *CASAN*) $(\forall i)\ P_i \neq \mathbf{0}$

(Df. $\leq$) $(\forall \alpha,\beta)\ [\alpha \in A_i \wedge \beta \in A_i \rightarrow (\alpha \leq \beta \equiv (\exists k)\ O_i^{k}(\alpha) = \beta)]$

W takim modelu synteza reprezentacji liczby *666* wymagałaby syntezy trzech „akumulatorowych" osi liczbowych utworzonych przez struktury <$A_1$, $F$, $P_1$, $O_1$, $O_1^{-}$, **0**>, <$A_{10}$, $F$, $P_{10}$, $O_{10}$, $O_{10}^{-}$, **0**>, <$A_{100}$, $F$, $P_{100}$, $O_{100}$, $O_{100}^{-}$, **0**>, gdzie $P_{10}$ stanowi dziesięciokrotną konkatenację $P_1$, a $P_{100}$ jest dziesięciokrotną konkatenacją $P_{10}$. Na każdej z tych osi aktywowany byłby odcinek reprezentujący liczbę *6*. Zgodnie z takim modelem należy przewidywać, że zjawisko torowania bodźców liczebnikowych może być wywoływane jedynie w wypadku takich umysłowych procesów kodowania, na podstawie których aktywowana (lub syntetyzowana) jest tylko jedna umysłowa oś liczbowa. Ponieważ takie osie liczbowe, tworzone przez umysł podczas syntezy reprezentacji liczb, są względnie krótkie[21], zjawisko torowania nie powinno pojawiać się w wypadku „dużych bodźców liczebnikowych".

## 4.2. Punktowo-miejscowe reprezentowanie liczb na osi liczbowej

Punktowo-miejscowe reprezentowanie liczb na osi liczbowej tym różni się od kodowania analogowego (sumacyjnego), że zgodnie z tym drugim mechanizmem każda reprezentacja dowolnej liczby jest fragmentem reprezentacji liczby większej, natomiast zgodnie z pierwszym mechanizmem reprezentacja liczby mniejszej nie jest nigdy częścią reprezentacji liczby większej. Ta różnica sprawia, że w mechanizmie reprezentowania punktowo-miejscowego synteza dowolnej reprezentacji liczby nie wymaga syntezy reprezentacji pozostałych liczb, mniejszych od danej liczby na umysłowej osi liczb. W analizowanym modelu zakłada się, że na umysłowej osi liczb każda liczba jest reprezentowana przez pewien odcinek (jako miejsce) lub punkt na tej osi. Innymi słowy umysłowa oś liczbowa jest liniowo uporządkowanym zbiorem miejsc lub punktów posiadającym zwrot.

Okazuje się jednak, że czysto punktowy model umysłowej osi liczbowej nie jest zgodny z wynikami eksperymentów. Czas rozpoznania liczebnika symbolicznego jest krótszy w wypadku torowania innym liczebnikiem niż wówczas, kiedy bodziec nie jest torowany. Okazuje się dodatkowo, że w odróżnieniu do niesymbolicznych bodźców liczebnikowych efekt torowania zachodzi zarówno wtedy, gdy liczebnik torujący jest większy od bodźca liczebnikowego, jak i wtedy, gdy jest mniejszy. Ponadto efekt torowania słabnie wraz z odległością liczbową między liczebnikiem torującym a liczebnikiem torowanym po obu stronach osi (Naccache, Dehaene 2001, Roggeman, Verguts, Fias 2007).

Aby wyjaśnić opisany efekt, w modelu reprezentowania punktowo-miejscowego zakłada się, że reprezentacją liczby na umysłowej osi liczb nie jest sam punkt, lecz punkt z otoczeniem, czyli z dwoma punktami (lub ewentualnie z większą ich liczbą) sąsiadującymi z nim po obu stronach. Na przykład reprezentacją liczby *6* będzie w tym wypadku miejsce zajmowane przez ścisłe, punktowe reprezentacje liczb: *5*, *6*, *7*. Można powiedzieć, używając języka fenomenologicznego, że reprezentacje liczb na umysłowej osi liczb mają strukturę retencyjno-protencyjną[22]. Znaczy to, że repre-

[21] Gdyby umysł był w stanie tworzyć dowolnie długie osie liczbowe, to mógłby też dokonywać dowolnie długich iteracji operatora przedłużania stosowanego do odcinka *F*. Mechanizm taki wymagałby funkcjonowania w umyśle meta-mechanizmu, który liczyłby poszczególne zastosowania operacji *O*. Wydaje się, że taki mechanizm funkcjonuje w ludzkim umyśle jedynie dla jednocyfrowych iteracji operatora *O*. Wskazuje na to fakt, że umysł nie jest w stanie nauczyć się „zautomatyzowanego" odczytywania bardzo długich liczebników złożonych (np. składających się z kilkunastu cyfr elementarnych).

[22] Według fenomenologów struktura retencyjno-protencyjna przysługuje chwilom jako „oknom teraźniejszości" w strumieniu świadomości, któremu towarzyszy egotyczne poczucie upływu czasu.

zentacja danej liczby na umysłowej osi liczb zawsze posiada „wspólne kawałki" z reprezentacją liczby bezpośrednio ją poprzedzającą oraz reprezentacją liczby bezpośrednio po niej następującej. Jeśli więc liczebnikiem torującym jest *6*, to jego przedstawienie wywołuje aktywację reprezentacji o postaci <*5*, *6*, *7*>. Dlatego też czas reakcji na liczebniki *5* oraz *7* powinien być identyczny i krótszy niż czas reakcji na liczebniki *2* oraz *9*, ponieważ w wyniku torowania aktywuje się cześć reprezentacji liczby *5* oraz reprezentacji liczby *7*. Taki proces nie zachodzi jednak w wyniku przedstawienia liczebników *2* oraz *9*, ponieważ ich reprezentacje nie mają części wspólnej z reprezentacją liczebnikowego bodźca torującego (w tym wypadku *6*). Takie wyjaśnienie zakłada oczywiście, że czas reakcji na liczebnik jest proporcjonalny do czasu aktywacji (syntezy) reprezentacji odpowiedniej liczby na umysłowej osi liczb.

W celu dokładniejszego scharakteryzowania omawianego procesu przyjrzyjmy się najpierw niektórym danym empirycznym. Seria eksperymentów przeprowadzonych przez zespół Niedera (Nieder, Miller 2003, 2004, Nieder, Merten 2007) wykazała, że w mózgu makaków, w obrębie bruzdy śródciemieniowej (IPS — *intraparietal sulcus*) oraz kory przedczołowej, znajdują się neurony kodujące określone wartości liczbowe. Neurony te, zwane przez badaczy neuronami liczbowymi (*number neurons*), reagują selektywnie na wybrane liczebności zbiorów, tak że każdy taki neuron nastawiony jest na zakodowanie określonej wartości. Selektywność neuronów przejawia się jako szczytowa aktywność jedynie w odpowiedzi na daną wartość *N*, za którą dany neuron jest odpowiedzialny. W wypadku każdej kolejnej wartości większej lub mniejszej od *N* neuron reaguje coraz słabiej aż do całkowitego zaniku aktywności. Ów stopniowy spadek aktywności przypomina zmniejszający się efekt torowania w wypadku liczebników cyfrowych, których wartości oddalają się od bodźca torującego.

Podobne zjawisko ujawnia się również wtedy, gdy adaptujemy sieć neuronalną w bruździe śródciemieniowej do określonej wartości (liczebności zbioru bądź wartości liczebnika cyfrowego), wskutek czego sieć reaguje na tę wartość coraz słabiej. Ponowna aktywacja tego obszaru możliwa jest dopiero przy bodźcu o innej wartości, przy czym siła reaktywowanego sygnału zwiększa się wraz z odległością, która dzieli nową wartość od wartości pierwotnej (Piazza, Izard, Pinel, Le Bihan, Dehaene 2004, Piazza, Pinel, Le Bihan, Dehaene 2007, Cantlon, Brannon, Carter, Pelphrey 2006). Wyniki tych badań ujawniają jeszcze jedną ważną osobliwość: aktywność neuronów „dostrojonych" do kolejnych wartości liczbowych zmienia się zgodnie z pewnym wzorcem. Otóż każdy neuron kodujący kolejną liczbę na osi obejmuje swoją aktywnością coraz większy przedział neuronów reprezentujących sąsiadujące z daną liczbą wartości, tak że staje się coraz mniej selektywny. Podobnie dzieje się w wypadku efektu adaptacji sieci: jeśli zanik aktywności sieci nastąpił wskutek przywyknięcia do bodźca liczebnikowego o dość dużej wartości, jej reaktywacja będzie trudniejsza; będzie wymagała bodźca, którego wartość będzie różnić się znacząco od wartości poprzedniego bodźca. Znaczy to, że różne liczby kodowane są na

---

Zob. Yoshimi 2007 (ujęcie z punktu widzenia fenomenologii kognitywistycznej).

różnych poziomach selektywności, a różnice w sposobie kodowania stają się widoczniejsze w wypadku par liczb odleglejszych od siebie na osi.

Opisanym zjawiskom odpowiadają dane behawioralne: rozróżnianie bodźców liczbowych pogarsza się stopniowo wraz z malejącą różnicą między nimi oraz wzrostem ich wartości. Efekty te, określane w literaturze mianem efektu odległości (*the distance effect*) oraz efektu rozmiaru (*the size effect*), obserwuje się zarówno podczas przedstawiania cyfr (np. Moyer, Landauer 1976), jak i podczas pozawerbalnego przetwarzania liczebności u ludzi i zwierząt (np. Whalen, Gallistel, Gelman 1999, Platt, Johnson 1971). Potwierdzają one, że reprezentacje poszczególnych liczb na osi mogą być mniej lub bardziej selektywne.

Stopień selektywności w tym wypadku należy interpretować jako stopień dokładności reprezentacji liczb. Jeśli bodziec liczebnikowy wywołuje syntezę i aktywację dokładnej reprezentacji danej liczby, to umysł w sposób jednoznaczny odnosi się do danej liczebności. Przy czym może odnieść się do danej liczebności na sposób niewyrażalny językowo lub wyrażalny językowo (za pomocą liczebnika symbolicznego). W takiej sytuacji niemożliwy jest błąd przy odnoszeniu się do danej liczebności. Na przykład, jeśli doświadczana przez szympansicę rozmaitość obiektów (osób ludzkich) wywołuje syntezę i aktywację dokładnej reprezentacji liczebności *dwa*, to umysł szympansicy w sposób niewyrażalny językowo odniesie się do liczby dwóch osobników danych w jej doświadczeniu. Jeśli z kolei bodziec liczebnikowy wywołuje syntezę i aktywację niedokładnej (przybliżonej) reprezentacji danej liczby, to umysł odnosi się do danej liczebności jedynie w sposób wieloznaczny. W takiej sytuacji możliwy jest błąd przy odnoszeniu się do danej liczebności. Na przykład, jeśli spojrzymy na sytuację z rozmaitością pewnych obiektów (studentów na wykładzie), to ta rozmaitość jako liczebnik niesymboliczny wywołuje w naszym umyśle syntezę i aktywację niedokładnej reprezentacji odpowiedniej liczebności. Niech będzie to reprezentacja liczby *dziewięć*. Umysł odnosi się do dziewięciorga studentów, choć studentów jest jedenaścioro. Wyrażając językowo swój akt odniesienia w takiej sytuacji, umysł uznaje stwierdzenie „Jest dziewięciu studentów” za równoznaczne stwierdzeniu „Jest około dziewięciu studentów”. Jeśli reprezentacja danej liczby (liczebności) na umysłowej osi liczb jest dokładną reprezentacją, to ma ona charakter punktowy. Jeśli zaś ta reprezentacja ma charakter aproksymacyjny (niedokładny, ale przybliżony), to ma charakter miejscowy.

Mechanizm punktowo-miejscowego reprezentowania liczb można przedstawić jako strukturę o postaci: $<M_0, \ldots, M_k, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^0, \ldots, \delta^k>$, nadbudowaną nad dowolną strukturą typu *CASAN*, gdzie $M_0, \ldots, M_k$ stanowią umysłowe osie liczbowe charakteryzujące się określonym stopniem dokładności reprezentowania liczb (przy czym im wyższy jest indeks $k$, tym wyższy jest stopień precyzji danej osi), $N$ jest przeliczalnym zbiorem punktów, $\leq$ jest relacją porządku w $N$, **1** stanowi wyróżniony punkt należący do zbioru $N$, $S$ jest funkcją przyporządkowującą każdemu punktowi ze zbioru $N$ zbiór jego otoczeń, a $\delta^0, \ldots, \delta^k$ są funkcjami przyporządkowującymi każdemu punktowi wyróżnione otoczenie ze zbioru jego otoczeń, traktowane jako reprezentacja danego liczebnika; przy czym każda kolejna funkcja ciągu $\delta^0, \ldots, \delta^k$ służy reprezentowaniu liczb ze wzrastającym stopniem dokładności. Funkcje ciągu $\delta^0, \ldots, \delta^k$ są odpowiedzialne za syntezę umysłowych osi liczb od $M_0$ do $M_k$. Wartości funkcji $\delta^k$ są właśnie elementami osi $M_k$.

Zdefiniujmy funkcję $\Psi$, która przekształca akumulatorowe reprezentacje liczb dowolnej struktury typu *CASAN* na punkty należące do zbioru *N*. Niech $CASAN^n$, której elementem jest akumulatorowa oś $A_n$ , będzie dowolną ze struktur typu *CASAN*.

(Df. Ψ) ≤) $(\forall\alpha, A_n \in CASAN^n)[\alpha \in A_n \rightarrow (\Psi(\alpha) = i \equiv \alpha = O^i(\mathbf{0}))]$

Zdefiniujmy więc zbiór punktów *N* następującym aksjomatem:

(AP1) $m \in N \equiv (\exists\alpha, A_n \in CASAN^n)[\alpha \in A_n \wedge \Psi(\alpha) = m]$

Łatwo jest zauważyć, że punkty należące do zbioru *N* stanowią krotności iteracji operatora przedłużania *O* zastosowanego do **0**. Następny aksjomat wprowadza do zbioru *N* relację porządku ≤.

(AP2) $(\forall n, m, CASAN^i)[n \in N \wedge m \in N \rightarrow [n \leq m \equiv (\exists\alpha, \beta, A_i)(\alpha \in A_i \wedge \beta \in A_i \wedge \Psi(\alpha) = n \wedge \Psi(\beta) = m \wedge \alpha \leq \beta)]]$

Łatwo można udowodnić, iż porządek ≤ jest liniowy.

(T1) $(\forall n)[n \in N \rightarrow n \leq n]$

(T2) $(\forall n, m)[n \in N \wedge m \in N \rightarrow (n \leq m \wedge m \leq n \rightarrow n = m)]$

(T3) $(\forall n, m, t)[n \in N \wedge m \in N \wedge t \in N \rightarrow (n \leq m \wedge m \leq t \rightarrow n \leq t)]$

(T4) $(\forall n, m)[n \in N \wedge m \in N \rightarrow (n \leq m \vee m \leq n)]$

Zdefiniujmy w strukturze „$< M_0, \ldots, M_k, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^0, \ldots, \delta^k >$ dwa punkty:

(AP3) $\Psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

(AP4) $\Psi(<\mathbf{0}, P_i>) = \mathbf{1}$

**0** jest pustym elementem w takim sensie, że nie posiada jakiejkolwiek implementacji neuronalnej w mózgu. **1** jest więc pierwszym elementem *N* z neuronalną implementacją.

Zdefiniujmy za pomocą abstraktora lambda w zbiorze *N* funkcję tworzenia przedziałów punktowych:

(Df. [...]) $[n, m] = (\lambda t)\ (n \leq t \wedge t \leq m)$

Przedziałem punktowym $[n, m]$ jest zbiór takich punktów, do którego należą punkty *n* i *m* oraz które są poprzedzane przez punkt *n* oraz które poprzedzają punkt *m*. Funkcję *S* definiujemy za pomocą pojęcia równoliczności ≈ w następujący sposób:

(AP5) $(\forall n)\ [n \in N \rightarrow S(n) = (\lambda a)\ (\exists t, m)\ (t \in N \wedge m \in N \wedge a = [t, m] \wedge [t, n] \approx [n, m]]$

Dany przedział punktowy należy do zbioru otoczeń punktu $n$ wtedy, gdy lewa strona danego przedziału od punktu $n$ jest równoliczna z prawą stroną danego przedziału od punktu $n$. Innymi słowy punkt $n$ musi dzielić na pół dany przedział, aby mógł on być określony jako należący do zbioru otoczeń tego punktu. Łatwo można zauważyć, że na każdym zbiorze otoczeń danego punktu daje się określić liniowy porządek wyznaczony przez relację zawierania zbiorów. Na przykład na zbiór otoczeń punktu **3** składają się następujące otoczenia: **[3**, **3]**, **[2**, **4]**, **[1**, **5]** itd.

Funkcję $\delta^0$ nazwijmy bazową funkcją selekcji. Funkcję $\delta^0$ definiujemy za pomocą funkcji wyboru $Max_{\subseteq}$ elementu maksymalnego z uwagi na relację inkluzji z pewnego podzbioru zbioru otoczeń danego punktu. Definicja jej jest następująca:

(AP6) $(\forall n)\ [n \in N \rightarrow \delta^0(n) = Max_{\subseteq}\ (\lambda a)\ (a \in S(n) \wedge Card(a) < Card[\mathbf{1}, n])$

Wyróżnionym otoczeniem punktu $n$ zgodnie z funkcją $\delta^0$ jest jego największe — z uwagi na relację zawierania — otoczenie, którego liczność jest mniejsza od przedziału **[1**, $n$**]**. Zgodnie z (AP6) funkcja selekcji przyporządkowuje punktowi **3** otoczenie **[3**, **3]**, ponieważ liczności pozostałych dwóch otoczeń są wyższe lub równe liczności przedziału **[1**, **3]**. Wartości funkcji selekcji $\delta^0$ stanowią reprezentacje liczb na umysłowej osi liczb $M_0$. Funkcje selekcji działające z większą dokładnością można skonstruować za pomocą funkcji obcinania przedziałów *Cut* zdefiniowanej następująco (za pomocą funkcji następnika określonej na zbiorze $N$):

(Df. Seq) $(\forall n, m)[n \in N \wedge m \in N \rightarrow [\mathrm{Seq}(n) = m \equiv (\exists \alpha)(\Psi(\alpha) = n \wedge \Psi(O(\alpha)) = m)]]$

(Df. *Cut*) (i) $n = m \rightarrow Cut[n, m] = [n, m]$; (ii) $n \neq m \rightarrow Cut[\mathrm{Seq}(n), \mathrm{Seq}(m)] = [n, m]$; (iii) $n \neq \mathbf{0} \rightarrow Cut[\mathrm{Seq}(n), \mathbf{0}] = [n, \mathbf{0}]$; (iv) $n \neq \mathbf{0} \rightarrow Cut[\mathbf{0}, \mathrm{Seq}(n)] = [\mathbf{0}, n]$

Funkcja *Cut* skraca więc dany przedział o tę samą jednostkową długość po obu jego stronach. Za pomocą funkcji *Cut* skonstruować można ciąg funkcji selekcji taki, że każda następna funkcja selekcji dokładniej reprezentuje liczby. Wzrost dokładności reprezentowania liczb wzrasta wraz ze wzrostem iteracji funkcji *Cut*. Niech więc $Cut^k$ będzie $k$-tą iteracją funkcji *Cut*. Wówczas ciąg $\delta^0$, $\delta^1$, …, $\delta^k$ stanowi ciąg funkcji selekcji o wzrastającym stopniu dokładności. Definicja dowolnej funkcji selekcji z tego ciągu wygląda następująco:

(AP7) $(\forall n, k \neq 0)\ [n \in N \rightarrow \delta^k(n) = Cut^k(Max_{\subseteq}\ (\lambda a)\ (a \in S(n) \wedge Card(a) < Card[\mathbf{1}, n]))$

Definicja umysłowej osi liczb $A_k$ o danym stopniu dokładności jako zbioru reprezentacji liczebników wygląda tak:

(AP8) $a \in M_k \equiv (\exists n)\ \delta^k(n) = a$

Zgodnie z (AP8) na umysłową oś liczbową $M_k$ składają się odcinki zbudowane z pewnych wyróżnionych otoczeń punktów zgodnie z definicją funkcji selekcji $\delta^k$. Każda funkcja selekcji skorelowana jest więc ze swoją umysłową osią liczb. Na poziomie implementacyjnym, jeśli punktom odpowiadają zbiory neuronów, to reprezentacjom liczb odpowiadają zbiory zbiorów neuronów.

Struktury o postaci $<M_i, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^i>$ dla $0 \leq i \leq k$ stanowią podstruktury struktury kształtu $<M_0,\ldots, M_k, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^0, \ldots, \delta^k>$. Dokonując na przykład wyliczenia jakiegoś zbioru obiektów, umysł uruchamia mechanizm odpowiadający określonej podstrukturze struktury $<M_0,\ldots, M_k, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^0, \ldots, \delta^k>$. Wybór takiej podstruktury jest wyznaczany przez oczekiwany stopień dokładności danego obliczenia. Jeśli umysł oczekuje wysokiego stopnia precyzji, to umysł aktywuje mechanizm obliczeniowy skoordynowany z funkcją selekcji $\delta^k$ dla wystarczająco wysokiego wskaźnika *k*. Jeśli zaś intencja obliczeniowa nie jest skierowana na wysoki stopień dokładności (ma to miejsce na przykład podczas tzw. oszacowywania liczności „na oko”), to wówczas umysł będzie aktywował umysłową oś liczb o niskim stopniu precyzji *k*. Mechanizm reprezentacyjny uruchamiany przez umysł przy odniesieniu liczebnikowym można więc przedstawić jako parę uporządkowaną zbudowaną ze struktury $<M_0,\ldots, M_k, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^0, \ldots, \delta^k>$ oraz funkcji intencji dokładności obliczeniowej $\Omega$, której argumentami są wskaźniki precyzji, wartościami zaś odpowiednie struktury:

(Df. Ω) $\Omega(i) = <M_i, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^i>$

Dokonując aktu odniesienia liczebnikowego, umysł aktywuje intencję dokładności obliczeniowej $\Omega$, która ze zbioru podstruktur struktury $<M_0,\ldots, M_k, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^0, \ldots, \delta^k>$ wybiera pewną szczególną podstrukturę, odpowiedzialną za syntezę umysłowej osi liczb o odpowiednim stopniu precyzji.

Warto zauważyć, że dla funkcji selekcji $\delta^0$ umysłowa oś liczbowa ma dokładne, punktowe reprezentacje trzech pierwszych liczebników: *jeden*, *dwa* oraz *trzy.* Oznaczałoby to, że żaden umysł, który dokonuje obliczeń enumeracyjnych, nie jest w stanie pomylić się, licząc do trzech. Innymi słowy umiejętność bezbłędnego liczenia do trzech jest apriorycznym warunkiem umiejętności przeliczania oraz szacowania n-liczebności. Posługując się funkcją selekcji $\delta^0$, umysł może popełniać pomyłki dopiero wtedy, gdy dokonuje enumeracji liczności wyższej niż liczba kardynalna *trzy*. W tym wypadku dziecko może pomylić cztery obiekty z trzema obiektami lub pięcioma obiektami. Ale nie może pomylić dwóch obiektów z jednym obiektem, a trzech — z dwoma. Jeśli nawet „na oko” widzimy trzy osoby, to widzimy je dokładnie; oznacza to, że powiedzenie „Widzę około trzech osób” jest niedorzeczne. Zdolność dokładnego różnicowania liczebności właśnie do trzech elementów (ale nie więcej) obserwowalna jest już u niemowląt (Feigenson, Carey 2003; Feigenson, Carey, Hauser 2002), w tym u noworodków (Antell, Keating 1983); większe liczebności niemowlęta rozpoznają zaś w przybliżeniu (Xu, Spelke 2000, Lipton, Spelke 2003), co wskazywałoby na pierwotny charakter osi $M_0$. Nasz model dopuszcza więc funkcjonowanie mechanizmu uwagi ukierunkowanej na przedmiot w procesach obliczania liczebności od *jeden* do *trzech*. Ponieważ taka zdolność jest powiązana z bazową osią $M_0$, system uwagi ukierunkowanej, nazywany w koncepcji Carey mechanizmem „paralelnej indywiduacji" (Le Corre, Carey 2007), musi być traktowany jako system dominujący w procesach przetwarzania „małych liczebności"[23].

Zgodnie z naszym modelem rozwój kompetencji obliczeniowych umysłu jest skorelowany ze zdolnością do tworzenia mechanizmu selekcyjnego $\delta^k$ o odpowiednio wysokim indeksie *k*. W wypadku posługiwania się funkcją $\delta^1$ umysł koduje punktowo liczebności w przedziale od *jeden* do *czterech*. Oznacza to, że taki umysł podczas oszacowywania percepcyjnie dostępnych rozmaitości elementów nigdy nie pomyli liczebności *cztery* z liczebnością niższą, gdyż oś $A_1$ jest zbudowana z następujących reprezentacji: **[1**, **1]**, **[2**, **2]**, **[3**, **3]**, **[4**, **4]**, **[5**, **5]**, **[5**, **7]**, **[6**, **8]** itd. Ten sposób kodowania można zaobserwować w eksperymentach u osób dorosłych (Tryck, Pylyshyn 1994), a także u niektórych gatunków zwierząt (Hauser, Carey 2003). Reprezentacją liczebności *siedem* na osi $A_1$ jest przedział punktowy **[6**, **8]**. Oszacując liczność siedmioelementowej rozmaitości, umysł jest w stanie pomylić tę liczność z licznościami w przedziale od *sześciu* do *ośmiu*. Nigdy natomiast nie powinien pomylić liczności *siedem* z licznościami *pięć*, *cztery* i mniejszymi. Oznacza to, że kiedy „na oko" spostrzega siedmioelementową rozmaitość, nigdy nie wyda sądu, że widzi cztery obiekty. Rozwinięcie kompetencji obliczeniowych do poziomu dokładności wyznaczonego przez funkcję selekcji $\delta^4$ gwarantuje, że umysł nigdy nie pomyli liczności *jedenaście* z licznościami niższymi. Dla każdego $\delta^k$ istnieje liczebność, której umysł nigdy nie pomyli z liczebnością od niej niższą.

Nasz model funkcjonowania umysłowej osi liczb ma wiele zalet. Jedną z nich jest to, że wyjaśnia zjawisko sawantyzmu obliczeniowego przejawiającego się w umiejętności „fotograficznego zliczania" wysokich liczebności różnego typu rozmaitości (kropek na ekranie, ludzi w kolejce czy cukierków w misce). Umysł, który potrafi w mgnieniu oka bezbłędnie obliczyć liczbę 15 kropek na ekranie, będzie charakteryzował się tym, że jego mechanizm obliczeniowy jest w stanie pracować, wykorzystując funkcję selekcji $\delta^k$ o wysokim stopniu dokładności (czyli dla wystarczająco wysokiego wskaźnika *k*). Model pozwala również wyjaśnić teorię nabywania liczebników zaproponowaną w (Carey 2004, Le Corre, Carey 2007). Zgodnie z tą koncepcją umysł dziecka w procesie nabywania kompetencji obliczeniowej nie posługuje się tak zwaną analogową (akumulatorową) umysłową osią liczbową, lecz mechanizmem paralelnej indywiduacji. W myśl podstawowego założeniem tej kon-

[23] Zwolennicy koncepcji Carey podkreślają, że system paralelnej indywiduacji nie jest w żaden sposób powiązany z systemami umysłowych osi liczbowych. Nasz model wyjaśnia również i ten aspekt. Oś liczbowa $M_0$, obcięta do pierwszych trzech reprezentacji, stanowi zbiór trzech odrębnych punktów, które mogą funkcjonować jako znaczniki przedmiotów rozpoznawanych w polu uwagi.

cepcji dziecko posiada zdolność do tworzenia umysłowych modeli rozmaitości składających się z kilku elementów (na przykład punktów, kropek, przedmiotów, obrazków itp.). Możliwe jest to dzięki mechanizmowi przypisywania tzw. znaczników uwagowych każdemu elementowi z osobna, co umożliwia równoczesne śledzenie wszystkich oznaczonych w ten sposób przedmiotów. Taka paralelna indywiduacja ma jednak swoje ograniczenia: umysł w tym samym czasie jest w stanie przypisać znaczniki jedynie 1-4 elementom. Utworzone w ten sposób modele reprezentujące od 1 do 4 indywiduów są następnie asocjacyjnie wiązane w sposób jedno-jednoznaczny z językowymi reprezentacjami pierwszych czterech liczebników. Proces ten ma charakter stopniowy: umysł najpierw uczy się znaczenia liczebnika *jeden*, potem *dwa* aż do liczebnika *cztery* przez kodowanie dokładnych reprezentacji liczb w przedziale **[1**, **4]** i kojarzenie ich z odpowiednimi językowymi reprezentacjami liczebników. Na przykład spostrzeżenie dwóch przedmiotów (psów czy kotów) wywołuje w pamięci długoterminowej zakodowanie reprezentacji zbioru dwuelementowego. Następnie umysł uczy się jedno-jednoznacznego związania językowej reprezentacji liczebnika symbolicznego *dwa* z niesymboliczną reprezentacją zbioru dwóch indywiduów. W ten sposób ilekroć umysł doświadcza dwuelementowej rozmaitości przedmiotów, tylekroć jest w stanie sformułować bezbłędną odpowiedź w swoich zadaniach obliczeniowych.

Koncepcja ta zakłada więc, że umysł „czyta" (subityzuje) liczebności od *jeden* do *czterech* w doświadczanym środowisku. Nasz model przewiduje właśnie taką sytuację. Jeśli umysł posługuje się umysłową osią liczbową o stopniu dokładności wyznaczonym przez funkcję selekcji $\delta^1$, czyli osią $M_1$, to reprezentacje pierwszych czterech liczebników mają charakter punktowy na tej osi. W związku z tym, posługując się osią $M_1$, umysł nie jest w stanie pomylić liczebności *cztery* z liczebnościami niższymi (zawsze je odróżni). Należy dodać, że nasz model — w przeciwieństwie do koncepcji paralelnej indywiduacji — nie kwestionuje istnienia umysłowej osi liczb jako „rdzennego źródła" nabywania przez umysł arytmetycznych zdolności w późniejszych fazach rozwoju regulowanych wiedzą arytmetyczną. Ponadto nasz model wyodrębnia pierwotną umysłową oś liczbową $M_0$. Jedynie pierwsze trzy liczebniki posiadają na tej osi punktową reprezentację. Oznaczałoby to, że umysł ludzki „od urodzenia" jest nastawiony na wykrywanie pojedynczych przedmiotów, par przedmiotów oraz trójek przedmiotów, czyli niesymbolicznych liczebników *jeden*, *dwa* oraz *trzy*. Badania nad umiejętnościami obliczeniowymi niemowląt potwierdzają, że potrafią one zmieniać swoje reakcje, kiedy przedstawia się im jednoelementowe, dwuelementowe oraz trójelementowe bodźce liczbowe.

Funkcjonowanie opisanego modelu umysłowej osi liczbowej można przedstawić za pomocą następującego przykładu: Jaś pragnie przypomnieć sobie, ile osób w przybliżeniu czekało na peronie na przyjazd pociągu. Aby rozwiązać to zadanie, jego umysł musi przedstawić sobie przypominaną sytuację. Jej umysłowe przedstawienie oraz problem poznawczy, który umysł Jasia chce rozwiązać, powoduje aktywację mechanizmu syntezy umysłowej osi liczb. W ten sposób umysł aktywuje mechanizm formalny opisany strukturą $<M_0,\ldots, M_k, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^0, \ldots, \delta^k>$. W następnej fazie umysł musi aktywować odpowiednią podstrukturę skorelowaną z poziomem dokładności przysługującym szacowaniu liczności obiektów zliczanych w umysłowym przedstawieniu sytuacji. Ponieważ intencja obliczeniowa $\Omega$ umysłu Jasia wyznacza tak zwany przybliżony stopień dokładności obliczenia, umysł Jasia aktywuje podstrukturę o poziomie precyzji skorelowanym — załóżmy — z funkcją selekcji $\delta^3$. W umyśle Jasia aktywuje się więc mechanizm syntezy umysłowej osi liczb o stopniu dokładności wyznaczonym przez $\Omega(3)$, czyli aktywuje się podstruktura o postaci $<M_3, N, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^3>$.

Ponieważ w omawianej sytuacji liczność ludzi na peronie wynosiła około dziesięciu osób, umysł Jasia aktywuje (syntetyzuje) na umysłowej osi liczb $M_3$ reprezentację liczby *dziesięć*. Aktywacja (synteza) tej reprezentacji wymaga od umysłu znalezienia na osi liczb odpowiedniego odcinka, którego środkiem w tym wypadku jest dziesiąty punkt zbioru $N$. Umysł Jasia musi więc dokonać aktywacji tego punktu. Aktywując mechanizm liniowego porządkowania punktów za pomocą relacji $\leq$, umysł oblicza pozycję odpowiedniego punktu jako dziesiątą. Ten proces może przebiegać zgodnie z mechanizmem akumulatorowym kodowania liczebnika *dziesięć*. Oznaczałoby to, że aktywacja dziesiątego punktu pociąga za sobą aktywację wszystkich punktów poprzedzających dany punkt. Na podstawie aktywacji tego typu reprezentacji umysł Jasia mógłby wydać osąd, że liczba osób na peronie wynosiła dziesięć (ponieważ każdej osobie w przedstawieniu odpowiadałaby reprezentacja polegająca na aktywacji pojedynczego punktu na osi uporządkowanych punktów). Oznaczałoby to, że Jaś ma dokładne przedstawienie sytuacji, czyli takie, że jego umysł może dokonać enumeracji zliczanych obiektów.

Jaś nie wydaje jednak takiego osądu, ponieważ zapamiętany przez niego obraz peronu z ludźmi nie jest wyraźny; stwierdza, że na peronie było obecnych *około dziesięciu* osób. Reprezentacja akumulatorowa liczby *dziesięć* jest przez umysł Jasia przekształcana, z powodu nieenumerowalności wszystkich obiektów w przedstawieniu, w reprezentację miejscową tej liczby o stopniu dokładności wyznaczonym przez funkcję $\delta^3$ (przedstawienie Jasia nie zostało zapamiętane wyraźnie, ponieważ jego uwaga nie była wystarczająco silna, aby obraz percepcyjny zapamiętać w ten sposób). Mechanizm funkcjonowania tego operatora wymusza symetryczną aktywację punktów po obu stronach dziesiątego punktu umysłowej osi liczb. Liczba wszystkich aktywowanych w ten sposób punktów musi być mniejsza od liczby *dziesięć*; w ten sposób umysł zmniejsza obciążenie aktywacyjne systemu reprezentacji liczbowej w stosunku do obciążenia aktywacyjnego przy akumulatorowym kodowaniu liczby *dziesięć*. Aktywuje się więc odcinek $[\mathbf{6}, \mathbf{14}]$. Zgodnie z mechanizmem programującym proces kodowania, skorelowanym z funkcją $\delta^3$ (w tym wypadku zgodnie z mechanizmem skorelowanym z funkcją $Cut^3$), kolejną fazą jest dezaktywowanie po obu stronach odcinka $[\mathbf{6}, \mathbf{14}]$ trzech punktów. W ten sposób umysł aktywuje odcinek $[\mathbf{9}, \mathbf{11}]$, który jest reprezentacją liczby *dziesięć* o stopniu dokładności wyznaczonym przez funkcję $\delta^3$.

Następnie umysł aktywuje językową reprezentację liczebnika *około dziesięciu* z powodu jej asocjacyjnego związku z reprezentacją **[9**, **11]**, co umożliwia mu sformułowanie określonej wypowiedzi. Na podstawie analizy funkcjonowania naszego modelu można wyciągnąć wniosek, że procesy reprezentowania miejscowego liczb, czyli procesy syntezy i aktywacji ich reprezentacji na umysłowej osi liczb zgodnie z mechanizmem reprezentowania punktowo-miejscowego, są nadbudowane nad procesami kodowania analogowego (czyli sumacyjno-akumulatorowego) liczb. Oznacza to, że umysł najpierw musi analogowo zakodować np. liczbę *dziewięć*, a następnie jej akumulatorową reprezentację przekształcić w reprezentację punktowo-miejscową. Badania pokazują, że podczas przetwarzania liczebności zbiorów rzeczywiście aktywują się obie grupy neuronów — akumulatorowych i liczbowo selektywnych (Santens, Roggeman, Fias, Verguts 2010, Roggeman, Santens, Fias, Verguts 2011), przy czym aktywacja tych pierwszych następuje we wcześniejszej fazie przetwarzania bodźca (Roitman, Brannon, Platt 2007), prawdopodobnie pobudzając następnie sieć neuronów selektywnych liczbowo. Taki porządek przewidywany jest także przez dwa inne modele przetwarzania liczb — model Dehaene'a i Changeux (1993) oraz Vergutsa i Fiasa (2004).

Wyłania się więc następujący problem: dlaczego umysł nie kończy procesu reprezentowania liczby na fazie kodowania akumulatorowego? W jakim celu umysł przekształca reprezentację akumulatorową liczby na reprezentację punktowo-miejscową tej samej liczby? W naszym modelu umysł wykonuje niejako podwójną pracę; dwa razy realizuje ten sam cel; dwukrotnie syntetyzuje reprezentację liczby, lecz dwiema różnymi metodami. Odpowiedź na te pytania wymaga zwrócenia uwagi na to, że w mechanizmie kodowania akumulatorowego zakodowanie dowolnej liczby $n$ wymaga aktywacji co najmniej $n$ neuronów, podczas gdy reprezentowanie punktowo-miejscowe wymaga aktywacji mniejszej liczby neuronów. Co więcej, w miarę wzrostu stopnia precyzji tego sposobu reprezentowania, wyznaczanego przez funkcję $\delta^k$ (wyznaczaną przez intencję dokładności obliczenia $\Omega$), liczba aktywowanych neuronów potrzebnych do zakodowania danej liczby się zmniejsza. Zakończenie procesu kodowania liczby zliczanych obiektów w danej sytuacji na fazie kodowania akumulatorowego skutkowałoby utrzymywaniem się w pamięci umysłu asocjacji o postaci $<\alpha(n), N(n)>$, gdzie $\alpha(n)$ jest strukturą neuronalną kodującą reprezentację sytuacji z obliczanymi w niej $n$ obiektami, $N(n)$ stanowi odcinek o długości $n$ aktywnych neuronów na akumulatorowej umysłowej osi liczb. W fazie przekształcenia reprezentacji liczby syntetyzowanej akumulatorowo na reprezentację syntetyzowaną punktowo-miejscowo asocjacja $<\alpha(n), N(n)>$ jest przekształcana w asocjację o postaci $<\alpha(n), N(k)>$, gdzie $N(k)$ stanowi odcinek o długości $k$ neuronów na umysłowej osi liczb syntetyzowanej zgodnie z mechanizmem punktowo-miejscowym; przy czym $N(k) < N(n)$.

Przy kodowaniu punktowo-miejscowym umysł wykorzystuje do zapisu liczebności obiektów występujących w danej sytuacji mniejszą liczbę neuronów niż w wypadku kodowania akumulatorowego (sumacyjnego). Im większa jest liczba zliczanych obiektów w sytuacji, tym wyższy jest „zysk” w postaci wykorzystania mniejszej liczby neuronów w pamięci do zapisu informacji obliczeniowej. W wypadku małych liczebności umysł powinien kończyć pracę ich kodowania na fazie akumulatorowej, ponieważ „zysk" otrzymany w wyniku przekształcenia reprezentacji małej liczby według mechanizmu akumulatorowego na reprezentację tej samej liczby według mechanizmu punktowo-miejscowego jest zbyt mały. Innymi słowy mechanizm implementacyjny reprezentacji liczb wymusza przekształcanie reprezentacji akumulatorowych w reprezentacje punktowo-miejscowe liczb.

Posługując się metaforą internetową, można kodowanie akumulatorowe określić jako kodowanie *online*, podczas gdy punktowo-miejscowy sposób syntezy reprezentacji — jako *offline*. Oznacza to, że umysł używa mechanizmu kodowania akumulatorowego przy ocenianiu liczności obiektów występujących w sytuacjach percepcyjnie dostępnych. Natomiast mechanizm punktowo-miejscowego reprezentowania liczb uruchamia się wówczas, gdy umysł jest nastawiony na przeniesienie informacji liczbowej — uzyskanej w wyniku oddziaływania niesymbolicznego bodźca liczebnikowego — do pamięci. Używając języka fenomenologów, można powiedzieć, że jeżeli intencja retencyjna jest wystarczająco silna (intencja utrzymania informacji liczbowej w świadomości), to wówczas wymusza przekształcenie reprezentacji akumulatorowej liczby na jej reprezentację punktowo-miejscową z uwagi na określony stopień dokładności obliczeniowej.

Należy jednak zaznaczyć, że proces ten znajduje empiryczne potwierdzenie jedynie wtedy, gdy bodźcami są zbiory elementów. W wypadku przetwarzania liczebników cyfrowych szlak prowadzący do neuronów kodujących miejscowo częściej przebiega z pominięciem etapu neuronalnej akumulacji (Santens, Roggeman, Fias, Verguts 2010). Co więcej, efekt torowania w wypadku liczebników cyfrowych — w przeciwieństwie do liczności zbiorów — zachodzi zgodnie z zasadami kodowania miejscowego, nie zaś akumulatorowego (Roggeman, Verguts, Fias 2007). Można więc przypuszczać, że procesy kodowania liczebników cyfrowych i liczności zbiorów różnią się rodzajem mechanizmu, który pośredniczy w przekazaniu informacji do pamięci. W wypadku przetwarzania liczebników cyfrowych takim ważnym ogniwem pośredniczącym jest prawdopodobnie etap analizy cech percepcyjnych bodźca, która pozwala na jego rozpoznanie (dopasowanie do wzorca — układu kształtów przechowywanego w LTM). Jako że liczebności zbiorów nie można rozpoznać po wyglądzie ani układzie elementów, niezbędne są procesy „zliczania" aktywacji z poszczególnych obiektów, których suma może być następnie zakodowana w pamięci jako wartość liczbowa, co z kolei, z uwagi na mechanizm zysku aktywacyjnego, uruchamia przekształcenie zapisu sumacyjnego (akumulatorowego) w zapis punktowo-miejscowy.

Nasz model formalny wyjaśnia też asymetrię w wykorzystaniu obu mechanizmów reprezentowania liczb polegającą na tym, że w wypadku kodowania niesymbolicznego bodźca liczbowego umysł uruchamia zarówno mechanizm kodowania akumulatorowego, jak i miejscowego, podczas gdy w wypadku dekodowania liczebników cyfrowych, a więc symbolicznych bodźców liczebnikowych, umysł uruchamia jedynie mechanizm kodowania miejscowego. Reagując na bodziec cyfrowy, umysł aktywuje jego reprezentację językową, która jest powiązana z odpowiednią reprezentacją liczby. Aktywacja tej pierwszej wywołuje aktywację tej drugiej, która w tym wypadku jest odcinkiem lub punktem — w zależności od stopnia dokładności wyznaczonego przez funkcję $\delta^k$ — na umysłowej osi liczbowej zsyntetyzowanej według punktowo-miejscowego mechanizmu reprezentowania liczb.

Oznacza to, że posługiwanie się cyframi ze zrozumieniem wymaga, aby w umyśle były wcześniej zakodowane reprezentacje liczb, do których umysł odnosi się podczas przetwarzania ze zrozumieniem rozmaitych liczebników cyfrowych. A ponieważ reprezentacje te tworzą strukturę w postaci osi liczb, procesy przetwarzania liczebników cyfrowych są w istocie procesami ich dekodowania. Innymi słowy dekodowanie liczebników cyfrowych wymaga aktywacji zsyntetyzowanych i zakodowanych wcześniej w umyśle reprezentacji liczb, a kodowanie liczebności, będące składnikiem procesów ich postrzegania, wymaga syntezy takich reprezentacji w celu ich skojarzenia z określonymi reprezentacjami sytuacji, na przykład przechowywanymi w LTM. W wypadku kodowania akumulatorowego synteza językowej reprezentacji liczebnika symbolicznego (liczebnika cyfrowego lub leksemu liczebnikowego) stanowi cel kodowania umysłu (aby rozwiązać zadanie zliczenia obiektów w danej sytuacji percepcyjnej lub przedstawionej). Natomiast w wypadku dekodowania aktywacja reprezentacji liczebnika symbolicznego stanowi punkt wyjścia. Innymi słowy kodowanie akumulatorowe ujawnia się w procesach nabywania reprezentacji liczebności jako początkowa faza tych procesów, a punktowo-miejscowe reprezentowanie liczebności ujawnia się w procesach magazynowania (zapisywania) w umyśle reprezentacji liczb oraz dekodowania językowych reprezentacji liczebnikowych.

## 5. SKALOWANIE UMYSŁOWEJ OSI LICZB

Jak już wspomniano, w pewnych zadaniach, np. podczas porównywania wielkości liczebników, czas reakcji i liczba błędów wzrastają wraz z wartościami porównywanych liczb, a spadają wraz ze zwiększającą się różnicą między nimi (Moyer, Landauer 1967). Pierwsze zjawisko nazywane jest efektem wielkości (*the size effect*), drugie zaś efektem odległości (*the distance effect*). Zachodzi między nimi następująca zależność: gdy zwiększamy wartości liczbowe, musimy zwiększyć także odległość między nimi, aby zachować stały czas reakcji. W związku z tym możemy stwierdzić, że sprawność wykonania takiego zadania uzależniona jest od proporcji między liczbami. Eksperymenty pokazują, że 2 i 4 porównywane są szybciej, gdyż proporcja między nimi wynosi 1:2, a 6 i 8 wolniej, ponieważ proporcja między nimi wynosi 3:4. Taka zależność czasów reakcji przy porównywaniu cyfr od ich proporcji opisywana jest przez znane w psychofizyce prawo Webera-Fechnera, zgodnie z którym postrzegana wielkość bodźca wzrasta w sposób logarytmiczny w stosunku do obiektywnej wartości bodźca. Gdyby umysłowa oś liczbowa była wyskalowana w sposób liniowy

— to znaczy w taki sposób, że każda liczba jest oddalona od swojego poprzednika o tę samą odległość — prawo Webera-Fechnera nie zachodziłoby. Dla przykładu, na skali liniowej różnica między 2 i 4 jest taka sama jak różnica między 6 i 8, a więc czasy reakcji potrzebne do wybrania większej wartości są w obu parach takie same. Na skali logarytmicznej odległości między kolejnymi liczbami maleją wraz ze wzrostem wartości, tak że odległość między 6 i 8 jest mniejsza niż między 2 i 4, co powoduje wzrost czasów reakcji w pierwszym przypadku.

Inne badania wskazują, że w wielu sytuacjach umysł posługuje się także liniową reprezentacją liczby. Rozważmy zadanie polegające na szacowaniu położenia liczby na osi (*number line estimation*; *number-to-position*, Siegler, Opfer 2003). Przypuśćmy, że na ekranie pokazywany jest odcinek o końcach oznaczonych cyfrą 0 z lewej strony oraz liczebnikiem cyfrowym 100 z prawej strony. Odcinek ten stanowi określoną część osi liczbowej, ale bez widocznej podziałki. Nad odcinkiem wyświetlany jest dowolny liczebnik cyfrowy z prezentowanego przedziału. Zadaniem osoby badanej jest wskazanie położenia liczby, do której odnosi się dany zapis cyfrowy na oznaczonym odcinku. Po odpowiedniej liczbie prób jesteśmy w stanie odtworzyć sposób, w jaki osoby badane oszacowują rozmieszczenie kolejnych wartości na osi. Żeby szacowanie było dokładne, wartości oszacowane powinny wzrastać w sposób liniowy wraz z wartościami rzeczywistymi, np. odległość liczby 50 od punktu 0 powinna stanowić dwukrotność odległości liczby 25 od punktu 0. Takie skalowanie opisywane przez funkcję liniową obserwuje się najczęściej u osób dorosłych.

Sposób wykonania zadania przez dzieci na początkowym etapie edukacji różni się jednak znacząco od przewidywań modelu liniowego. Na dziecięcej osi wartość 50 nie jest dwukrotnością 25, gdyż zależności między wartościami oszacowanymi i rzeczywistymi opisuje już nie funkcja liniowa, lecz logarytmiczna. Mówiąc obrazowo, dzieci poświęcają więcej miejsca na osi mniejszym liczbom, wskutek czego odstępy między kolejnymi liczbami zmniejszają się wraz ze wzrostem wartości owych liczb. Na przykład różnica między 0 i 25 będzie większa niż różnica między 25 i 50. Badania pokazują, że w toku rozwoju następuje przejście od logarytmicznej do liniowej reprezentacji liczby (Siegler, Opfer 2003, Siegler, Booth 2004, Booth Siegler 2006, Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene, Zorzi 2010). Niektórzy badacze (np. Siegler, Opfer 2003) przekonują, że zmiana ta ma charakter stopniowy: to samo dziecko w określonym momencie rozwojowym może posługiwać się wieloma reprezentacjami osiowymi, wyskalowanymi w różny sposób. Uaktywnienie konkretnej osi uwarunkowane jest kontekstem sytuacyjnym, na który składa się przede wszystkim znajomość danego zakresu liczbowego. Dzieci w wieku 8 lat mogą szacować położenie tych samych liczb w sposób logarytmiczny, jeżeli widzą odcinek o końcach 0-1000, a w sposób liniowy, jeśli widzą odcinek o końcach 0-100 (Siegler, Booth 2004). Podobnie zachowują się dzieci pięcioletnie, u których oś liniowa aktywowana jest jedynie przy pokazywaniu przedziału 0-10, ale już nie przy przedziale 0-20 (Berteletti, Lucangeli, Piazza, Dehaene, Zorzi 2010). Zgodnie z hipotezą wieloosiowej reprezentacji dziecko uaktywnia w danym momencie tę oś, która jest najbardziej odpowiednia do wykonania zadania. Jeśli dany zakres liczbowy jest dziecku znany, najodpowiedniejszą reprezentacją będzie oś liniowa, która zapewnia najdokładniejsze oszacowanie.

W najnowszych badaniach nad skalowaniem umysłowej osi liczb (Barth, Paladino, 2011, Cohen, Blanc-Goldhammer 2011) próbuje się jednak kwestionować istnienie mechanizmu skalowania logarytmicznego. Wskazuje się, że zadania eksperymentalne dotyczące znalezienia miejsca dla danej liczby na osi liczbowej mają charakter zadań na oszacowanie proporcji zachodzącej między częścią osi liczbowej a jej całością. Oznacza to, że na przykład lokalizacja liczby *trzy* na osi od *zera* do *dziesięciu* wymaga podziału osi na trzy części; dopiero wówczas badana osoba może wykonać takie zadanie. Wymienieni autorzy uważają, że umysł skaluje umysłową oś liczbową za pomocą potęgowych modeli skonstruowanych nad funkcjami wykładniczymi Stevensa o postaci $F(n) = Kn^{\beta}$, gdzie $F(n)$ stanowi wartość subiektywnej lokalizacji liczby $n$ na umysłowej osi liczbowej, $K$ jest stałą dostosowaną do zadania eksperymentalnego, a $\beta$ stanowi parametr swoisty dla określonego umysłu. Jeśli $\beta$ wynosi 1, to funkcja Stevensa staje się funkcją liniową. Jeżeli $\beta$ jest większe od 1, to wartości funkcji Stevensa ujawniają subiektywne przeszacowanie wartości bodźca. W wypadku $\beta$ mniejszego od 1 wartości tej funkcji ujawniają subiektywne niedoszacowanie wartości bodźca.

Pierwsze modele skonstruowane za pomocą funkcji Stevensa opracował Spence (1990) dla postrzegania wartości pól czy też powierzchni (w zadaniach polegających na podziale na części całości płaskich figur geometrycznych). Wyróżnia się trzy typy tych modeli: jednocykliczne, dwucykliczne i wielocykliczne. W modelu jednocyklicznym dwie funkcje Stevensa opisują mechanizm skalowania: umysł każdą oś skaluje w taki sposób, że wyróżnia na niej trzy punkty w sposób dokładny: początek, środek i koniec. Pierwsza funkcja Stevensa przeszacowuje wartości dla wartości liczbowych w przedziale <początek, środek> (wówczas $\beta$ jest większe od jeden), a druga funkcja nie doszacowuje wartości liczbowych w przedziale <środek, koniec> (wówczas $\beta$ jest mniejsze od jeden). Model jednocykliczny Spence'a sprawdza się w wypadku niektórych osób badanych. Model dwucykliczny jest opisywany przez cztery funkcje Stevensa i wyznacza na każdej umysłowej osi liczbowej pięć krytycznych punktów, które stanowią adekwatne oszacowanie wartości bodźców liczbowych na osi: początek, środek, koniec oraz środek w przedziale <początek, środek> i środek w przedziale <środek, koniec>. Model dwucykliczny stanowi fraktalizację modelu jednocyklicznego Spence'a — w tym sensie, że po ustaleniu środkowego punktu na osi umysł ustala środkowe punkty na odcinkach otrzymanych w wyniku pierwszego ustalenia[24].

[24] Przytoczone wyniki eksperymentalne można jednak zinterpretować tak, by nie kwestionowały skalowania logarytmicznego umysłowej osi liczb. Skoro przed wykonaniem zadania eksperymentator ustala środek odcinka, to uczestnicy eksperymentów musieli wykonać zadanie dotyczące podziału odcinka. Co więcej, każda kolejna próba lokalizacji liczby na odcinku zakłada już ustalenie

W ten sposób w wyniku kolejnych fraktalizacji można stworzyć modele wielocykliczne. Wszystkie one mają jednak charakter nieliniowy i dla pewnych wartości stałej $\beta$, w pewnych przedziałach wartości szacowanego bodźca, przebieg funkcji Stevensa upodobnia się do przebiegu funkcji logarytmicznej. W modelu Cohena i Blanc-Goldhammera (2011) efekt nieliniowości jest wyjaśniany dwoma parametrami — wariancją oszacowania położenia liczby oraz postrzeganą odległością między „środkami" liczb. Według badaczy reprezentacja liczby na umysłowej osi liczb jest konstrukcją zbudowaną z jej względnego miejsca punktowego oraz średniej zmienności (wariancji) jej umiejscawiania przez umysł w badaniu eksperymentalnym. Zgodnie z terminologią wprowadzoną w poprzednim rozdziale reprezentację liczby na osi można przedstawić jako parę $<n, \delta_n>$, gdzie $n$ stanowi jej miejsce punktowe, a $\delta_n$ jest średnią wariancją z eksperymentalnych oszacowań liczby $n$. Wraz ze wzrostem $n$ wariancja $\delta_n$ również rośnie jako stała proporcja dla wszystkich liczb większych od pięciu ($\delta_n/n = const$).

W koncepcji Cohena i Blanc-Goldhammera wraz ze wzrostem liczb postrzegana odległość między kolejnymi liczbami rośnie (odległość ta jest rozumiana jako odległość między środkami reprezentacji liczb na osi); wzrost tej odległości jest opisywany jako funkcja potęgowa o wykładniku większym niż jeden. Wniosek ten jest sprzeczny z dotychczasowymi badaniami oraz koncepcjami, które stwierdzają, że efekt jest odwrotny — wraz ze wzrostem wartości liczbowej postrzegana odległość między nimi maleje. Jednak autorzy wprowadzają jeszcze dodatkowy parametr — różnicę między reprezentacjami liczb. Parametr ten ma mierzyć łatwość odróżniania następujących po sobie reprezentacji liczb na osi umysłowej. Zgodnie z modelem Cohena i Blanc-Goldhammera, mimo że odległość między następującymi po sobie liczbami rośnie wraz ze wzrostem ich wartości, to ich różnica maleje. Parametr różnicy między liczbami $n$ oraz $m$ jest skorelowany odwrotnie proporcjonalnie ze średnimi zmiennościami $\delta_n$ oraz $\delta_m$ jako ich średnia arytmetyczna. Im bardziej suma $\delta_n + \delta_m$ rośnie, tym bardziej nachodzą na siebie reprezentacje liczb $n$ oraz $m$ (ponieważ są one odcinkami na osi); w związku z tym trudniej je odróżnić.

Analizowana propozycja dotyczy bez wątpienia punktowo-miejscowej, a nie akumulatorowej osi liczb. Nie wyjaśnia ona jednak mechanizmu przekształcenia punktowo-miejscowej osi w oś liczb dokładnych, skalowaną w sposób liniowy. Jeśli wykładnik potęgowy w funkcji Spence'a wynosi 1, to funkcja taka będzie opisywała funkcjonowanie umysłu w procesach odniesienia liczebnikowego za pomocą dokładnej, liniowo skalowanej umysłowej osi liczb. Pytanie jednak dotyczy tego, jakie czynniki powodują zmianę wartości wykładnika potęgowego w funkcji Spence'a, zmieniającego nieliniowość na liniowość skali umysłowej osi liczb.

---

wcześniejszych punktów. Zatem Cohen i Blanc-Goldhammer (2011) słusznie zauważają, że zadania dokładniej rekonstruujące skalowanie umysłowej osi liczb powinny dotyczyć umiejscawiania liczb na osi bez ustalania dwóch wartości liczbowych na linii.

Co więc decyduje o tym, że w danym momencie umysł uaktywnia logarytmiczną (lub ogólniej — nieliniową) bądź liniową reprezentację? Wydaje się, że oś logarytmiczna (nieliniowa), która prawdopodobnie stanowi pierwotny, „niedojrzały" system reprezentacji liczebności, uaktywnia się najczęściej wtedy, gdy podmiot musi dokonać szybkich, automatycznych obliczeń lub oszacowań, w których dokładność nie jest najistotniejszym elementem. Tak dzieje się np. wtedy, gdy osoba badana porównuje pod presją czasu wartości dwóch liczebników cyfrowych. Z kolei oś liniowa jest niezbędna, gdy umysł musi posługiwać się precyzyjnymi wartościami liczbowymi. Jak pokazują badania, aktywacja takiej osi wymaga większego zaangażowania uwagi (Anobile, Cicchini, Burr 2012).

Skalowanie logarytmiczne osi liczbowej syntetyzowanej przez umysł zgodnie z mechanizmem akumulatorowym można w charakterze przykładu wyjaśnić przez odwołanie do implementacji umysłowej osi liczb w sieci neuronowej. Jeśli przyjmie się założenie, że długość odcinka na akumulatorowej, umysłowej osi liczbowej jest proporcjonalna do liczby neuronów wymaganych do jego „zapisania" w umyśle (czyli implementacji w mózgu), to wówczas skalowanie logarytmiczne tej osi stanowi mechanizm oszczędzania neuronalnych mocy aktywacyjnych w procesach kodowania i zapisywania reprezentacji liczbowych. Gdyby skalowanie miało charakter liniowy, czyli taki, że dla dowolnych dwóch reprezentacji akumulatorowych $O^i(\alpha)$ oraz $O^i(\beta)$ długości odcinków $[\alpha, O^i(\alpha)]$ oraz $[\beta, O^i(\beta)]$ są równe, to liczba neuronów używanych do syntezy reprezentacji akumulatorowej dowolnej liczby byłaby większa przy skalowaniu liniowym niż w wypadku skalowania logarytmicznego. Przy czym im większa jest kodowana liczba, tym więcej mocy neuronalno-aktywacyjnych umysł oszczędza w wyniku skalowania logarytmicznego osi liczbowej.

Wyjaśnienie takie zakłada, że pojedynczy neuron nie może stanowić w modelu akumulatorowym ośrodka implementacji odcinka kodującego $P$. Co więcej, przy skalowaniu logarytmicznym, w procesie iteracyjnego przedłużania odcinków kodujących liczby o odcinek $P$, z każdą kolejną iteracją operacji $O$ zmniejsza się liczba neuronów skorelowanych z odcinkiem kodującym $P$. Taki proces tłumaczyłby również to, że kodowanie liczb według mechanizmu akumulatorowego ma swoją granicę; w pewnym momencie wyczerpuje się pula neuronów wymaganych do zaimplementowania w nich odcinka kodującego $P$, skoro z każdą kolejną iteracją $O$ mechanizm wymusza użycie coraz mniejszej liczby neuronów.

Skalowanie logarytmiczne umysłowej osi liczb można dodatkowo zinterpretować jako mechanizm implementujący relację porządku $\leq$, w modelu punktowo-miejscowym, określoną na zbiorze punktów $N$. Strukturę $<N, \leq>$ można bowiem ująć jako jednoznacznie przyporządkowaną którejś z akumulatorowych umysłowych osi liczbowych. Wcześniej bowiem założyliśmy, że takich osi skorelowanych z mechanizmem przyjmującym kształt $<A_k, F, P_k, O_k, O_k^-, \mathbf{0}>$ jest wiele z uwagi na indeks $k$ oznaczający wielkość odcinka kodującego $P_k$. W takim razie można by przyjąć, że struktura $<A_k, F, P_k, O_k, O_k^-, \mathbf{0}>$ wyznacza strukturę $<N_k, \leq>$, gdzie $N_k$ stanowi zbiór punktów, z których zbudowane są akumulatorowe reprezentacje liczebności na osi $A_k$. Dla dowolnego $n$ odcinek o postaci $[\mathbf{0}, n]$ stanowi akumulatorową reprezentację odpowiedniej liczby. Relacja $\leq$, porządkująca punkty zbioru $N$, wyznacza również relacje liniowego porządku między odcinkami akumulatorowo kodującymi kolejne liczby.

Zgodnie ze skalą logarytmiczną różnice w długościach między kolejnymi, sąsiadującymi ze sobą odcinkami-reprezentacjami, kodującymi akumulatorowo liczby, są coraz krótsze: $D[n_i, n_{i-1}] < D[n_{i-1}, n_{i-2}]$. Oznacza to, że do aktywacji każdej kolejnej reprezentacji wymagana jest proporcjonalnie coraz mniejsza, dodatkowa liczba neuronów. Dlatego w wypadku tworzenia reprezentacji operacją przedłużania $O_k$ stosowane są coraz krótsze odcinki kodujące $P$, a w wypadku tworzenia reprezentacji operacją skracania $O_k^-$ stosowane są coraz dłuższe odcinki kodujące $P$.

Zilustrujmy mechanizm skalowania logarytmicznego odpowiedzialny za zdolność umysłu do oszacowania, który z dwóch dowolnych punktów na umysłowej osi liczb jest wcześniejszy lub późniejszy z uwagi na relację $\leq$. Niech funkcja długości między dwoma sąsiadującymi punktami zbioru $N_k$ przyporządkowuje długość odcinka kodującego $P$ według warunku: $D[n_i, n_{i-1}] = D(P_k) \equiv [\mathbf{0}, n_i] = O^k(\mathbf{0})$, gdzie $D(P_k)$ jest liczbą neuronów wymaganych do aktywacji odcinka kodującego $P$ na k-tej iteracji operacji przedłużania $O$ zastosowanej do $\mathbf{0}$. Zgodnie ze wzorem, miarą długości odcinka $[n_i, n_{i-1}]$ jest więc liczba uaktywnionych neuronów w ostatnim zastosowaniu operatora przedłużania w celu syntezy reprezentacji $[\mathbf{0}, n_i]$. Jeśli umysł chce oszacować, który z punktów $n_i$ oraz $n_j$ jest wcześniejszy, to musi rozstrzygnąć, czy zachodzi $D[n_i, n_{i-1}] > D[n_j, n_{j-1}]$, czy też odwrotnie. Stosuje algorytm wyznaczony mechanizmem zdefiniowanym następująco: $n_i \leq n_j \equiv D[n_i, n_{i-1}] > D[n_j, n_{j-1}] \vee D[n_i, n_{i-1}] = D[n_j, n_{j-1}]$. Ponieważ akumulatorowa oś, która generuje punkty zbioru $N_k$ jest wyskalowana logarytmicznie, umysł potrzebuje zachować w swojej pamięci, dla celu rozwiązania zadania, jedynie ostatnie fazy procesów syntezy i implementacji reprezentacji porównywanych liczb. Wystarczy, aby umysł porównał $D(P_k)$ dla $n_i$ z $D(P_k)$ dla $n_j$. Przedstawiony przykładowo mechanizm w tego rodzaju obliczeniach oszczędza neuronalne moce aktywacyjne mózgu w porównaniu z mechanizmem obliczania punktów na osi skalowanej liniowo. W wypadku skalowania liniowego tego typu rozstrzygnięcia wymagałyby utrzymywania aktywacji wszystkich neuronów implementujących reprezentacje dwóch liczebności, których badane punkty byłyby ostatnimi, domykającymi punktami.

Przy stosowaniu mechanizmu skalowania logarytmicznego umysł otrzymuje jeszcze jedną umiejętność obliczeniową, mianowicie zdolność do kontekstowego (sytuacyjnego) oszacowywania wielkości liczb naturalnych. Dzieci na przykład często stwierdzają, że dwa lub trzy klocki (cukierki, pierogi) to „mało" klocków, cukierków czy pierogów na obiad. W wypadku stu lub dwustu egzemplarzy przeliczanej rozmaitości ich oszacowywania są wyrażane słowem „dużo". Oczywiście na liczebnik werbalny „milion" reagują, wyrażając na różne sposoby zdziwienie jego wielkością liczbową. Ta umiejętność przyporządkowywania liczbom ich wielkości kwantyfikacyjnej, czyli wielkości oznaczającej to, czy czas przeliczania obiektów należących do danej rozmaitości o określonej liczebności jest subiektywnie długi, czy krótki, ujawnia się również w codziennych obliczeniach dokonywanych przez dojrzały umysł. Przy szacowaniu wielkości kwantyfikacyjnych liczb umysł posługuje się rozmaitymi skalami, takimi jak *ciut-ciut*, *malutko*, *mało*, *średnio*, *dużo*, *bardzo dużo*, *ogromnie dużo*. Kiedy dokonujemy oceny „Mam dużo pieniędzy", posiadając w kieszeni pięćset złotych, oszacowujemy w danym kontekście liczbę *pięćset*. Kiedy hurtownik zamawia dwa tysiące cegieł, wówczas swoje zamówienie może określić jako *małe*.

Zgodnie z mechanizmem akumulatorowym reprezentacja każdej kolejnej liczby jest syntetyzowana jako przedłużenie lub skrócenie pewnego odcinka na wejściu (stanowiącego ustaloną reprezentację pewnej liczby) o odcinek kodujący $P_k$. Według skali logarytmicznej długość odcinka kodującego maleje wraz ze wzrostem wielkości kodowanej akumulatorowo liczby. Zatem w naszym modelu wielkość kwantyfikacyjna danej liczby w określonej sytuacji jest skorelowana z długością odcinków kodujących $P$ użytych przez umysł w procesie syntezy reprezentacji danej liczby. Jeśli taki proces syntezy wymaga użycia krótkich odcinków kodujących, to umysł jest skłonny oszacowywać daną liczbę jako *dużą* lub *wielką*. Jeśli zaś odcinki kodujące $P_k$ użyte w procesie syntezy reprezentacji danej liczby są długie, to umysł będzie oszacowywał daną liczbę jako małą. Liczba *jeden* niezależnie od kontekstu sytuacyjnego zliczanych obiektów zawsze będzie oszacowywana jako *mała liczba*.

Zdolność i skłonność umysłu do przypisywania liczbom w różnych sytuacjach odmiennych wielkości kwantyfikacyjnych byłaby trudna do wyjaśnienia za pomocą mechanizmu skalowania arytmetycznego. Umysł musiałby przypisywać wielkość kwantyfikacyjną liczbie z uwagi na długość odcinka kodującego ją akumulatorowo. Na przykład reprezentacja liczby *dziesięć* zakodowanej akumulatorowo według skali liniowej powinna mieć zasadniczo w każdej sytuacji tę samą długość na mentalnej osi liczb, zatem wielkość kwantyfikacyjna kojarzona z tą liczbą przez umysł powinna być stała w każdej sytuacji. Okazuje się, że tak nie jest. W późnych latach osiemdziesiątych w naszym kraju zarobki miesięczne dziesięciu tysięcy złotych były oszacowywane jako *małe*; dzisiaj dla wielu ludzi są to *duże* zarobki. Jeśli umysł ustala na osi liczb reprezentację liczby *sto tysięcy*, to aby zsyntetyzować reprezentację liczby *dziesięć tysięcy*, musi dokonać dziewięciokrotnego skrócenia o odcinek kodujący $P$ odcinka kodującego liczbę *sto tysięcy*, aby zsyntetyzować reprezentację liczby *dziesięć tysięcy*. Jeśli z kolei umysł ustala na osi liczb reprezentację liczby *tysiąc*, to musi dokonać dziewięciokrotnego przedłużenia o odcinek kodujący $P$ odcinka kodującego liczbę *tysiąc*, aby zsyntetyzować reprezentację liczby *dziesięć tysięcy*. W pierwszym wypadku odcinek kodujący reprezentuje liczbę *dziesięć tysięcy*, w drugim wypadku — liczbę *tysiąc*.

Zgodnie z mechanizmem kodowania liniowego odcinek $P$ w pierwszej sytuacji powinien być dziesięciokrotnie dłuższy od odcinka $P$ w drugiej sytuacji. Zwolennik liniowego kodowania reprezentacji na umysłowej osi liczb może wyjaśnić fakt przypisywania w pierwszej sytuacji liczbie *dziesięć tysięcy* wielkości kwantyfikacyjnej *mało* tym, że synteza reprezentacji tej liczby wymagała zastosowania przez umysł operacji dziewięciokrotnego skracania odcinka ustalonego na wejściu i reprezentującego liczbę *sto tysięcy*. Przypisanie liczbie *dziesięć tysięcy* wielkości kwantyfikacyjnej *dużo* wynika z kolei z przedłużania odcinka ustalonego na wejściu. Takie wyjaśnienie nie jest jednak zadowalające, ponieważ w wypadku ustalenia — na początku procesu syntezy — reprezentacji liczby, którą umysł ujmuje w danej sytuacji jako liczbę *ogromną*, model powinien przewidywać oszacowanie syntetyzowanej reprezentacji jako liczby *małej*. Jeśli liczba *pięćset tysięcy* jest oszacowywana jako liczba *duża*, to liczba *czterysta dziesięć tysięcy* powinna być oszacowana jako liczba *mała*, ponieważ synteza jej reprezentacji wymaga również dziewięciokrotnego skrócenia odcinka-reprezentacji na wejściu.

W wypadku mechanizmu skalowania logarytmicznego oszacowanie wielkości kwantyfikacyjnych liczb zależy wyłącznie od tego, czy podczas procesu syntezy, przedłużając lub skracając ustalony na wejściu odcinek, umysł posługuje się długimi, czy też krótkimi odcinkami kodującymi *P*. Jeśli synteza reprezentacji danej liczby na akumulatorowej osi liczb wymaga zastosowania krótkich odcinków kodujących *P* zarówno przy przedłużaniu, jak i skracaniu odcinka na wejściu, reprezentowana liczba, której reprezentacja jest syntetyzowana, będzie oszacowywana jako liczba *duża*.

Postawić należy następujące pytanie: czy punktowo-miejscowa umysłowa oś liczb jest skalowana logarytmicznie (nieliniowo) czy liniowo? Zgodnie z mechanizmem skalowania logarytmicznego odcinki kodujące liczby powinny wraz ze wzrostem wielkości kodowanej liczby być coraz krótsze. Na umysłowej osi liczb, syntetyzowanej według mechanizmu punktowo-miejscowego dla dowolnej funkcji selekcji $\delta^k$, odcinki reprezentujące liczby są, wprost przeciwnie, coraz dłuższe wraz ze wzrostem wielkości liczby (co pośrednio potwierdzają badania (Cohen, Blanc-Goldhammer 2011). Jeśli długość odcinka reprezentującego liczbę jest proporcjonalna do liczby neuronów wymaganych do jego aktywowania, to zgodnie z mechanizmem kodowania punktowo-miejscowego liczba neuronów wymaganych do aktywacji reprezentacji danej liczby dla danej funkcji $\delta^k$ wzrasta wraz ze wzrostem wielkości liczby. Poza tym trzeba zauważyć, że w wypadku wystarczająco wysokich indeksów funkcji $\delta^k$ liczby należące do początkowego przedziału są kodowane na umysłowej osi liczb jako punkty, a nie odcinki. Wraz ze wzrostem indeksu funkcji $\delta^k$, czyli intencji dokładności obliczeniowej, przedział liczb reprezentowanych punktowo jest coraz większy.

Przyjąć więc można hipotezę, że początkowy odcinek punktowo-miejscowej osi liczb jest skalowany przez umysł logarytmicznie, natomiast ta część osi liczb, na której liczby są reprezentowane jako miejsca (czyli odcinki) stopniowo wraz ze wzrostem wartości reprezentowanej liczby traci skalę logarytmiczną — w tym sensie, że ciąg odległości między środkami kolejnych odcinków reprezentujących liczby wraz ze wzrostem ich wartości w coraz mniej dokładny sposób odwzorowuje logarytmiczność skali[25]. Nie można więc mówić o tym, że obecność skali logarytmicznej na osi

[25] Taka hipoteza wyjaśniałaby pewne fakty empiryczne. Jeśli w klasycznym „eksperymencie na

punktowo-miejscowej jest absolutna; skalowanie ma charakter względny w tym znaczeniu, że najpierw przyporządkowywane są punkty pierwszym trzem liczbom (czyli *jedynce*, *dwójce* i *trójce*) i w zależności od tego przyporządkowania wyznaczane jest skalowanie logarytmiczne do pewnego punktu na osi punktowo-miejscowej.

Ponieważ nawet dzieci w procesie nauczania wczesnoszkolnego są w stanie w odpowiedniej sytuacji eksperymentalnej w sposób przybliżony do liniowego odwzorowywać liczby na osi liczb, należy założyć, że istnieje mechanizm przekształcania skalowanej logarytmicznie osi punktowo-miejscowej w skalowaną liniowo, dokładną oś punktową. Z pewnością przekształcenie takie jest wywoływane przez intencję obliczeniową wyznaczającą funkcje dokładności obliczeniowej dla wysokich indeksów precyzji. Taką intencję maksymalnej dokładności można reprezentować jako $\Omega_{i\to\infty}(i)$, gdzie wskaźnik precyzji dąży do nieskończoności. Intencji tej musi więc towarzyszyć proces zamiany punktowej osi liczb skalowanej logarytmicznie na skalowaną liniowo punktową oś liczb. Model mechanizmu tego procesu powinien wyjaśniać następującą asymetrię: dlaczego dla intencji dokładności obliczeniowej dla niskich wartości, czyli dla $\Omega(0)$, $\Omega(1)$, $\Omega(2)$ oraz ewentualnie $\Omega(3)$, odległości między punktowymi reprezentacjami pierwszych liczb są skalowane logarytmicznie, podczas gdy te same odległości między punktowymi reprezentacjami liczb na osi wyznaczonej przez intencje dokładności obliczeniowej $\Omega_{i\to\infty}(i)$ są skalowane liniowo?

Aby zilustrować działanie modelu, załóżmy, że skalowanie logarytmiczne umysłowej osi liczb można odwzorować na poziomie implementacyjnym w postaci logarytmicznego skalowania liczebności neuronów wymaganych do zakodowania kolejnych punktów na umysłowej osi liczb. Wówczas pierwsze punkty na tej osi wymagają „logarytmicznie więcej” aktywacji neuronów niż punkty późniejsze na osi. Aby pokazać, jak funkcjonuje takie założenie na poziomie implementacyjnym, należy najpierw zdefiniować funkcję przyporządkowującą liczebności aktywowanych neuronów w mózgu punktom na umysłowej osi liczb. Funkcje takie nazwijmy funkcjami implementacji punktów w zbiorze neuronów. Oczywiście takich funkcji umysł może używać wiele z uwagi na (i) długość punktową umysłowej osi liczb, mierzoną licznością zbioru $N$, oraz (ii) jej natężenie. Niech $\Psi_{K,n}$ stanowi funkcję implementacji punktów umysłowej osi liczb o n-punktowej długości, gdzie K stanowi wartość w postaci liczby wymiernej oznaczającą natężenie osi. Funkcja $\Psi_{K,n}$ spełnia dwa warunki dla dowolnego $m \leq$ n oraz niektórych $m >$ n (gdzie / jest operacją dzielenia):

($\Psi_{K,n}$ 1) $\Psi_{K,n}(1) = n!K$

---

skalowanie osi liczb” badani są najpierw proszeni o umiejscowienie względnie małych liczb na osi od 0 do 100 (np. 1, 4, 5, 10, 15), a następnie na tej samej osi mają umieścić liczby z przedziału od 90 do 100, często ich odpowiedzi na naszkicowanym odcinku „zlewają się” w taki sposób, że punkty reprezentujące te liczby są położone fizycznie jeden przy drugim. Oczywiście z punktu widzenia skalowania logarytmicznego osi, kiedy odległość od punktu startowego do punktu *jeden* w przedziale [0, 100] jest wystarczająco duża, odległości między punktami w przedziale od [90, 100] na tej samej osi muszą być zasadniczo nieodróżnialne percepcyjnie.

($\Psi_{K,n}$ 2) $[\Psi_{K,n}(1)/m] = [\Psi_{K,n}(m)]$

Warunek ($\Psi_{K,n}$ 1) określa liczbę neuronów wymaganych do aktywacji pierwszego punktu na n-długiej umysłowej osi liczb o natężeniu K. Warunek ($\Psi_{K,n}$ 2) z kolei przypisuje *m*-temu punktowi na osi określoną liczebność aktywacyjną neuronów.

Działanie funkcji implementacji można zilustrować następująco: załóżmy, że umysł jest nastawiony na wykrycie około 7 przedmiotów. Syntetyzuje więc siedmiopunktową umysłową oś punktów. Niech natężenie tej osi wynosi 1. Zatem $\Psi_{K,n}(1) = 7! = 1\cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$. Zatem poszczególne punkty akumulatorowej umysłowej osi liczb są implementowane wedle następującego układu: (1, 5040), (2, 2520), (3, 1680), (4, 1260), (5, 1008), (6, 840), (7, 720). Umysł jest w stanie przedłużyć oś o kolejne punkty: (8, 630), (9, 560), (10, 504). Aby zakodować kolejne liczby przy kodowaniu akumulatorowym na tak zsyntetyzowanej osi, umysł potrzebuje następujących aktywacji neuronów: (*jeden*, 5040), (*dwa*, 7560), (*trzy*, 9240), (*cztery*, 10500), (*pięć*, 11508), (*sześć*, 12348), (*siedem*, 13068), (*osiem*, 13698), (*dziewięć*, 14258), (*dziesięć*, 14762).

Z uwagi na mechanizm oszczędzania mocy aktywacyjnych umysł przekształca reprezentowanie akumulatorowe liczb w ich reprezentowanie punktowo-miejscowe. Niech intencja precyzji obliczeniowej wynosi w tym wypadku $\Omega(0)$. Zatem poszczególnym reprezentacjom liczb na osi punktowo-miejscowej odpowiadają następujące aktywacje neuronów: (*jeden*, [1, 1], 5040), (*dwa*, [2, 2], 2520), (*trzy*, [3, 3], 1680), (*cztery*, [3, 5], (1680, 1260, 1008)) = ([3, 5], 3948), (*pięć*, [4, 6], (1260, 1008, 840) = ([4, 6], 3108), (*sześć*, [4, 8], (1260, 1008, 840, 720, 630)) = ([4, 8], 4458), (*siedem*, [5, 9], (1008, 840, 720, 630, 560)) = ([5, 9], 3758). Gdy porównuje się liczebności neuronów wymaganych do zaimplementowania reprezentacji akumulatorowych oraz reprezentacji punktowo-miejscowych, zysk w postaci zaoszczędzenia mocy aktywacyjnych okazuje się wyraźny. Ponadto na osi punktowo-miejscowej skala logarytmiczna zachowana jest jedynie w odniesieniu do środkowych punktów w reprezentacjach liczb. Jednak skala logarytmiczna przestaje funkcjonować na poziomie implementacyjnym, kiedy odcinkom-reprezentacjom przyporządkowywane są liczebności neuronów implementujących te reprezentacje. Na przykład liczba *siedem*, przy intencji dokładności obliczeniowej $\Omega(0)$, wymaga 3758 neuronów aktywacyjnych, podczas gdy liczba *sześć* wymaga ich 4458. Skala logarytmiczna dla $\Omega(0)$ obowiązuje jedynie w wypadku pierwszych trzech liczb. Jeśli wartość intencji dokładności obliczeniowej rośnie, to również na danej osi wydłuża się jej fragment skalowany logarytmicznie. Zatem dla $\Omega_{i\to\infty}(i)$, umysł syntetyzuje logarytmicznie wyskalowaną oś punktową.

Czy więc nasz model pozwala na rekonstrukcję mechanizmu przekształcania logarytmicznej, punktowej umysłowej osi liczb w oś skalowaną liniowo, czyli tak zwaną umysłową „oś liczb dokładnych”? Odpowiedź na to pytanie wymaga zwrócenia uwagi na to, że na skalowanej liniowo osi liczb wszystkie jej punkty powinny być implementowane w takich samych liczebnościach aktywacji neuronów (skala logarytmiczna osi jest bowiem funkcją skali logarytmicznej liczebności aktywacyjnej neuronów, które są wymagane do zaimplementowania punktów na osi). W wypadku skali logarytmicznej, jeśli mózg rozróżnia grupy aktywowanych neuronów pod względem liczebności, to odróżnia też reprezentacje zaimplementowane w tych grupach neuronów. W analizowanym już przykładzie mózg, odróżniając grupę 2520 aktywnych neuronów od grupy 1680 aktywnych neuronów, wywołuje w umyśle aktywację reprezentacji liczb *dwa* oraz *trzy* na punktowo-miejscowej osi liczb. W ten sposób, ilekroć na umysł równocześnie oddziałują liczebniki niesymboliczne *dwa* oraz *trzy*, umysł potrafi „przedwerbalnie" rozróżnić te dwie liczebności zbiorów obiektów danych mu w doświadczeniu. Zanik skali logarytmicznej powodowałby więc zanik umiejętności rozróżniania między liczebnościami liczebników niesymbolicznych.

W jaki więc sposób umysł mógłby wytworzyć ze skalowanej logarytmicznie punktowej osi liczb oś skalowaną liniowo? Ponieważ reprezentacje liczb są kojarzone z językowymi reprezentacjami liczebników symbolicznych (reprezentacjami napisów liczebnikowych, dźwięków liczebnikowych itd.), odróżnianie dwóch równolicznych grup aktywnych neuronów mogłoby się dokonywać przez odróżnianie różnolicznych grup neuronów implementujących językowe reprezentacje liczebników symbolicznych. Oznaczałoby to, że przekształcenie logarytmicznie skalowanej osi liczb w liniowo skalowaną, dokładną oś liczb może się odbyć dopiero wtedy, kiedy umysł opanuje nazewnictwo liczebnikowe (cyfrowe oraz werbalne).

Postawić można następne pytanie: jaka jest „celowość" takiego procesu? Zamiana skali na poziomie implementacyjnym byłaby procesem „wyrównywania" aktywacji neuronalnych, w których zaimplementowane są poszczególne punktowe reprezentacje liczb na osi wyznaczonej przez intencję dokładności obliczeniowej $\Omega_{i \to \infty}(i)$. Proces taki może dezaktywować neurony we wszystkich grupach neuronów implementujących poszczególne reprezentacje punktowe. W przykładzie podanym wyżej proces dezaktywacji neuronalnej można by ująć jako dezaktywowanie w każdej grupie neuronów tych wszystkich, których łączna liczba wykracza ponad 504 (skoro 504 stanowi najmniejszą liczbę neuronów, która implementuje reprezentację liczby *dziesięć*). W takiej sytuacji aktywacja punktowej, liniowo skalowanej umysłowej osi liczb o przedziale [1, 10] wymagałaby takiej samej liczby aktywnych neuronów (5040) co aktywacja reprezentacji liczby *jeden* na punktowo-miejscowej, logarytmicznie skalowanej osi liczb. W porównaniu zaś z liczebnością aktywacyjną neuronów implementujących wszystkie reprezentacje liczb w przykładzie wyżej (14762) na akumulatorowej osi liczb, efekt oszczędności może być wyrażony ilorazem 14762/5040.

Przekształcenie logarytmicznego (nieliniowego) mechanizmu implementacji osi liczbowych w mechanizm liniowo-punktowy musi więc obejmować proces dezaktywacji i wyrównywania liczebności aktywacyjnych regulowany pewnym algorytmem. Używając metafory, można stwierdzić, że mózg musi pokolorować liczebności aktywacyjne neuronów odpowiadające pierwszym, punktowym reprezentacjom liczb na punktowo-miejscowej osi liczb. Taki kolor stanowić będzie znacznik (w sensie

Carey) tego, że dana liczebność aktywacyjna neuronów jest kodem implementacyjnym tej, a nie innej reprezentacji liczbowej. Niech $L_1$, …, $L_4$ stanowią „kolory" użyte do pokolorowania przykładowych liczebności aktywacyjnych neuronów 5040, 2520, 1680 oraz 1260. Bez wątpienia najlepszym kandydatem na barwy kolorujące implementacje neuronalne reprezentacji liczb są implementacje neuronalne reprezentacji *liczebników*, zarówno w sensie werbalnym, jak i cyfrowym. W mózgu oraz w umyśle funkcjonuje więc funkcja przyporządkowująca reprezentacjom liczb (oraz ich neuronalnym implementacjom) reprezentacje liczebników (oraz implementacje tych reprezentacji). Odpowiednikiem tej funkcji na poziomie implementacyjnym w mózgu są asocjacje neuronalne wiążące implementacje reprezentacji liczb z implementacjami reprezentacji liczebników.

Niech Γ stanowi funkcję asocjacji implementacji punktowych reprezentacji liczb z implementacjami reprezentacji liczebników. Niech $L_1$, …, $L_k$ stanowią reprezentacje językowych liczebników. Funkcja Ψ (bez dolnych indeksów) stanowi funkcję implementacji dowolnej reprezentacji umysłowej w określonej grupie neuronów. Stąd $\Psi(L_m)$ jest implementacją reprezentacji liczebnika $L_m$. Funkcja Γ przyporządkowuje dowolnej implementacji punktowej reprezentacji liczby implementację reprezentacji standardowego liczebnika. Mózg i umysł uczą się stosowania tej funkcji podczas nabywania słownictwa liczebnikowego (np. kiedy dziecko uczy się recytowania kolejnych liczebników lub pisania kolejnych cyfr). Funkcje tę można opisać w następujący sposób:

(Df. Γ) $\Gamma(\Psi_{\mathrm{K,n}}(m)) = \Psi(L_m)$, dla określonego $m$

Asocjacjami implementacji punktowych reprezentacji liczb z implementacjami reprezentacji liczebników są więc pary o postaci $\langle\Psi_{\mathrm{K,n}}(m), \Psi(L_m)\rangle$. Niech ustalone reprezentacje liczebników będą oznaczane cyframi z podkreśleniem. Wtedy np. asocjacją implementacji punktowej reprezentacji liczby *jeden* z implementacją reprezentacji standardowego liczebnika *<u>jeden</u>* jest para o postaci $\langle\Psi_{\mathrm{K,n}}(\mathbf{1}), \Psi(\underline{\mathbf{1}})\rangle$. Tego rodzaju struktury można określić mianem językowych znaczników punktowych reprezentacji liczb. Kiedy umysł zakoduje w pamięci (przebiega to procesualnie zgodnie z opisem Carey) tego typu znaczniki językowe dla pierwszych punktów na punktowej osi liczb wyznaczonej przez funkcję intencji dokładności obliczeniowej $\Omega_{i\to\infty}(i)$, następuje proces redukcji wartości: $\Psi_{\mathrm{K,n}}(\mathbf{1})$, $\Psi_{\mathrm{K,n}}(\mathbf{2})$, $\Psi_{\mathrm{K,n}}(\mathbf{3})$ itd. Funkcja redukcji ***Red*** jest funkcją stałą, zachowującą się zgodnie z następującym warunkiem:

(Df. ***Red***) $[(\forall m)\, \boldsymbol{Red}[\Psi_{\mathrm{K,n}}(m)] = \mathbf{k}] \equiv (\exists L_m)\, [\Gamma(\Psi_{\mathrm{K,n}}(m)) = \Psi(L_m)]$

(Df. ***Red***) ustala, że proces redukcji liczby neuronów implementujących punktowe reprezentacje liczb ma miejsce wtedy, gdy w mózgu i umyśle zakodowane są reprezentacje liczebników wraz z ich implementacjami neuronalnymi oraz wówczas, gdy przez funkcję asocjacji Γ mózg oraz umysł są w stanie lingwistyczne tworzyć językowe znaczniki punktowych reprezentacji liczb dla pierwszych punktów mentalnej osi liczb.

Podsumowując, umysł kształtuje najpierw akumulatorowe umysłowe osie liczb skalowane logarytmicznie. Następnie przekształca je w punktowo-miejscowe osie liczbowe (dla kolejnych funkcji selekcji $\delta^k$). To przekształcenie dokonuje się pod wpływem mechanizmu oszczędzania mocy aktywacyjno-neuronalnych umysłu na poziomie implementacyjnym. W wypadku punktowej osi liczb o funkcji selekcji wyznaczonej przez intencję dokładności obliczeniowej $\Omega_{i\to\infty}(i)$, dzięki powiązaniu reprezentacji liczb na osi z językowymi reprezentacjami liczebników symbolicznych, skala logarytmiczna (lub nieliniowa) przekształca się w skalę liniową. W ten sposób wytwarzany jest wzorzec dokładnej umysłowej osi liczb, który jest przechowywany w pamięci umysłu i używany w procesach dekodowania liczebników w sensie werbalnym.

## 6. KIERUNEK I ZWROT UMYSŁOWEJ OSI LICZB

Nieco bardziej problematyczna wydaje się kwestia kształtowania kierunku i zwrotu osi umysłowej, których do tej pory nie uwzględniał nasz model. W literaturze oś liczbowa opisywana jest najczęściej jako zwrócona prawostronnie, co jest zgodne z naszymi kulturowymi ustaleniami. Można zatem postawić pytanie, czy prawostronność osi jest warunkiem koniecznym wykonywania na niej obliczeń. Jedną z zasad przeliczania w sformułowaniu Gellman i Gallistel (1978) jest zasada „nieważności kolejności", która wskazuje, że na wynik liczenia nie ma wpływu to, od której strony zaczynamy liczyć. Co więcej, liczne dane empiryczne wskazują na kulturową różnorodność kierunku i zwrotu efektów SNARC, a także kierunku i zwrotu przeliczania elementów. Dla przykładu, w krajach arabskich, gdzie pisze się i czyta od prawej do lewej strony, efekt SNARC zachodzi w tym samym kierunku — reakcje na mniejsze liczebniki są szybsze po prawej stronie, a na większe — po lewej (Shaki, Fischer, Petrusic 2009, Zebian, 2005). Nabywanie drugiego języka o odmiennym kierunku pisma (np. angielskiego przez Irańczyków) może osłabić lub nawet odwrócić pierwotnie ukształtowaną asocjację w zależności od stopnia biegłości w posługiwaniu się drugim językiem (Dehaene, Bossini, Giraux 1993). Badania z udziałem osób dwujęzycznych posługujących się językami o przeciwnych kierunkach pisma (np. rosyjski i hebrajski) pokazują ponadto, że u takich osób może dojść do szybkiego przełączania między asocjacjami o różnych kierunkach, w zależności od kierunku przeczytanego przed chwilą tekstu, a nawet pojedynczego słowa (Shaki, Fischer 2008, Fischer, Shaki, Cruise 2009).

Coraz więcej uwagi zwraca się również na wpływ wywierany przez kierunek zapisu cyfr w danej kulturze. W badaniach przeprowadzonych w Chinach (Hung, Hung, Tzeng, Wu 2008) znaleziono dwa rodzaje efektów SNARC — dla liczebników, zgodnie z ogólnym kierunkiem pisma chińskiego, czyli z góry na dół, oraz dla cyfr, zgodnie z kierunkiem ich zapisu, czyli od lewej do prawej strony. U użytkowników języka hebrajskiego efekt SNARC natomiast zanika (Shaki, Fischer, Petrusic 2009), co tłumaczy się niezgodnością kierunku tekstu (od prawej do lewej) z kierunkiem zapisu liczb (od lewej do prawej). Podobne zjawisko unieważnienia zwrotu osi u Izraelczyków zachodzi także podczas przeliczania elementów w rzędzie. Niektórzy autorzy zwracają także uwagę, że niemałą rolę w tworzeniu efektu SNARC może odgrywać kierunek liczenia na palcach (Lindemann, Alipour, Fischer 2011, Fischer, Brugger 2011), np. rozpoczynanie liczenia od lewej ręki wzmacnia efekt zachodzący od lewej strony (Fischer 2008).

Niektóre inne manipulacje warunkami eksperymentalnymi, np. użycie dodatkowych instrukcji przed rozpoczęciem właściwego zadania, także mogą prowadzić do zaniku, a nawet do zmiany kierunku efektu. W jednym z badań (Bächtold, Baumüller, Brugger 1998), przed wykonaniem głównego zadania, polegającego na ocenie wielkości liczebnika, uczestnicy proszeni byli o wyobrażenie sobie tarczy zegara lub linijki. Ponieważ mniejsze wartości ułożone są na tarczy zegarowej po prawej stronie, przywołanie obrazu zegara odwracało efekt SNARC w zadaniu oceny wielkości liczby: reakcje na mniejsze liczby były szybsze po prawej stronie, a na większe po lewej. W wypadku wyobrażania sobie układu cyfr na linijce, obserwowano z kolei regularny efekt SNARC — od lewej do prawej strony.

Kierunek efektu można także modyfikować, prosząc o przeczytanie przed wykonaniem zadania tekstu, w którym na początku wiersza pojawiają się liczebniki o większych wartościach, a na końcu — liczebniki mniejsze (Fischer, Mills, Shaki 2010), a także polecenie zapamiętania malejącego ciągu cyfr (Lindemann, Abolafia, Pratt, Bekkering 2008). Van Dijck i Fias (2011) prosili osoby badane o zapamiętanie cyfr wyświetlanych w kolejności losowej, np. 8, 1, 5, 7, 2. Uczestnicy wykonywali następnie zadanie oceny parzystości tych cyfr, tak jak w klasycznym schemacie służącym do badania efektu SNARC. Okazało się, że w wyniku zapamiętania takiej dowolnej sekwencji, reakcje po lewej stronie były szybsze nie dla cyfr o mniejszych wartościach, ale dla pierwszych cyfr z zapamiętanego ciągu (w tym wypadku 8, 1), reakcje po prawej stronie były zaś szybsze dla cyfr na końcowych pozycjach ciągu (w tym wypadku 7, 2). Ci sami badacze podobne rezultaty uzyskali, stosując zamiast cyfr nazwy owoców.

Kolejnym sposobem modyfikacji efektu jest manipulacja układem przycisków odpowiedzi. Standardowy schemat z dwoma przyciskami: jeden po lewej i drugi po prawej stronie, można zastąpić układem pionowym (w którym jeden przycisk znajduje się na dole, drugi zaś na górze). Nie tylko w kulturze zachodniej (Schwarz, Keus 2004 Gevers, Lammertyn, Notebaert, Verguts, Fias 2006), lecz także w japońskiej (Ito, Hatta 2004) efekt SNARC zachodzi od dołu do góry: reakcje na mniejsze liczebniki są szybsze przy użyciu przycisku znajdującego się u dołu, a reakcje na większe liczebniki są szybsze przy użyciu przycisku znajdującego się u góry. Co więcej, asocjacja może powstać także po skosie, tzn. reakcje na mniejsze liczebniki są szybsze w lewym dolnym rogu, a na większe w prawym górnym rogu (Gevers, Lammertyn, Notebaert, Verguts, Fias 2006). Forma asocjacji w wymiarze pionowym jest prawdopodobnie rezultatem naszych codziennych obserwacji świata, w którym kierunek z dołu do góry wskazuje najczęściej na zjawisko powiększania czy wzrostu, np. wzrost rośliny, napełnianie się szklanki wodą (Lakoff, Núńez 2000).

Na podstawie powyższych badań wskazujących, że efekt SNARC nie jest stabilny i łatwo nim manipulować, a nawet go blokować, można sformułować kolejne przewidywania dotyczące naszego modelu:

(i) Zwrot odcinka kodującego liczebniki jest zmienny zarówno kulturowo (z uwagi na organizację przestrzenną sposobu czytania w danej kulturze), jak i sytuacyjnie (np. z uwagi na wcześniejsze zapamiętanie pewnego ciągu liczebników).

(ii) (De)kodowanie przestrzenne liczebników może być zablokowane w niektórych sytuacjach poznawczych.

Formalne cechy opisanego przez nas modelu można z łatwością zaimplementować na dowolnej osi o danym kierunku i zwrocie, toteż kierunek i zwrot nie są traktowane jako istotne obliczeniowo cechy reprezentacji liczby. W przeciwnym razie niemożliwe byłoby wykonywanie obliczeń przez przedstawicieli kultur o odmiennych zwyczajach pisma, a także w sytuacjach, kiedy np. spoglądamy na tarczę zegara czy myślimy o ciągu malejących liczb. Ponadto należy zaznaczyć, że otwartą kwestią pozostaje to, czy oś liczbowa w umyśle niemowlęcia mogłaby funkcjonować w sposób ukierunkowany. W obliczu niedostatecznych danych empirycznych nie można wykluczyć takiej możliwości, tym bardziej że pewne efekty podobne do SNARC udało się już zaobserwować u dzieci trzyletnich, czyli dość wcześnie w ontogenezie (Patro, Haman 2012). Można by przyjąć hipotezę, że istnieje jakiś pierwotny zwrot umysłowej osi liczb, który w następstwie czynników kulturowych jest modyfikowany i w związku z tym staje się zmienny. Niemniej faktyczna zmienność zarówno kierunku, jak i zwrotu umysłowej osi liczb pokazuje, że parametry te nie stanowią własności niezbędnej w procesie przetwarzania liczebników niesymbolicznych.

Jeżeli zwrot i kierunek nie są istotnymi własnościami osi, można je określić jako sposób (styl implementacji) reprezentacji liczb w umyśle. Styl implementacji zapośredniczony jest przez pewne schematy sterowania uwagą w przestrzeni zewnętrznej, które mogą mieć różnorodny charakter. Wydaje się, że schematy te są w znacznej części wyuczone za sprawą uczestnictwa w danej kulturze, w szczególności za sprawą sposobu pisania i organizowania przestrzennego przedmiotów, a także różnych czynności (np. podczas przechodzenia przez ulicę najpierw spoglądamy na lewo). Ale mogą się one także aktywować krótkoterminowo w celu wykonania określonego zadania. Niektórzy autorzy (Fischer 2006) wskazują, że jeśli w pewnych sytuacjach zadaniowych dochodzi do obserwacji efektu SNARC, oznacza to, że podmiot korzysta w danym momencie ze strategii poznawczej, która polega na dokonaniu tymczasowego odwzorowania wielkości liczbowych na określone kierunki przestrzenne, co ma usprawnić proces przetwarzania informacji numerycznej. Odwzorowanie jest krótkoterminowe, a jego zwrot zależy od typu zadania: docelowo wybierane jest powiązanie zgodne z kierunkiem pisma, utrwalone kulturowo, ale jeśli tego wymaga zadanie, umysł jest w stanie uaktywnić dowolnie skierowaną reprezentację osiową.

Schematy przestrzenne mogą się także aktywować na poziomie językowym (Proctor, Cho 2006, van Dijck, Gevers, Fias 2009, van Dijck, Fias 2011, Imbo, De

Brauwer, Fias, Gevers 2012), to znaczy w wyniku powstania asocjacji w obrębie kategorii pojęć nacechowanych dodatnio (*prawy-duży*) lub ujemnie (*lewy-mały*). Mechanizm implementacyjny może też do pewnego stopnia zależeć od naszej budowy biologicznej. Choć wyjaśnienie to nie jest aktualnie popularne wśród badaczy, pewne eksperymenty na ptakach pokazują, że podczas „liczenia" otworów umieszczonych poziomo w rzędzie ptaki zaczynają zazwyczaj od lewej strony, co autorzy tłumaczą przewagą prawej półkuli w procesach sterowania uwagą w przestrzeni (Rugani, Kelly, Szelest, Regolin, Vallortigara 2010).

Podsumowując, zarówno w naszym modelu, jak i w wyjaśnieniach podawanych obecnie w literaturze, kierunek i zwrot osi liczbowej nie są uznawane za niezbędne elementy w procesie przetwarzania liczebników. Niemniej mogą się one pojawić w określonej postaci na poziomie implementacyjnym wskutek uaktywniania mniej lub bardziej wyuczonych schematów sterowania uwagą w przestrzeni zewnętrznej.

## 7. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiony model formalny systemu reprezentacji liczb (liczebności) jako systemu wielości umysłowych osi liczbowych nakłada na ten system hierarchiczną strukturę z uwagi na kryterium nabywania przez umysł kolejnych osi liczbowych. Pierwszą hierarchię tworzą analogowe (sumacyjne, czyli akumulatorowe) umysłowe osie liczb (liczebności) wyznaczone przez mechanizm o postaci: $<A_k, F, P_k, O_k, O_k^-, \mathbf{0}>$. Następnie, z uwagi na procesy implementacyjne w sieci neuronowej, system akumulatorowy jest przekształcany (nie oznacza to, że „ginie" on w umyśle) w system złożony z punktowo-miejscowych umysłowych osi liczb funkcjonujących zgodnie z mechanizmem o postaci $<\Omega, <M_i, N_k, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^i>>$, gdzie $k$ jest indeksem wyznaczonym przez $<A_k, F, P_k, O_k, O_k^-, \mathbf{0}>$. Na dwa pierwsze systemy składają się osie liczbowe, które stanowią podstawę reprezentacyjną dla niedokładnych, przybliżonych aktów odniesienia liczebnikowego. Osie składające się na pierwszy system są nieustannie kształtowane w przestrzeni umysłowej na mocy oddziaływania na umysł liczebników niesymbolicznych.

Wraz z rozwojem procesów uwagowych umysłu, czyli nabywaniem umiejętności generowania funkcji selekcji $\delta^i$ o coraz wyższym indeksie, struktury o postaci $<M_i, N_k, \leq, \mathbf{0}, \mathbf{1}, S, \delta^i>$ są przekształcane w odpowiadające im struktury o wyższym stopniu dokładności. Ostatecznym wynikiem tego procesu jest wytworzenie systemu o „idealnym" stopniu precyzji, na który składają się dokładne umysłowe osie liczb funkcjonujące zgodnie z mechanizmem o postaci: $<\Omega_{i \to \infty}, <M, N, \leq, S, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \delta_{i \to \infty}{}^i>>$, gdzie $\Omega_{i \to \infty}$ stanowi operator intencji dokładności przy $i$ dążącym do nieskończoności. Dopiero na podstawie takiego systemu umysł może rozwijać swoje eksperckie umiejętności arytmetyczne bazujące na wiedzy matematycznej, co skutkuje przekształceniem nieliniowej (logarytmicznej) skali osi liczb na skalę liniową. W tym procesie transformacji uczestniczy mechanizm „kolorowania” znacznikami językowymi (w sensie Carey) reprezentacji liczb.

Każdy z wyszczególnionych systemów semantycznych reprezentacji liczb jest skorelowany w umyśle na mocy związków asocjacyjnych z językowymi reprezentacjami liczebników symbolicznych. Te reprezentacje również tworzą system zbudowany z wielu podsystemów. Językowe reprezentacje liczebników werbalnych danego języka w sensie etnicznym tworzą oddzielny podsystem, który jest w umyśle syntetyzowany w procesie nabywania języka danego umysłu. Drugi podsystem tworzą reprezentacje językowe liczebników cyfrowych. Oba podsystemy są w sprawnie funkcjonującym umyśle sprzężone asocjacyjnie. Wydaje się, że u podstaw tych podsystemów stoi jeszcze jeden — system reprezentacji logicznych liczebników symbolicznych, który umożliwia umysłowi przekładanie liczebników cyfrowych na werbalne i odwrotnie; a także liczebniki werbalne danego języka na liczebniki werbalne innego języka czy w końcu cyfry zapisane w jednym układzie (np. dziesiątkowym) na cyfry zapisane w innym układzie (np. piątkowym).

Nasz model powinien zostać poddany dodatkowym testom. W szczególności należy potwierdzić hipotezę wieloosiowości (zarówno akumulatorowej, jak i punktowo-miejscowej), która została przyjęta, aby wyjaśnić fakt reprezentowania przez umysł „wielkich” liczb, desygnowanych przez wielocyfrowe liczebniki. Warto również zweryfikować model w aspekcie wywoływania efektu SNARC, nie tylko w wypadku cyfr arabskich układu dziesiątkowego, lecz także cyfr arabskich w innym układzie. Gdyby na przykład okazało się, że efekt SNARC nie ujawnia się w eksperymentach, w których umysłom badanym przedstawiane są cyfry w zapisie czwórkowym, to koncepcja umysłowej osi liczb stosowałaby się jedynie do pewnych systemów zapisu cyfr i reprezentowania liczebności. To sugerowałoby z kolei hipotezę, że akumulatorowa umysłowa oś liczb, syntetyzowana na mocy oddziaływań na umysł liczebników niesymbolicznych, jest dezaktywowana w wyniku jej sprzężenia asocjacyjnego z określonego typu systemami językowych reprezentacji liczebników symbolicznych.

Następnym zadaniem jest opracowanie koncepcji opisującej asocjacje między reprezentacjami liczb na osiach liczbowych z logicznymi reprezentacjami liczebników symbolicznych. Mówiąc metaforycznie, należy skonstruować teorię, która traktowałaby kolejne systemy reprezentacji liczb jako modele semantyczne dla logicznej gramatyki liczebników symbolicznych. Dopełnieniem tych badań powinno być pokazanie logicznego mechanizmu przekształcania umysłowych systemów osi liczb w modele semantyczne arytmetyki Peana.

## BIBLIOGRAFIA

Anobile G., Cicchini, G. M., Burr D. C. (2012), *Linear Mapping of Numbers onto Space Requires Attention*, „Cognition” 3, 454-459.

Antell S. E., Keating D. (1983), *Perception of Numerical Invariance in Neonates*, „Child Development" 54, 695-701.

Ashcraft M. H., (1992), *Cognitive Arithmetic. A Review of Data and Theory*, „Cognition" 44, 75-106.

Bächtold D., Baumüller M., Brugger P. (1998), *Stimulus-Response Compatibility in Representational Space*, „Neuropsychologia" 36, 731-735.

Barth H. C., Paladino A. M. (2011), *The Development of Numerical Estimation. Evidence against Representational Shift*, „Developmental Science" 14(1), 125-135.

Benson D. F., Denckla M. B. (1969), *Verbal Paraphasia as a Source of Calculation Disturbance*, „Archives of Neurology" 21, 96-102.

Berch D. B. (2005), *Making Sense of Number Sense. Implications for Children With Mathematical Disabilities*, „Journal of Learning Disabilities", 38(4), 333-339.

Berteletti I., Lucangeli D., Piazza M., Dehaene S., Zorzi M. (2010), *Numerical Estimation in Preschoolers*, „Developmental Psychology" 46, 545-551.

Booth J. L., Siegler R. S. (2006), *Developmental and Individual Differences in Pure Numerical Estimation*, „Developmental Psychology" 41, 189-201.

Brannon E. M., Merritt D. (2011), *Evolutionary Foundations of the Approximate Number System* [w:] *Space, Time, and Number in the Brain. Searching for the Foundations of Mathematical Thought*. S. Dehaene, E. M. Brannon (red.), Amsterdam: Elsevier.

Bueti D., Walsh V. (2009), *The Parietal Cortex and the Representation of Time, Space, Number and Other Magnitudes*, „Philosophical Transactions of the Royal Society B", 364, 1831-1840.

Bull R., Marschark M., Blatto-Valle G. (2005), *SNARC Hunting. Examining Number Representation in Deaf Students*, „Learning and Individual Differences" 15, 223-236.

Bull R., Blatto-Valle G., Fabich M. (2006), *Subitizing, Magnitude Representation and Magnitude Retrieval in Deaf and Hearing Adults*, „Journal of Deaf Studies and Deaf Education" 11, 289-302.

Cantlon J. F., Brannon E. M., Carter E. J., Pelphrey K. A. (2006), *Functional Imaging of Numerical Processing in Adults and 4-Y-Old Children*, „PLoS Biology" 4, 844-854.

Carey S. (2004), *Bootstrapping & the Origins of Concepts*, „Daedalus" 133(1), 59-68.

Castronovo J., Seron X. (2007), *Semantic Numerical Representation in Blind Subjects. The Role of Vision in the Spatial Format of the Mental Number Line*, „The Quarterly Journal of Experimental Psychology" 60, 101-119.

Cipora K., Nęcka E. (2012), *Kontinua a przestrzeń — przegląd badań nad przestrzennym komponentem poznawczej reprezentacji wielkości i nasilenia*, „Psychologia-Etologia-Genetyka" 26, 7-22.

Cohen D. J., Blanc-Goldhammer D. (2011), *Numerical Bias in Bounded and Unbounded Number Line Tasks*, „Psychonomic Bulletin & Review" 18(2), 331-338.

Dehaene S. (2001), *Precis of The Number Sense*, „Mind & Language" 16(1), 16-36.

Dehaene S., Bossini S., Giraux P. (1993), *The Mental Representation of Parity and Number Magnitude*, „Journal of Experimental Psychology. General" 122(3), 371-396.

Dehaene S., Changeux J.-P. (1993), *Development of Elementary Numerical Abilities. A Neuronal Model*, „Journal of Cognitive Neuroscience" 5, 390-407.

Dehaene S., Dupoux E., Mehler J. (1990), *Is Numerical Comparison Digital. Analogical and Symbolic Effects in Two-Digit Number Comparison*, „Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance" 16, 626-641.

Fauconnier G. (1994), *Mental Spaces. Aspects of Meaning Construction in Natural Language*, Cambridge: Cambridge University Press.

Feigenson L., Carey S. (2003), *Tracking Individuals via Object-Files. Evidence from Infants' Manual Search*, „Developmental Science" 6, 568-584.

Feigenson L., Carey S., Hauser M. (2002), *The Representations Underlying Infants' Choice of More. Object-Files versus Analog Magnitudes*, „Psychological Science" 13, 150-156.

Fias W. (2001), *Two Routes for the Processing of Verbal Numbers. Evidence from the SNARC Effect*, „Psychological Research" 65, 250-259.

Fias W., Brysbaert M., Geypens F., d'Ydewalle G. (1996), *The Importance of Magnitude Information in Numerical Processing. Evidence from the SNARC Effect*, „Mathematical Cognition" 2(1), 95-110.

Fischer, M. H. (2003), *Spatial Representations in Number Processing. Evidence from a Pointing Task*, „Visual Cognition" 10, 493-508.

Fischer M. H. (2006), *The Future for SNARC Could Be Stark*, „Cortex" 42, 1066-1068.

Fischer, M. H. (2008), *Finger Counting Habits Modulate Spatial-Numerical Associations*, „Cortex" 44, 386-392.

Fischer, M. H., Brugger P. (2011), *When Digits Help Digits. Spatial-Numerical Associations Point to Finger Counting as Prime Example of Embodied Cognition*, „Frontiers in Psychology" 2.

Fischer M. H., Castel A. D., Dodd M. D., Pratt J. (2003), *Perceiving Numbers Causes Spatial Shifts of Attention*, „Nature Neuroscience" 6, 555-556.

Fischer M. H., Mills R. A., Shaki S. (2010), *How to Cook a SNARC. Number Placement in Text Rapidly Changes Spatial-Numerical Associations*, „Brain & Cognition" 72, 333-336.

Fischer M. H., Rottmann J. (2005), *Do Negative Numbers Have a Place on the Mental Number Line?*, „Psychology Science" 47(1), 22-32.

Fischer M. H., Shaki S., Cruise A. (2009), *It Takes Only One Word to Quash the SNARC*, „Experimental Psychology" 56, 361-366.

Gallistel C. R., Gelman R. (1992), *Preverbal and Verbal Counting and Computation*, „Cognition" 44, 43-74.

Gallistel C. R., Gelman R. (2000), *Non-Verbal Numerical Cognition. From Reals to Integers*, „Trends in Cognitive Sciences" 4, 59-65.

Galton F. (1880), *Visualised Numerals*, „Nature" 21(533), 252-256.

Gelman R., Gallistel C. (1978), *The Child's Understanding of Number*, Cambridge (MA): Harvard University Press.

Gevers W., Lammertyn J., Notebaert W., Verguts T., Fias W. (2005), *Automatic Response Activation of Implicit Spatial Information. Evidence from the SNARC Effect*, „Acta Psychologica" 122, 221-233.

Gevers W., Reynvoet B., Fias W. (2003), *The Mental Representation of Ordinal Sequences Is Spatially Organised*, „Cognition" 87, B87-B95.

Gevers W., Reynvoet B., Fias W. (2004). *The Mental Representation of Ordinal Sequences Is Spatially Organised. Evidence from Days of the Week*, „Cortex" 40, 171-172.

Gevers W., Santens S., Dhooge E., Chen Q., Van den Bossche L., Fias W., Verguts T. (2010), *Verbal-Spatial and Visuo-Spatial Coding of Number-Space Interactions*, „Journal of Experimental Psychology. General" 139, 180-190.

Giaquinto M. (2001), *Knowing Numbers*, „The Journal of Philosophy" 98(1), 5-18.

Harder P. (2003), *Mental Spaces. Exactly When Do We Need Them*, „Cognitive Linguistics" 14(1), 91-99.

Hauser M., Carey S. (2003), *Spontaneous Representations of Small Numbers of Objects by Rhesus Macaques. Examinations of Content and Format*, „Cognitive Psychology" 47, 367-401.

Herrera A., Macizo P., Semenza C. (2008), *The Role of Working Memory in the Association between Number Magnitude and Space*, „Acta Psychologica" 128, 225-237.

Hubbard E. M., Piazza M., Pinel P., Dehaene S. (2005), *Interactions between Number and Space in Parietal Cortex*, „Nature Reviews. Neuroscience" 6, 435-448.
Hung Y., Hung D. L., Tzeng O. J., Wu D. H. (2008), *Flexible Spatial Mapping of Different Notations of Numbers in Chinese Readers*, „Cognition" 106, 1441-1450.
Imbo I., De Brauwer J., Fias W., Gevers W. (2012), *The Development of the SNARC-Effect. Evidence for Early Verbal Coding*, „Journal of Experimental Child Psychology" 111, 671-680.
Ito Y., Hatta T. (2004), *Spatial Structure of Quantitative Representation of Numbers. Evidence from the SNARC Effect*, „Memory and Cognition" 32, 662-673.
Iversen W., Nuerk H. C., Willmes K. (2004), *Do Signers Think Differently? The Processing of Number Parity in Deaf Participants*, „Cortex" 40, 176-178.
Iversen W., Nuerk H.-C., Jäger L., Willmes K. (2006), *The Influence of an External Symbol System on Number Parity Representation or What's Odd About 6?*, „Psychonomic Bulletin and Review" 13, 730-736.
Kinzler K. D., Spelke E. S. (2007), *Core Systems in Human Cognition*, „Progress In Brain Research" 164, 257-264.
Knops A., Thirion B., Hubbard E. M., Michel V., Dehaene S. (2009), *Recruitment of an Area Involved in Eye Movements During Mental Arithmetic*, „Science" 324, 1583-1585.
Krysztofiak W. (1991), *Struktury ontologiczne w modelu hydrodynamiki* [w:] *Rozwój paradygmatu mechaniki klasycznej*, H. Hadryś, W. Krysztofiak, S. Okulski (red.), Szczecin: Uniwersytet Szczeciński, 27-53.
Krysztofiak W. (2012), *Logiczna składnia liczebnika. Studium kognitywistyczne. Część I*, „Filozofia Nauki" 1(77), 59-91.
Lakoff G., Núńez R. E. (2000), *Where Mathematics Comes From*, Basic Books.
Lammertyn J., Fias W., Lauwereyns J. (2002), *Semantic Influences on Feature-Based Attention Due to Overlap of Neural Circuits*, „Cortex" 38, 878-882.
Le Corre M., Carey S. (2007), *One, Two, Three, Four, Nothing More. An Investigation of the Conceptual Sources of the Verbal Counting Principles*, „Cognition" 105, 395-438.
Lindemann O., Alipour A., Fischer M. H. (2011), *Finger Counting Habits in Middle-Eastern and Western Individuals. An Online Survey*, „Journal of Cross-Cultural Psychology" 42, 566-578.
Lindemann O., Abolafia J. M., Pratt J., Bekkering H. (2008), *Coding Strategies in Number Space. Memory Requirements Influence Spatial-Numerical Associations*, „The Quarterly Journal of Experimental Psychology" 61, 515-524.
Lipton J. S., Spelke E. S. (2003), *Origins of Number Sense. Large-Number Discrimination in Human Infants*, „Psychological Science" 14, 396-401.
Marr, D. (1982), *Vision. A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*, New York (NY): Freeman.
Meck W. H., Church R. M. (1983), *A Mode Control Model of Counting and Timing Processes*, „Journal of Experimental Psychology. Animal Behavior Processes" 9, 320-334.
Moyer R. S., Landauer T. K. (1967), *Time Required for Judgments of Numerical Inequality*, „Nature" 215, 1519-1520.
Naccache L., Dehaene S. (2001), *The Priming Method. Imaging Unconscious Repetition Priming Reveals an Abstract Representation of Number in the Narietal Lobes*, „Cerebral Cortex" 11, 966-974.
Nieder A., Merten K. (2007), *A Labeled-Line Code for Small and Large Numerosities in the Monkey Prefrontal Cortex*, „Journal of Neuroscience" 27, 5986-5993.
Nieder A., Miller E. K. (2003), *Coding of Cognitive Magnitude. Compressed Scaling of Numerical Information in the Primate Prefrontal Cortex*, „Neuron" 37, 149-157.

Nieder A., Miller E. K. (2004), *A Parieto-Frontal Network for Visual Numerical Information in the Monkey*, „Proceedings of National Academy of Science, USA" 101, 7457-7462.

Nuerk H.-C., Wood G., Willmes K. (2005), *The Universal SNARC Effect. The Association Between Number Magnitude and Space is Amodal*, „Experimental Psychology" 52, 187-194.

Patro K., Haman M. (2012), *The Spatial-Numerical Congruity Effect in Preschoolers*, „Journal of Experimental Child Psychology" 111(3), 534-542.

Piazza M., Izard V., Pinel P., Le Bihan D., Dehaene S. (2004), *Tuning Curves for Approximate Numerosity in the Human Intraparietal Sulcus*, „Neuron" 44, 547-555.

Piazza M., Pinel P., Le Bihan D., Dehaene S. (2007), *A Magnitude Code Common to Numerosities and Number Symbols in Human Intraparietal Cortex*, „Neuron" 53, 293-305.

Platt J. R., Johnson D. M. (1971), *Localization of Position within a Homogenous Behavior Chain. Effects of Error Contingencies*, „Learning and Motivation" 2, 386-414.

Priftis K., Zorzi M., Meneguello F., Marenzi R., Umiltŕ C. (2006), *Explicit versus Implicit Processing of Representational Space in Neglect. Dissociations in Accessing the Mental Number Line*, „Journal of Cognitive Neuroscience" 18, 680-688.

Proctor R. W., Cho Y. S. (2006), *Polarity Correspondence. A General Principle for Performance of Speeded Binary Classification Tasks*, „Psychological Bulletin" 132, 416-442.

Restle, F. (1970), *Speed of Adding and Comparing Numbers*, „Journal of Experimental Psychology" 95, 437-444.

Roggeman C., Santens S., Fias W., Verguts T. (2011), *Stages of Nonsymbolic Number Processing in Occipitoparietal Cortex Disentangled by fMRI Adaptation*, „The Journal of Neuroscience" 31, 7168-7173.

Roggeman C., Verguts T., Fias W. (2007), *Priming Reveals Differential Coding of Symbolic and Nonsymbolic Quantities*, „Cognition" 105, 380-394.

Roitman J. D., Brannon E. M., Platt M. L. (2007), *Monotonic Coding of Numerosity in Macaque Lateral Intraparietal Area*, „PLoS Biology" 5(8): e208.

Rugani R., Kelly D. M., Szelest I., Regolin L., Vallortigara G. (2010), *Is It Only Humans That Count from Left to Right?*, „Biology Letters" 6, 290-292.

Rusconi E., Kwan B., Giordano B., Umiltà, C., Butterworth B. (2006), *Spatial Representation of Pitch Heigh. The SMARC Effect*, „Cognition" 99, 113-129.

Santens S., Roggeman C., Fias W., Verguts T. (2010), *Number Processing Pathways in Human Parietal Cortex*, „Cerebral Cortex", 20, 77-88.

Schwarz W., Keus I. (2004), *Moving the Eyes along the Mental Number Line. Comparing SNARC Effects with Manual and Saccadic Responses*, „Perception and Psychophysics" 66, 651-664.

Schwarz W., Müller, D. (2006), *Spatial associations in number-related tasks: A comparison of manual and pedal responses*, „Experimental Psychology" 53, 4-15.

Shaki S., Fischer M. H. (2008), *Reading Space into Numbers. A Cross-Linguistic Comparison of the SNARC Effect*, „Cognition" 108, 590-599.

Shaki S., Fischer M. H., Petrusic W. M. (2009), *Reading Habits for Both Words and Numbers Contribute to the SNARC Effect*, „Psychonomic Bulletin & Review" 16, 328-331.

Shaki S., Petrusic W. M. (2005), *On the Mental Representation of Negative Numbers. Context-Dependent SNARC Effects with Comparative Judgments*, „Psychonomic Bulletin Review" 12(5), 931-937.

Siegler R. S., Booth J. L. (2004), *Development of Numerical Estimation in Young Children*, „Child Development" 75, 428-444.

Siegler R. S., Opfer J. E. (2003), *The Development of Numerical Estimation. Evidence for Multiple Representations of Numerical Quantity*, „Psychological Science" 14, 237-243.

Spelke E. S., Kinzler K. D. (2007), *Core Knowledge*, „Developmental Science" 10(1), 89-96.
Tlauka M. (2002), *The Processing of Numbers in Choice-Reaction Tasks*, „Australian Journal of Psychology" 54, 94-98.
Trick L., Pylyshyn, Z. W. (1994), *Why Are Small and Large Numbers Enumerated Differently? A Limited Capacity Preattentive Stage in Vision*, „Psychology Review" 101, 80-102.
Vallesi A., Binns M. A., Shallice T. (2008), *An Effect of Spatial-Temporal Association of Response Codes. Understanding the Cognitive Representations of Time*, „Cognition" 107, 501-527.
Van Dijck J.-P., Gevers W., Fias W. (2009), *Numbers are Associated with Different Types of Spatial Information Depending on the Task*, „Cognition" 113, 248-253.
Van Dijck J.-P., Fias W. (2011), *A Working Memory Account for Spatial-Numerical Associations*, „Cognition" 119, 114-119.
Van Galen M. S., Reitsma P. (2008), *Developing Access to Number Magnitude. A Study of the SNARC Effect in 7- to 9-Year-Olds*, „Journal of Experimental Child Psychology" 101, 99-113.
Verguts, T., Fias W. (2004), *Representation of Number in Animals and Humans. A Neural Model*, „Journal of Cognitive Neuroscience" 16, 1493-1504.
Verguts T., Fias W. (2008), *Symbolic and Nonsymbolic Pathways of Number Processing*, „Philosophical Psychology" 21(4), 539-554.
Walsh V. (2003), *A Theory of Magnitude. Common Cortical Metrics of Time, Space and Quantity*, „Trends in Cognitive Sciences" 7, 483-488.
Whalen J., Gallistel C. R., Gelman R. (1999), *Nonverbal Counting in Humans. The Psychophysics of Number Representation*, „Psychological Science" 10, 130-137.
Wood G., Willmes K., Nuerk H.-C., Fischer M. (2008), *On the Cognitive Link between Space and Number. A Meta-Analysis of the SNARC Effect*, „Psychology Science Quarterly" 50(4), 489-525.
Xu F., Spelke E. S. (2000), *Large Number Discrimination in 6-Month Old Infants*, „Cognition" 74, B1-B11.
Yoshimi J. (2007), *Mathematizing Phenomenology*, „Phenomenology and the Cognitive Science" 6, 271-291.
Zebian S. (2005), *Linkages between Number Concepts, Spatial Thinking, and Directionality of Writing. The SNARC Effect and the REVERSE SNARC Effect in English and Arabic Monoliterates, Biliterates, and Illiterate Arabic Speakers*, „Journal of Cognition and Culture", 5, 165-190.
Zhou X., Chen C., Chen L., Dong Q. (2008), *Holistic or Compositional Representation of Two-Digit Numbers? Evidence from the Distance, Magnitude, and SNARC Effects in a Number-Matching Task*, „Cognition" 106, 1525-1536.
Zorzi M., Butterworth B. (1999), *A Computational Model of Number Comparison* [w:] *Proceedings of the Twenty First Annual Conference of the Cognitive Science Society*, M. Hahn, S. C. Stoness (red.), Mahwah (NJ): Erlbaum, 778-783.