Piotr Markiewicz

Georga Cantora filozofia nieskończoności = Georg Cantor's Philosophy of Infinity

Humanistyka i Przyrodoznawstwo 10, 51-68

2004

Piotr Markiewicz

Instytut Filozofii
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
w Olsztynie

Institute of Philosophy
University of Warmia and Mazury
in Olsztyn

GEORGA CANTORA FILOZOFIA NIESKOŃCZONOŚCI

Georg Cantor's Philosophy of Infinity

Słowa kluczowe: nieskończoność, teoria mnogości, Cantor.

Streszczenie

Artykuł podejmuje kwestię pozaformalnej filozofii nieskończoności w wydaniu Georga Cantora. Podstawowa teza artykułu wyraża przekonanie, że znajomość kontrowersji wokół nieaksjomatycznego pojęcia nieskończoności pozwala na lepszy wgląd w procedury formalne w teorii mnogości. Cantorowską filozofię nieskończoności wyrażają trzy zasady heurystyczne: (1) zasada aktualnej nieskończoności – każda ściśle stosowana matematycznie nieskończoność potencjalna (zmienna wielkość skończona, dziedzina niekompletna) zakłada nieskończoność aktualną (stały zakres zmienności uprzednio określony względem zmiennych); (2) zasada finityzmu - matematyzacja pojęcia nieskończoności wymaga jego finityzacji, poprzez (a) wprowadzenie jednorodnego ontycznie statusu wszystkich dopuszczonych matematycznie zbiorów, (b) ustalenie, że wszystkie takie zbiory posiadają charakterystykę liczbową (arytmetyczną); (3) zasada absolutnej nieskończoności – istnieją mnogości, które nie

Key words: infinity, set theory, Cantor.

Abstract

The article treats of Georg Cantor's idea of nonformal philosophy of infinity. The main argument here is that the knowledge of controversy around the non-axiomatic definition of infinity allows for a better insight into formal procedures in the set theory. Cantorian philosophy of infinity is expressed by three heuristic principles: (1) the actual infinity principle, whereby each mathematically applicable potential infinity (a variable finite number, incomplete domain) assumes the existence of actual infinity (the variability extent is constant, defined for the variables); (2) the principle of finitism - the notion of infinity requires its finitisation if it is to be matematicised. This can be achieved by (a) introducing an ontically uniform status for all permissible mathematical sets, (b) determining that all such sets have a numerical (arithmetical) profile; (3) the principle of absolute infinity, whereby there exist such magnitudes that are not sets i.e. they are not mathematically permissible entities and do

są zbiorami, tzn. nie są dopuszczonymi matematycznie obiektami i nie posiadają pełnej charakterystyki liczbowej (mogą natomiast występować w dowodach nie wprost jako pewne określone obiekty) i które wyznaczają granice matematyzacji pojęcia nieskończoności.

not have a full numerical profile. However, they can appear in proofs formulated indirectly as certain objects. They delimit the extent to which the notion of infinity can be matematicised.

Uwagi wstępne*

Teoria mnogości (TM) jest m.in. matematyczną teorią zbiorów nieskończonych. Dokonania wielu matematyków z tej dziedziny zmieniły na zawsze treść pojęcia nieskończoności. Okazało się, że nieskończoność może być przedmiotem analiz i procedur formalnych, a nie tylko efektem magicznych spekulacji w stylu Hegla. Obecnie TM funkcjonuje w zaawansowanym stadium aksjomatycznym i dla wielu jest niedostępna. Wszelako TM to także zbiór przyjmowanych założeń filozoficznych oraz historyczne już stadium przedaksjomatyczne. Właśnie na poziomie filozofii i stadium intuicyjnego można znaleźć intrygujące dane, które korelują z problemami teorii mnogości w stadium aksjomatycznym. Twórca teorii mnogości, Georg Cantor, był nie tylko zawodowym matematykiem, lecz także filozofem[1]. Zwłaszcza jego późniejsze prace, te z zakresu teorii mnogości, zawierają liczne komentarze filozoficzne i historyczno-filozoficzne, które nie stanowią jedynie erudycyjnych ilustracji. Szczegółowa analiza wskazuje bowiem na wzajemne powiązania aspektu matematycznego z aspektem filozoficznym. W pracy z 1883 roku, zawierającej systematyczny wykład pozaskończonej teorii mnogości, przedstawił własne stanowisko w sprawie pojęcia aktualnej nieskończoności w matematyce[2]. Stanowisko to (także na podstawie późniejszych prac)

* Chciałbym bardzo podziękować Panu Profesorowi Romanowi Murawskiemu z Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu za nieocenione uwagi, które znacząco wyklarowały wywód niniejszej pracy.

[1] Najdobitniej w tej kwestii wyraził się G. PRIEST (*Beyond the Limits of Thought*, Cambridge 1995, s. 125): „Cantor was not a philosopher in the way that all the people we have so far met were. However, his contribution to our understanding of the infinite was, perhaps, greater than any other person before or since; almost single-handedly he found an intricate and beautiful form in an area that had hitherto been thought formless". Na temat Cantorowskiej filozofii zob. R. MURAWSKI, *G. Cantora filozofia teorii mnogości*, „Studia Filozoficzne" 1984, nr 11–12, s. 75–87; I. GRATTAN-GUINNESS (*Georg Cantor's Influence on Bertrand Russell*, „History and Philosophy of Logic"1980, nr 1, s. 61–93, zwłaszcza s. 84–87). E. HUSSERL (*Idee czystej fenomenologii i fenomenologicznej filozofii*, tłum. D. Gierulanka, Warszawa 1967, s. 326) dopuszcza nazwanie G. Cantora „fenomenologiem" ze względu na wypracowanie podstawowych (ejdetycznych) pojęć teorii mnogości.

[2] We wstępie do tej pracy, zatytułowanej *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten* (pominiętym przez E. Zermelo w wydaniu z roku 1932 prac zebranych G. CANTORA – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts mit erläuternden Anmerkungen sowie mit*

można przedstawić za pomocą trzech zasad: aktualnej nieskończoności, finityzmu i absolutnej nieskończoności[3].

1. Zasada aktualnej nieskończoności

Zasadę aktualnej nieskończoności albo zasadę dziedziny wyraża formuła: badania z zakresu matematyki (teorii mnogości) dotyczą określonej, pełnej dziedziny; każda inna dziedzina jest odniesiona do dziedziny badanej; nieskończoność potencjalna nie tworzy pełnej dziedziny, stąd zakłada nieskończoność aktualną[4]. Nieskończoność potencjalna [NP] w takim rozumieniu to: (a) nieokreślona zmienna wielkość skończona rosnąca lub malejąca względem skończonej granicy, (b) ogólnie – wielkość nieokreślona, dopuszczająca niezliczoną ilość określeń[5], (c) pomocnicze lub relatywne (relacyjne) pojęcie, które zawsze wskazuje na bardziej podstawowe pojęcie *transfinitum* (warunek ontyczny i epistemiczny dla pojęcia nieskończoności potencjalnej)[6], (d) przedstawienie czysto subiektywne (wyobrażenie), które nie jest adekwatną ideą i przez to nie ma statusu bytu[7]. Natomiast nieskończoność aktualna [NA] to określone stałe kwantum we wszystkich swoich momentach strukturalnych, przekraczające każdą wielkość skończoną tego samego rodzaju wielkości[8]. W dziedzinie nieskończoności aktualnej Cantor wyróżnia: (1a) NA niepowiększalną (absolut), (2b) NA powiększalną (pozaskończoność), (2) realizację NA w: (a) Bogu, (b) świecie fizycznym,

---

Ergänzugen aus dem Briefwechsel Cantor - Dedekind, Berlin; reprint Berlin Heidelberg-New York 1980) Cantor wyraźnie zaznaczył ścisłe powiązania matematyki i filozofii. Por. J. DAUBEN, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge 1979, s. 120.

[3] Propozycja przedstawiania filozofii nieskończoności G. Cantora za pomocą trzech zasad pochodzi z pracy M. HALLETA (*Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford 1984), jednak formuły dla zasad i szczegóły prezentacji są propozycją interpretacyjną autora niniejszego artykułu. Odniesienia do poszczególnych pism Cantora dotyczą reprintowego wydania z roku 1980.

[4] Zasadę dziedziny sformułował już B. Pascal. Na ten temat pisze M. TILES, *The Philosophy of Set Theory. An Historical Introduction to Cantor's Paradise*, Oxford 1989, s. 32–55.

[5] G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzugen aus dem Briefwechsel Cantor – Dedekind*, red. E. Zermelo, Berlin 1932; reprint Berlin–Heidelberg–New York 1980, s. 401. Nieskończoność potencjalną Cantor wiąże ze słowami „apeiron", „nieskończoność niewłaściwa" („Uneigentliche-Unendliche"), „synkategorematikos".

[6] G. CANTOR, op. cit., s. 391. Nieco dalej (s. 404) potencjalna nieskończoność posiada „nur eine geborgte Realität" i jest dopiero możliwa dzięki aktualnej nieskończoności, na którą wskazuje.

[7] Ibidem, s. 205. Określenie to nawiązuje wyraźnie do odpowiednich koncepcji I. Kanta i B. Spinozy.

[8] Ibidem, s. 401. Nieskończoność aktualna wchodzi w związek znaczeniowy z „aforismenon". Przykładem tego rodzaju nieskończoności jest ogół wszystkich skończonych liczb całkowitych dodatnich, *Ding für sich* niezależna od sekwencji liczb. Niewątpliwie część druga powyższego określenia nawiązuje do B. Bolzana określeń wielkości nieskończonej.

(c) matematyce (myśl *in abstracto*)[9]. Argument dopuszczający zasadę dziedziny jest następujący: (1) założenie: niezbędność stosowania wielkości potencjalnie nieskończonych (wielkości zmiennych) w matematyce, (2) zastosowanie wielkości zmiennej w badaniach matematycznych wymaga uprzedniego zdefiniowania dziedziny zmienności tej wielkości, (3) dziedzina zmienności nie może być sama czymś zmiennym, w przeciwnym razie zabrakłoby stałej podstawy badań, (4) *ergo* 1: dziedzina zmienności jest pewnym określonym aktualnie nieskończonym zbiorem wartości, (5) *ergo* 2: każda ściśle stosowana matematycznie nieskończoność potencjalna zakłada nieskończoność aktualną[10].

Zasada dziedziny spotkała się z merytoryczną reakcją w literaturze przedmiotu. Komentarze i dyskusje można streścić następująco: 1. Motywacja zasady dziedziny [ZD] została przeprowadzona *post hoc* wobec faktu praktyki matematycznej i konieczności ugruntowania klasycznej matematyki. 2. ZD nie jest warunkiem koniecznym badań matematycznych, gdyż intuicjoniści (np. Brouwer) zaprezentowali sposoby analizy z wykluczeniem ekstensjonalnie określonych zbiorów aktualnie nieskończonych, stąd upada pragmatyczne uzasadnienie ZD. Dla intuicjonistów (Weyl, Brouwer) nie istnieje określona dziedzina pozaskończoności, gdyż istnieją tylko procesy (ciągi) matematyczne. *Ad vocem* można zauważyć, że ówczesna praktyka badań matematycznych została uporządkowana przez ZD. 3. ZD jest konsekwencją Cantora stanowiska realistycznego na temat pojęć i przedmiotów: pojęcie przedmiotu x z klasy X wyznacza aktualne istnie-

[9] Stanowisko twórcy teorii mnogości wykracza poza tradycyjne (arystotelesowsko-scholastyczne) pojęcie nieskończoności lokowane w sferze bytu potencjalnego i bytu absolutnego. W aparaturze pojęciowej podejścia tradycyjnego nie mieściło się uznanie pojęcia powiększalnej nieskończoności aktualnej oraz pojęcia pozaskończoności aktualnej realizowanej w świecie fizycznym. Zasługą Cantora było wprowadzenie tych pojęć. Inną sprawą jest argumentacja na rzecz sensowności tych nowych pojęć: o ile matematyczna pozaskończoność aktualna została przyjęta i uznana, o tyle argumenty za realizacją pozaskończoności aktualnej w świecie fizycznym (np. z istnienia eteru, atomów Demokryta) nie mogą być brane poważnie pod uwagę ze względu na współczesny rozwój teorii fizycznych. Natomiast koncepcja realizacji nieskończoności aktualnej *in Deo*, poza kwestią zarzutu panteizmu, została przyjęta w pewnych kręgach teologicznych. Poza tym rozwój myśli Cantora w sprawie absolutnej nieskończoności dopuszcza stwierdzenie, że ostatecznie w Bogu nie realizuje się nieskończoność aktualna, lecz potencjalna nieskończoność absolutna. Takie rozstrzygnięcie spowodowało, że A. MOORE (*Krótka historia nieskończoności*, „Świat Nauki" 1995, nr 6, s. 31) i P. MADDY (*Proper Classes*, „The Journal of Symbolic Logic" 1983, nr 48, s. 114) zaczęli doszukiwać się poparcia w pracach Cantora arystotelesowskiego stanowiska, że prawdziwa nieskończoność nie może być nieskończonością aktualną (lub że pełna nieskończoność jest sprzeczna). Trudności z pogodzeniem w obrębie pozaskończoności aktualnej jej stałości strukturalnej i jednoczesnej jej powiększalności wyraża współcześnie przyjmowana w teorii mnogości zasada domknięcia.

[10] G. CANTOR, op. cit., s. 410–411. Tłumaczenie argumentu Cantora przedstawił R. MURAWSKI (*Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 2003, s. 171), przy czym oddaje termin „Gebiet" przez „zakres" (co koreluje ze współczesnym „zakresem zmiennej"), a „Wertmenge" przez „zbiór".

nie klasy X.[11] 4. ZD w sformułowaniu Cantora stosuje się tylko do zmienności wielkości (np. do pierwszych pozaskończonych liczb porządkowych ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ...), lecz nie precyzuje wartości zmiennej w ogóle, stąd należałoby sformułować ZD bardziej ogólnie: każda wielkość zmienna zakłada dziedzinę własnej zmienności[12]. 5. System Zermela-Fraenkla (ZF) osłabia *implicite* zasadę dziedziny, ponieważ w systemie tym zmienne przebiegają wszystkie zbiory i jednocześnie zbiór uniwersalny jest wykluczony przez aksjomaty (przy tym w ZF występuje założenie kolekcji wszystkich zbiorów V). System von Neumanna również ogranicza ZD: zmienne przebiegają dziedzinę wszystkich kolekcji (I- i II-obiektów), a całość wszystkich obiektów V' (kolekcja wszystkich zbiorów i klas) nie istnieje na gruncie tego systemu. *Ergo*: istnienie dziedziny zmienności nie może być udowodnione w systemach ZF i NBG[13]. 6. Tworzenie zbioru z mnogości elementów dokonuje się wówczas, gdy zakres zmienności mnogości jest w pewnym sensie intuicyjny; uzyskanie takich zakresów umożliwiają intuicyjne pojęcia (własności definiujące), dostarczające podstaw dla idealizującego opisu (lub idealizacyjnego zebrania elementów w kolekcję) wszystkich obiektów mnogości tworzących ekstensję pojęcia (przy czym wiadomo, które obiekty podpadają pod określone pojęcia)[14]. Opis nieskończonych zakresów zakłada nieskończoną intuicję (idealizację), ściśle jednak biorąc dopuszczalne są tylko skończone zakresy i pozaskończona iteracja operacji intuicyjnej idealizacji poszczególnych zakresów (w tym selekcja wyróżnionych elementów z całości mnogości)[15].

Na podstawie zaprezentowanego materiału można zauważyć, że: (1) ZD stanowi właściwie pewną matematyczną wersję dyskusji z szeroko pojętym wariabilizmem; wynik uzyskany przez Cantora jest podobny do ogólnego stwierdzenia, że każda zmienność wymaga w jej opracowaniu jakiegoś stałego momentu; (2) Dopuszczone przez Cantora realizacje nieskończoności aktualnej w świecie rzeczywistym i w Bogu prowadzą do pewnych trudności w przypadku ewentualnego zastosowania ZD, ponieważ trzeba byłoby wówczas podać niematematyczne mnogości zmienne; (3) ZD wiąże się z nieformalną zasadą domknięcia, tj. zasadą przechodzenia od nieskończoności potencjalnej do nieskończoności aktualnej (i „dowodem" Dedekinda na *Gedankenwelt*), która występuje

---

[11] M. Hallett, op. cit., s. 27–29.

[12] I. Jané, *The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set*, „Erkenntnis" 1995, nr 42, s. 385–386.

[13] G. Priest, op. cit., s. 175.

[14] Inaczej: każde intuicyjne pojęcie określa intuicyjny zakres zmienności i wraz z tym tworzy zbiór.

[15] H. Wang, *The Concept of Sets*, [w:] P. Benacerraf, H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge 1983, s. 531.

u podstaw aksjomatu nieskończoności; sens tej zasady polega na domknięciu danej rodziny zbiorów ze względu na zadane operacje teoriomnogościowe. Mówiąc nieformalnie, dany zbiór Z jest zamknięty ze względu na daną funkcję (operację), gdy zarówno argumenty, jak i wartości funkcji należą do Z. W ten sposób zbiory iteracyjne (w kumulatywnej hierarchii zbiorów) są zamknięte ze względu na operację sumy zbiorów, gdyż rezultat sumy określonych zbiorów jest sam zbiorem, np.

$\{x\}\cup\{\{x\}\} = \{x, \{x\}\}$ lub $\{x, \{x\}\}\cup\{\{x, \{x\}\}\} = \{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}\}$.

Jakkolwiek wykorzystanie definicji i pojęć formalnych (w tym np. pojęcia dopełnienia zbioru, obrazu zbioru) precyzuje zasadę dziedziny, to jednak ekstrapolacja ZD na problem nieskończoność potencjalna/nieskończoność aktualna wymaga dodatkowych założeń. Zasada ta (oraz zasada domknięcia) zawiera, nawet w formalnym ujęciu, wysoce spekulatywny przeskok znaczeniowy w przypadku odniesienia do wskazanej problematyki.

2. Zasada finityzmu

Cantora wersja zasady finityzmu sprowadza się do następującego sformułowania: matematyzacja pojęcia nieskończoności wymaga jego finityzacji[16]. Procedura finityzacji polega na: (a) traktowaniu wszystkich rodzajów zbiorów (w tym zbiorów nieskończonych) jako prostych obiektów, (b) uznaniu, że wszystkie zbiory nieskończone posiadają podstawowe własności zbieżne z podstawowymi własnościami zbiorów skończonych[17]. Konsekwencją zasady finityzmu jest redukcjonizm teoriomnogościowy (uznanie wszystkich kolekcji matematycznie dopuszczonych za zbiory); w efekcie wszystkie obiekty matematyczne mogą być przez to traktowane jako zbiory (liczby są abstraktami na zbiorach, będącymi zbiorami drugiego i trzeciego rzędu), dalej generowane iteracyjnie ze względu na zadane operacje „tworzenia zbioru". Każdy zbiór

[16] Uwagi na temat zasady finityzmu stanowią próbę systemowego zinterpretowania pewnych wypowiedzi Cantora. Twórca teorii mnogości nie posługiwał się terminem „finityzm". Dopiero w kontekście takich sformułowań (licznych), jak np. „pozaskończoność spokrewniona ze skończonością" (Cantor, op. cit., s. 378), zasada finityzmu zyskuje na doniosłości, porządkując ujęcie myśli Cantora oraz wskazując źródło finityzmu teoriomnogościowego w ogóle. Na temat finityzmu teoriomnogościowego istnieje szereg wypowiedzi, (np. J. Mayberry, *The Consistency Problem for Set Theory: An Essay on the Cantorian Foundations of Mathematics (II)*, „The British Journal for the Philosophy of Science" 1977, nr 28, s. 137–141, 148; *A New Begriffsschrift (I), (II)*, „The British Journal for the Philosophy of Science", 31, s. 250), M. Hallett (op. cit., s. 32–40). M. Tiles (op. cit., s. 6–31) wyróżnia: (1) ścisły finityzm (wykluczenie wszelkich infinitystycznych pojęć i metod), (2) klasyczny finityzm (uznanie wyłącznie nieskończoności potencjalnej w matematyce i co za tym idzie, stosownych metod).

[17] M. Hallett, op. cit., s. 32.

(skończony, pozaskończony) dopuszczony przez pewnik abstrakcji (aksjomat wyróżniania w systemach aksjomatycznych) jest kolekcją $\{x: \phi(x)\}$ elementów spełniających pewien predykat ϕ i w procedurze iterowania może być elementem (prostym obiektem) innego zbioru, przy czym zasada ekstensjonalności pomija jednostkową intensję określonego predykatu. W ten sposób zarówno zbiory skończone, jak i zbiory nieskończone tworzą jedną dziedzinę, w której każdy przedmiot jest prostym obiektem z możliwością bycia elementem zbioru wyższego rzędu[18].

Pomimo zaznaczonych przez Cantora różnic pomiędzy zbiorami skończonymi i pozaskończonymi obie dziedziny posiadają wspólną własność istotną: liczbowe określenie (warunek dopuszczalności matematycznej)[19]. Zasługą Cantora było przedstawienie nie tylko określeń pojęcia liczby pozaskończonej, lecz także podanie kompletnej arytmetyki dla pozaskończonych liczb porządkowych i kardynalnych. Przy tym liczby pozaskończone stanowią rezultat generalizacji na liczbach skończonych i abstrakcji określonych momentów przedmiotowych. W konsekwencji wersje Cantora zasady finityzmu są nastepujące: (1) ontologiczna – wszystkie zbiory to proste przedmioty poddane procedurze iterowania, (2) epistemologiczna – wszystkie zbiory są determinowalne pojęciowo w odróżnieniu od sprzecznych wielkości absolutnych, (3) matematyczna – wszystkie zbiory posiadają charakterystykę liczbową (arytmetyczną), (4) teologiczna – wszystkie zbiory są skończone w odniesieniu do bytu Absolutnego. Natomiast rodzaje finityzmu teoriomnogościowego mogą być następujące: (1) negacja tego, co nieskończone (absolutne) i pozaskończone (matematyczne) w systemach; uznanie tego, co nieskończone za niematematyzowalne zupełnie lub częściowo (aspektywnie); (2) ograniczenie tego, co nieskończone (pozaskończone) w aspekcie merytorycznym (intersubiektywność), dydaktycznym (prostsza systematyzacja wykładu teorii), mentalnym (naoczność intelektualna, intuicja), syntaktycznym („pozaskończoność" zamiast „nieskończoności"), itd.; (3) ograniczenie tego, co nieskończone przez zastosowanie stałej dziedziny zmienności, np. dla nieskończoności potencjalnej; (4) zastąpienie pewnika abstrakcji aksjomatem wyróżniania, ogólnie: aksjomatyczne zawieszenie istnienia klas właściwych oraz wprowadzenie koncepcji ograniczenia rozmiaru zbioru; (5) dopuszczenie operacji matematycznych na skończonych obiektach przy jednoczesnym uznaniu „wypowiedzi infinitystycznych" za pewnego rodzaju idee regulatywne (pojęcia idealne); (6) stwierdzenie, że kondycja epistemiczna podmiotu ludzkiego wyklucza adekwatne ujęcie nieskończoności aktualnej (brak odpowiednich danych wraże-

[18] Ibidem, s. 39.
[19] G. CANTOR, op. cit., s. 176.

niowych, definicyjne ograniczanie poznawanej treści przez intelekt)[20]; (7) uznanie ontycznej jednorodności dziedziny zbiorów i uniwersalności operacji teoriomnogościowych; (8) stwierdzenie, że przypadki skończony i nieskończony w matematyce są wzajemnie sprowadzalne, a stąd wystarczy badać przypadek pierwszy. Wyróżnione wersje finityzmu wiążą się z różnymi koncepcjami mnogościowymi, np. (3), (7) Cantora, (4) Zermela, (5) Hilberta, (6) Brouwera, (8) Wittgensteina.

Jakkolwiek sformułowana, zasada finityzmu dostarcza istotnej informacji o granicach operowania pojęciem nieskończoności. Nie oznacza to jednak równoczesnej eliminacji pojęcia nieskończoności z teorii mnogości (wersje umiarkowane). Sugeruje najwyżej zachowanie pewnej ostrożności metodologicznej w stosowaniu pojęcia nieskończoności. Wydaje się, że u podstaw takiego stanu rzeczy tkwi informacja o antynomialnym charakterze niekontrolowanego stosowania nieskończoności w badaniach naukowych. Poza tym wprowadzenie zasady finityzmu wiąże się z pewnym aspektem natury pragmatycznej. Po prostu łatwiej jest operować pojęciem nieskończoności w przypadku zachowania ścisłych analogii z pojęciem skończoności (czego przykładem jest np. arytmetyka liczb pozaskończonych)[21].

Granice operowania pojęciem nieskończoności ilustruje również zasada absolutnej nieskończoności.

3. Zasada absolutnej nieskończoności

Zasada absolutnej nieskończoności może być sformułowana następująco: istnieją mnogości, które nie są zbiorami, tzn. nie są prostymi obiektami i nie posiadają pełnej charakterystyki arytmetycznej, mogą natomiast występować

---

[20] Interesująca w tej kwestii jest wypowiedź A. Tarskiego (*Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, [w:] tegoż, *Pisma logiczno-filozoficzne*, red. J. Zygmunt, t. 1, Warszawa 1995, s. 140): „[...] język, będąc wytworem działalności ludzkiej, nosi z konieczności »finitystyczny« charakter i nie może służyć jako adekwatne narzędzie do badania faktów lub konstruowania pojęć natury wybitnie »infinitystycznej«".

[21] O analogii pomiędzy skończonością a nieskończonością w matematyce pisze np. A. Abian (*Passages between Finite and Infinite*, „Notre Dame Journal of Formal Logic" 1978, nr 19, s. 452–456). Autor zauważa (wychodząc z teorii grup), że: (1) zbiory nieskończone i operacje nieskończone powstają wskutek generalizacji pojęć zbioru skończonego i operacji skończonej; (2) nieintuicyjna natura pojęcia nieskończoności wywołuje tendencję do posługiwania się dziedziną skończonego w badaniach dotyczących nieskończoności; (3) możliwość przechodzenia od dziedziny skończoności do dziedziny nieskończoności (i *vice versa*) utrzymuje pojęcie nieskończoności w matematyce. Abian podaje przykład takiego przechodzenia: powiązanie zbioru nieskończonego S z pojedynczym zbiorem skończonym L(S), będącym poziomem indeksującym S, np. zbiór {1/2, 1/3, 1/4,...} odpowiada poziomowi L(S)={0}.

w dowodach nie wprost jako pewne niekompletne obiekty, i które wyznaczają granice matematyzacji pojęcia nieskończoności[22].

Do odziedziczonych z tradycji filozoficzno-teologicznej (zwłaszcza po racjonalistach nowożytnych) dziedzin tego, co skończone i tego, co nieskończone (absolutne), dodał Cantor dziedzinę bytu pozaskończonego (*transfinitum*), dziedzinę – jak sam mawiał – idealnych badań[23]. W ten sposób rozstrzygnął, występującą nie tylko od czasów nowożytnych, problematykę granicy skończone-nieskończone (absolutne) poprzez ustalenie, że to pozaskończone wielkości formują idealną granicę (zakres) dla bytu skończonego, natomiast absolut, pozbawiony dotychczasowej funkcji, występuje jako nierosnące maksimum kwantytatywne. Przy czym dziedzina pozaskończoności w różnych postaciach wskazuje z konieczności na absolut – prawdziwą nieskończoność[24]. Pojęcie nieskończoności absolutnej posiada w pismach Cantora szereg historycznych i merytorycznych aspektów, zaangażowane jest również w biografii twórcy teorii mnogości. Poza funkcją wyjaśniającą niektóre zamierzenia Cantora dostarcza informacji o naturze przedmiotu badań współczesnej teorii mnogości, w szczególności o jej uniwersum jako nie-zbiorze[25]. Pomimo wyraźnego odniesienia teologicznego stanowi ważny problem dla każdej teorii podstaw matematyki (teorii mnogości). Przede wszystkim koncepcja absolutnej nieskończoności wskazuje na możliwość odrzucenia zakorzenionych przekonań, w myśl których system Cantora jest systemem sprzecznym. Nadto koncepcja ta stanowi źródło strategii unikania antynomii teoriomnogościowych.

Z tekstów Cantora można wydobyć następujące określenia absolutu (nieskończoności absolutnej): (1) prawdziwa nieskończoność istniejąca w Bogu i nie dopuszczająca jakiejkolwiek determinacji[26]; (2) to, co może być tylko rozpozna-

---

[22] Sformułowanie zasady absolutnej nieskończoności różni się zasadniczo (podobnie jak sformułowanie dwóch innych zasad) od propozycji M. Halletta (op. cit., s. 9), według którego zasada ta sprowadza się do niemożliwości matematycznego określenia absolutnej nieskończoności.

[23] Wyraźnie i bez uciekania się do komplikujących szczegółów przedstawił tę sprawę P. Clayton (*The Theistic Argument from Infinity in Early Modern Philosophy*, „International Philosophical Quarterly" 1996, nr 36, s. 5-17).

[24] G. Cantor, op. cit., s. 405.

[25] I. Jané, op. cit., s. 375.

[26] G. Cantor, op. cit., s. 175. W dyskusji z Leibnizem i Spinozą w sprawie możliwości istnienia liczb nieskończonych Cantor zgadza się co do jednego: prawdziwa nieskończoność jest całkowicie niedeterminowalna ilościowo i w ten sposób *omnis determinatio est negatio* obowiązuje przy określeniach absolutu (ibidem, s. 176). W liście do Younga, 20 VI 1908 (J. Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge 1979, s. 290), można znaleźć następujące określenie Boga: „to, co przekracza dziedziny skończonego i pozaskończonego (*Actus Purissimus*) nie jest żadnym „Rodzajem Najwyższym", jest natomiast prostą, zupełnie indywidualną jednością, w której wszystko się zawiera i która zawiera „absolut", niepojęty dla ludzkiego rozumienia".

ne, lecz nie poznane, nawet w przybliżeniu; absolutnie nieskończony ciąg liczb jest właściwym symbolem absolutu[27]; (3) to, co nie może być dalej powiększane lub doskonalone (podobnie jak w przypadku „absolutu" w metafizyce)[28]; (4) aktualna nieskończoność niepowiększalna w aspekcie istoty i przez to matematycznie niedeterminowalna[29]; (5) aktualna nieskończoność realizująca się w Bogu[30]; (6) nieskończoność wieczna niestworzona (*Infinitum aeternum increatum sive Absolutum*), dotycząca Boga i Jego atrybutów, w przeciwieństwie do nieskończoności stworzonej (*Infinitum creatum sive Transfinitum*), czyli pozaskończoności[31]; (7) niepowiększalna nieskończoność aktualna w odróżnieniu od powiększalnej nieskończoności aktualnej – pozaskończoności[32]; (8) nieaktualna absolutna mnogość, której elementy nie koegzystują, a przez to (*a fortiori*) nie mogą być zebrane w kompletny zbiór[33]; (9) sprzeczna wielość, w przypadku której założenie o „byciu razem" wszystkich jej elementów pro-

---

[27] G. CANTOR, op. cit., s. 205. G. PRIEST (op. cit., s. 129), komentując określenie (2), stwierdza: „Read in an ungenerous way, this statement is quite self-refuting. If Cantor thinks he can talk about the Absolute, he must at least think it is there to be talked about; and must know, therefore, at least that much about it. And if his own definition [...] does not even give an approximate characterisation of it, then we are at a loss to know what he is talking about". W pewnym sensie można, jak się zdaje, przyznać rację Priestowi, także w tym, że tego typu określenia, podobnie np. (1), (3), (4), (5) stanowią rezultat wpółuformowanych myśli i nie składają się na jakąś znaczącą teorię Absolutu, lecz w żadnym razie nie sposób uznać zacierania przez Priesta różnicy pomiędzy Absolutem i absolutną nieskończonością.

[28] List do Wundta, 5 X 1883 (I. JANÉ, op. cit., s. 387).

[29] G. CANTOR, op. cit., s. 378.

[30] Ibidem. Według Cantora, absolutna nieskończoność jest przedmiotem badań teologii spekulatywnej (dyscyplina ta określa ludzkie możliwości konceptualizacji absolutnej nieskończoności), natomiast dziedzina pozaskończoności należy do metafizyki i matematyki. Za osobliwość recepcji dziejowej można uznać większe zainteresowanie w pewnym okresie teologów i kół katolickich wynikami Cantorowskiej teorii mnogości niż matematyków. Nie bez znaczenia pozostają przy tym etapy zniechęcenia Cantora matematyką i nerwowych załamań wskutek konfliktów (w tym instytucjonalnych i dokumentacyjnych) z innymi matematykami, oraz jego zaangażowanie religijne (np. *Ex Oriente Lux*) i perypetie z hierarchami Kościoła (np. kwestia panteizmu związana z określeniem 6). Na ten temat pisze J. DAUBEN (op. cit., zwłaszcza ss. 143–148, 228–229, 231–232, 274–276, 288–291, 294–295). Nawiązując do Cantora dowodów dotyczących realizacji aktualnej nieskończoności w świecie fizycznym i pewnych wypowiedzi Peirce'a, R. RUCKER (*Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*, New York 1983, s. 90) wysunął przypuszczenie, że ludzkie dusze to ektoplazmowe obiekty, złożone z $\aleph_1$ monad eteralnych (niekiedy pomysły autora są jeszcze bardziej osobliwe).

[31] Ibidem, s. 399.

[32] Ibidem, s. 405. Określenie to stoi w wyraźnej opozycji, zdaniem Cantora, do tradycji scholastycznej, według której każda aktualna nieskończoność (tzn. Bóg) jest niepowiększalna w aspekcie ilości.

[33] List do Hilberta, 6 X 1898 (I. JANÉ, op. cit., s. 389). Sformułowanie (8) prowadzi do pewnych trudności interpretacyjnych w zestawieniu z wypowiedzią Cantora (G. Cantor, op. cit., s. 205), że pojęcie nieskończoności potencjalnej jest pojęciem relacyjnym (*Beziehungsbegriff*) lub przedstawieniem czysto subiektywnym, nie jest natomiast adekwatną ideą i przez to nie ma statusu bytu (*kann ich kein sein zuschreiben*).

wadzi do sprzeczności, inaczej: wielość nie będąca jednością czy „kompletną rzeczą"[34]; (10) sprzeczna wielość, która nie może być pojmowana jako jedna rzecz (przedmiot), nie może być elementem innej wielości (mnogości), nadto nie może być pomyślana jako całość aktualnie istniejąca[35].

Formuły (1)-(10) dopuszczają szereg różnych interpretacji (nawet sprzecznych), jednak najważniejszą sprawą w tym kontekście jest, jak się zdaje, przejście Cantora od pojmowania nieskończoności absolutnej jako przypadku aktualnej nieskończoności (3), (4), (5), (7) do potencjalnej nieskończoności absolutnej (8), (9), (10). Zmiana ta prowadzi do pewnych trudności w zestawieniu sprzecznych potencjalnych idei z aktualnym bytem Boga, choć pozostaje skądinąd w zgodzie z twierdzeniem Cantora, że każda nieskończoność potencjalna wymaga stałej dziedziny swojej zmienności, czyli ostatecznie jakiejś postaci nieskończoności aktualnej. Nadto teoria absolutnej nieskończoności (formuły 1-7) została pierwotnie przedstawiona jako przyjęta z powodów teologicznych metafizyczna doktryna o poza-matematycznym bycie celem powiązania nowej teorii matematycznej nieskończoności z tradycyjną arystotelesowsko-scholastyczną nauką o nieskończoności[36]. Przy okazji dostarczała informacji o granicach matematyzacji pojęcia nieskończoności przez wskazanie takich mnogości, które nie mogą być zbiorami. Pierwotna koncepcja absolutu, obok zmiany wyżej wskazanej, została przekształcona (1899 – list do R. Dedekinda) w teorię absolutnych mnogości i ograniczenia rozmiaru zbioru wobec potrzeby dowodu twierdzenia o alefach (mocach zbiorów dobrze uporządkowanych nieskończonych) oraz wobec konieczności uniknięcia paradoksu Burali-Fortiego. Teoria ta dotyczyła liczb

---

[34] G. Cantor, op. cit., s. 443. Jest to fragment listu do Dedekinda (1899).W oryginale: „Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, daß die Annahme eines »Zusammenseins« *aller* ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so daß es unmöglich ist, die Vielheit als eine Einheit, als »ein fertiges Ding« aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich *absolut unendliche* oder *inconsistente Vielheiten*". W tłumaczeniu na język angielski „fertig" znaczy „ukończony" („finished") (J. Heijenoort, *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879–1931*, Cambridge, Massachusetts 1967, s. 114) lub „skompletowany" („completed") (I. Jané, op. cit., s. 375). W języku polskim słowo to zostało oddane jako „gotowy" (R. Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Poznań 2003, s. 172). Tłumaczenie Murawskiego „Zusammenseins" przez „całość" nie jest pozbawione racji, np. przy uprzednim utożsamieniu całości z aktualnością. W nawiązaniu do określenia absolutu (9). I Jané (op. cit., s. 375) zauważa, że twierdzenie o sprzeczności założenia „bycia razem" wszystkich elementów absolutnej wielości nie jest równoważne twierdzeniu o sprzeczności uznania nieskończoności absolutnej za zbiór. Poza tym, rozróżnienie pomiędzy wielościami sprzecznymi i niesprzecznymi podał już w 1890 roku E. Schröder, pojmując wielość sprzeczną jako sekwencję niezgodnych („verträglich") elementów (J. Heijenoort, op. cit., s. 113).

[35] List do Jourdaine'a, 9 VII 1904 (I. Jané, op. cit., s. 390; M. Hallett, op. cit., s. 286). Określenie (10) sugeruje późniejsze ustalenie J. von Neumanna, że klasa właściwa nie jest elementem innej klasy.

[36] M. Hallett, op. cit. s. XIII.

porządkowych – reprezentantów absolutnej nieskończoności[37]. Strona teologiczna teorii jest o tyle ważna, że umożliwia pogodzenie tezy o wywnioskowaniu istnienia absolutu z rozważań matematycznych z tezą o pozamatematycznym statusie nieskończoności absolutnej[38]. Teza pierwsza znajduje swoje umotywowanie w następujących faktach matematycznych:

1. Zasady generujące dla liczb porządkowych (*Erzeugungsprinzipien*): (a) zasada liczb porządkowych następnikowych – jeżeli α jest liczbą porządkową, to istnieje liczba porządkowa β taka, że $\alpha<\beta$ i nie zachodzi dla żadnego γ: $\alpha<\gamma<\beta$, czyli $\beta=\alpha+1$; (b) zasada liczb porządkowych granicznych – jeżeli A jest zbiorem liczb porządkowych bez największego (ostatniego) elementu, to istnieje liczba porządkowa β taka, że dla każdego $\alpha\in A$, $\alpha<\beta$ i nie istnieje taka γ, że $A<\gamma<\beta$, czyli $\beta=\lim A$[39]. Zasady generowania nie są, ściśle biorąc, zasadami matematycznymi (przy takim sformułowaniu). Absolut pojawia się w wyniku analizy pojęciowej znaczenia zasad i tego, czego one dotyczą: nieograniczoności matematycznej pozaskończoności (podobnie jak w przypadku wnioskowania o istnieniu ω z nieograniczonej dziedziny skończoności). Wszelako przy uwzględnieniu absolutu aktualnego zasady generujące są tylko sugestywną próbą opisu tego, co jest w umyśle Boga, ostatecznie skazaną na niepowodzenie (o tym świadczy np. określenie 2), natomiast przy potencjalnej nieskończoności absolutnej zasady faktycznie generują liczby porządkowe a proces generowania jest potencjalnie nieskończony[40].

[37] Ibidem, s. 9. Zdaniem I. JANÉ (op. cit., s. 377), rozróżnienie pomiędzy zbiorami a mnogościami sprzecznymi jest prostą konsekwencją dystynkcji zbiór-absolut i przez to nie może być uznane za uchylenie paradoksu Burali-Fortiego. Inaczej rzecz stawia M. HALLETT (s. 165) twierdząc, że paradoks wystąpi dopiero wówczas, gdy oznaczy się całą sekwencję liczb porządkowych lub alefów jakąś liczbą porządkową, co w przypadku rozróżnienia Cantora jest niedopuszczalne. Hallett powołuje się przy tym na list twórcy teorii mnogości do Carbonelle (28 XI 1885), w którym absolut (absolutna nieskończoność w Bogu) został wyraźnie odseparowany od teorii liczb. Natomiast G. PRIEST (op. cit., s. 140) stwierdza: „[...] Cantor's theory of the transfinite did not succeed in removing the paradoxes of the infinite. It merely relocated them. This should not be held against him however. The contradictions are there inherent in the object of discourse [...]". Teoria absolutnych mnogości i ograniczenia rozmiaru stoi niewątpliwie u podstaw wprowadzonego przez E. Zermelo aksjomatu wyróżniania: „$\forall z\ \exists x\ \forall y\ [y\in x \equiv y\in z \wedge \phi(y)]$ dotyczącego obiektów ze zbioru z spełniających własność f".

[38] I. JANÉ, op. cit., s. 384. M. HALLETT (op. cit., s. XII) zauważa krytycznie: „[...] reliance on theology actually obscures philosophical problems rather than solving them, for it gives the impression that the underlying realism is reasonable without providing any solid arguments in support. Later set theorists like Zermelo and Gödel certainly shunned theological backing for their doctrines, though they certainly took over Cantor's realism".

[39] G. CANTOR, op. cit., s. 195–199. W sformułowaniu zasad generujących skorzystano z propozycji I. Janéé (op. cit., s. 394-395). Cantor wprowadza poza tym zasadę ograniczania (*Hemmungs- oder Beschräänkungsprinzip*) dla mnogości liczb pozaskończonych. Na ten temat szerzej pisze J.W. DAUBEN (op. cit., s. 98).

[40] I. JANÉ (op. cit., 383) stwierdza nawet, że w przypadku aktualnej nieskończoności absolutnej zasady generujące właściwie niczego nie generują, skoro mnogość wszystkich liczb porządkowych

2. Klasy liczbowe nie wyczerpują się w zakresie trzech klas[41]. Zdaniem Cantora każda klasa liczbowa i jej moc jest współuporządkowana (*zugeordnet*) z określoną liczbą absolutnie nieskończonych całości liczbowych (*Zahleninbegriffs*) w taki sposób, że dla każdej pozaskończonej liczby γ istnieje jej moc. Różne moce tworzą absolutnie nieskończoną mnogość[42].

3. Dowód (nie wprost) twierdzenia, że całość wszystkich alefów nie może być traktowana jako określony i kompletny zbiór, opiera się na założeniu (niesprzecznej) całości wszystkich alefów (czyli absolutu). W ten sposób absolutna nieskończoność nabiera matematycznego znaczenia[43].

W literaturze przedmiotu pojawiła się próba zawieszenia dystynkcji pomiędzy pozaskończoną i absolutną nieskończonością[44]. W skrócie wygląda ona następująco: (1) założenie – istnienie zbioru wszystkich liczb porządkowych, (2) na mocy drugiej zasady generującej istnieje liczba porządkowa większa od wszystkich liczb porządkowych, (3) liczba ta (wg metody von Neumanna) jest

istnieje w umyśle Boga (lub gdziekolwiek, lecz nie w umyśle ludzkim). Autor sprowadza zarazem (s. 384) koncepcję aktualnego absolutu do trzech sformułowań: (1) manifestacja Boga, (2) to, co poza sekwencją porządkową, (3) maksimum kwantytatywne, które nie jest relacjonalnym pojęciem w dziedzinie pozaskończoności.

[41] Klasy liczbowe są ściśle związane z zasadami generowania i ograniczania. W teorii mnogości wyróżnia się: (1) liczby pierwszej klasy, czyli liczby porządkowe skończone (w tym 0, choć Cantor zakładał liczbę 1), (2) liczby drugiej klasy, czyli liczby porządkowe będące typami zbiorów przeliczalnych, (3) liczby trzeciej klasy – liczby porządkowe jako typy zbiorów dobrze uporządkowanych mocy $\aleph_1$, a więc nieprzeliczalnych (W. Sierpiński, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Lwów 1930, s. 76–77).

[42] G. Cantor, op. cit, s. 205.

[43] Na ten temat pisał Cantor w listach do D. Hilberta, 2 X i 27 X 1897, (I. Jané, op. cit., s. 388-389), stwierdzając, że twierdzenie o całości wszystkich alefów jest najważniejszą wypowiedzią w teorii mnogości. W listach do R. Dedekinda (1899), Cantor (op. cit., s. 443–448) posługiwał się pojęciem systemu wszystkich liczb Ω i Ω' (z liczbą 0) oraz pojęciem mnogości S wszystkich dających się pomyśleć klas. Przy okazji absolutnej nieskończoności M. Hallett (op. cit., s. 166-167) podaje powody powiązania absolutu i sprzeczności: (1) obecne w dwóch koncepcjach absolutu twierdzenie, że istnieją kolekcje, które nie mogą być ujęte jako proste (pojedyncze) przedmioty, (2) nawiązanie do (1) przy określeniu niemożliwości „jednoczącego" ujęcia całości tego, co da się pomyśleć (przy czym ostatecznie nie wiadomo, co miałyby znaczyć słowa Cantora wprowadzające tego typu całość: „Wie man sich leicht überzeugt [...]" Cantor, s. 443 (w angielskim tłumaczeniu „überzeugt" oddano słowem, które znaczy „widzenie", co raczej nie ułatwia interpretacji), (3) wykorzystanie w dowodzie sprzeczności Ω i Ω' argumentu Burali-Fortiego opartego na operacjach matematycznych (ibidem, s. 445), (4) wykorzystanie w dowodzie sprzeczności S twierdzenia z 1891 roku, że dla dowolnego zbioru istnieje moc większa od tego zbioru (ibidem, s. 448). Hallett próbuje dokładniej określić, na ile wielkości sprzeczne pojawiły się w związku z koncepcjami absolutnej nieskończoności, a na ile z wykazania sprzeczności przy uznaniu takich wielkości. Sprawa jest o tyle istotna, że termin „sprzeczność" w tym kontekście może posiadać *quasi*-formalny sens wprowadzony *ad hoc*, obcy Cantorowskiej koncepcji matematyki (takie przypuszczenie sformułował B. Russell) (Por. I. Jané, op. cit., s. 377). W liście do D. Hilberta, 9 V 1898 (ibidem, s. 377), Cantor wiąże negatywnie termin „sprzeczny" z terminem „kompletny" (*fertig*) i wyraża niepewność odnośnie do ewentualnego uznania pierwszego terminu.

[44] G. Priest, op. cit., s. 129.

zbiorem wszystkich liczb porządkowych On, paradygmatem nieskończoności absolutnej, (4) On powstała w dokładnie taki sam sposób, jak wszystkie inne graniczne liczby porządkowe i jako taka nie różni się od nich, (5) na mocy pierwszej zasady generującej można otrzymać On+1>On, *ergo*: (6 absolutna nieskończoność jest powiększalna i stąd upada Cantora dystynkcja (lub sposób jej przedstawienia)[45]. Na to można odpowiedzieć: (1) argument Priesta, wykorzystujący zasady generowania liczb porządkowych i metodę von Neumanna, dotyczy pierwotnej koncepcji absolutu (aktualnego i niepowiększalnego), tymczasem procedury te posiadają aplikację w drugiej koncepcji (w pewnym stopniu zmatematyzowanej), w której potencjalna nieskończoność absolutna jest faktycznie powiększalna, (2) zasady generowania dopuszczają wyłącznie nieformalne wyprowadzenie absolutnej nieskończoności (z nieograniczoności dziedziny pozaskończonego), predykat „niepowiększalny" sugeruje niemożliwość matematycznego (liczbowego) zdeterminowania, (3) Cantor obok zasad generowania wprowadza zasadę ograniczania, sprowadzającą się do uznania wszystkich liczb poprzedzających α (trzecia klasa liczbowa) za zbiór o mocy równolicznej z pierwszą klasą liczbową (klasą liczb porządkowych skończonych); zasada ta specyfikuje obiekty pozaskończone i wyraźnie oddziela te obiekty od absolutu (podobnie jest z twierdzeniami dotyczącymi obu dziedzin), (4) Priest popada w niekonsekwencję, dowodząc sprzeczności pierwotnej koncepcji asolutnej nieskończoności, którą uprzednio określał jako: „quite self-refuting", „looks self-inconsistent", „half-formed thoughts", *ergo*: (5) argument Priesta na podstawie (1)-(4) nie uchyla dystynkcji pomiędzy pozaskończonością i absolutną nieskończonością, wskazuje najwyżej na pewne trudności drugiej koncepcji, choć wobec braku wyjaśnienia sensu „potencjalności" nic znaczącego nie wnosi.

Poświęcono tyle miejsca Cantorowskiej zasadzie nieskończoności absolutnej ze względu nie tylko na jej wagę w systemie twórcy teorii mnogości, lecz również z tego powodu, że znalazła swoje odzwierciedlenie merytoryczne w dalszych fazach rozwoju teorii mnogości w postaci: (1) teorii ograniczenia rozmiaru zbioru (*limitation of size*) – E. Zermelo, P. E. B. Jourdain, B. Russell, D. Mirimanoff, J. von Neumann[46]; (2) analiz dotyczących antynomii teoriomno-

[45] Priest opatruje rozumowanie komentarzem (ibidem, s. 130): „We have in this situation, exactly the same contradiction about the infinite that exercised earlier generations: the infinite is such that there can be no bigger; yet there can be a bigger". Dalej zauważa (porównując paradoksy absolutnej nieskończoności ze strukturą antynomii kantowskich): „[...] in each case, the limit is defined »from below«; but the contradiction is produced by considering it »from above«: that is, in each case we take the limit to be itself a unity and note its properties" (s. 133).

[46] M. Hallett (op. cit., s. 211) zestawia Cantorowską koncepcję nieskończoności absolutnej [A] z koncepcją ograniczenia rozmiaru [L]: [A] (1) typowa dystynkcja – skończone/pozaskończone i abso-

gościowych; (3) rozróżnienia przez J. von Neumanna klas właściwych (odpowiedniki Cantorowskich wielkości absolutnych) i zbiorów (ogólnie: każdy zbiór jest klasą, lecz nie każda klasa jest zbiorem; klasa jest zbiorem, jeśli jest elementem innej klasy; klasa, która nie jest elementem innej klasy, jest klasą właściwą); (4) badań nad uniwersum teoriomnogościowym (zasada refleksji, zbiór potencjalnie nieskończony, klasa właściwa); (5) badań dotyczących dużych liczb kardynalnych.

Na zakończenie tej części pracy można dodać, że stanowisko Cantora w sprawie absolutnej nieskończoności (i nieskończoności w ogóle) stanowi wyraźną kontynuację myśli Augustyna, według którego: (1) nieskończoność jest pojęciem wrodzonym, umożliwiającym jakąkolwiek wiedzę, (2) matematyka stanowi najlepsze narzędzie zdobywania wiedzy o Bogu, (3) Bóg nie jest ani skończony, ani nieskończony (przekracza poziom nieskończoności)[47]. Na podstawie dwóch założeń, że (1) każda nieskończoność jest czymś skończonym dla Boga, (2) Bóg może poznawczo dokonać auto-ujęcia, Augustyn wyprowadza wniosek o poza-nieskończoności Boga (tzn. nie jest nieskończony, gdyż w poznawczym ujęciu siebie samego otrzymałby rezultat o skończonej treści). Status ontyczny nieskończoności polega na byciu ideą w umyśle Boga. Zarysowane kwestie pojawiają się w pracach Cantora: (1) nieskończoność realizuje się jako idea w umy-

---

lutne, (2) skończone/pozaskończone wyczerpuje dziedzinę obiektów matematycznych, występują założenia lokujące pewne szczególne obiekty w pozaskończoności (np. aksjomat rozszerzonej arytmetyki pozaskończonej, dotyczący niesprzeczności wielości z przypisanymi alefami jako liczbami kardynalnymi, zob. tłum. R. Murawskiego (op. cit., s. 174)), (3) absolut jest wyłączony matematycznie, iteracje pozaskończone nie osiągają tego obiektu; [L] (1) typowa dystynkcja – małe mnogości i duże mnogości, (2) małe zbiory są przedmiotami matematyki, występuje założenie bycia małą mnogością dla pewnych zbiorów koniecznych do operacji matematycznych, (3) bardzo (zbyt) duże mnogości są wyłączone z dziedziny matematyki na podstawie natury aksjomatów. Autor zestawienia dodaje, że tak opisane koncepcje nie dostarczają zbyt wielu informacji o naturze przedmiotów w uniwersum.

[47] A. Drozdek, *Beyond Infinity: Augustine and Cantor*, „Laval Théologique et Philosophique" 1995, nr 51, s. 133. W ten sposób można podważyć standardowe twierdzenia na temat nieskończoności Boga według Augustyna. E. Gilson (*L'infinėé divine chez saint Augustin. ÉÉtudes augustiniennes*, t. 1, Paris 1954, s. 569–570) stwierdza, że nie ma bardziej znanego teologom atrybutu Boga, jak nieskończoność, i że swoistym kuriozum jest pominięcie jej przez Augustyna w liście atrybutów, choć z pewnością Bóg Augustyna ten atrybut posiada. Na marginesie można dodać, że pomimo licznych odniesień w Starym i Nowym Testamencie dotyczących nieskończoności Boga, aż do końca XIX wieku żaden sobór Kościoła oficjalnie tego nie asygnował. Uczynił to dopiero Sobór Watykański I w formule: „Sancta catholica apostolica Romana Ecclesia credit et confitetur unum esse Deum verum et vivum [...] intellectu ac voluntate omnique perfectione infinitum". Od Soboru w Nicei oficjalnie mówiono o Bogu jako bycie wiecznym, niezmiernym, niepojętym, wszechmogącym. W tekstach Augustyna słowo „infinitum" pojawia się osiem razy (Sweeney, *Surprises in the History of Infinity from Anaximander to George Cantor*, „Proceedings of the Annual Meeting of the American Catholic Philosophical Association" 1981, nr 55, s. 8). Poza tym, Cantora określenie absolutu jako niepojętego maksimum ilościowego przywołuje wyraźnie koncepcję Mikołaja z Kuzy (Priest, op. cit., s. 128).

śle Boga oraz jest ludzkim pojęciem wrodzonym[48]; (2) Augustyna finityzm teologiczny posiada odbicie w finityzmie teoriomnogościowym, a przynajmniej w pewnych wersjach finityzmu; (3) teoria mnogości stanowi jedyne, jak dotąd, ścisłe narzędzie teologii spekulatywnej i metafizyki, (4) Cantorowski Bóg (oraz absolutna nieskończoność) przekracza dziedziny skończoności i pozaskończoności, jednocześnie finityzuje pozaskończoność[49].

W ostatecznym obrachunku istotne jest to, że zasada absolutnej nieskończoności stanowi jeszcze jeden przykład wyłączenia absolutu ontologicznego z opisu matematycznego[50]. Przykład ten, symptomatyczny dla badań formalnych XX wieku, informuje o granicach naukowej aplikacji pojęcia nieskończoności, a więc fakt, z którym powinny się liczyć filozoficzne ontologie. W szczególności niekontrolowane operowanie podstawowymi pojęciami (np. transcendentalnymi) może prowadzić do różnych trudności w danych systemach ontologicznych (metafizycznych).

4. Wnioski

Wyniki uzyskane w powyżej przedstawionym przeglądzie i analizie można podsumować następująco:

1. G. Cantora filozofię nieskończoności wyrażają trzy zasady heurystyczne: (1) zasada aktualnej nieskończoności (*resp.* zasada dziedziny): każda ściśle stosowana matematycznie nieskończoność potencjalna (zmienna wielkość skończo-

---

[48] Komentując wystąpienie C.F. Gaussa (przeciw nieskończoności aktualnej w matematyce) Cantor stwierdza: „[...] zachowanie takie daje się pojąć jako rodzaj krótkowzroczności, która to odbiera możliwość ujęcia Aktualnej Nieskończoności, pomimo że ona stworzyła nas i zawiera w swojej najwyższej, absolutnej mocy, i wszędzie obejmuje nas w swoich drugorzędnych, pozaskończonych formach, a nawet tkwi w naszym duchu (*unserem Geiste selbst innewohnt*) (Cantor, op. cit., s. 406). To „tkwienie w duchu" dopuszcza, jak się zdaje, natywistyczną interpretację pojęcia nieskończoności. O tym, że dla Cantora nieskończoność to idea w umyśle Boga, świadczy list do Jeilera, 13 X 1895 (A. Drozdek, op. cit., s. 138), w którym figuruje umieszczenie wszystkich *modi transfinitum* (istniejących z wieczności) jako idei w boskim intelekcie, oraz list (podobny treściowo) do Hermite'a, 30 XI 1895 (J. Dauben, op. cit., s. 228).

[49] Wydaje się, że bardziej teoretycznie zaangażowane (niż Augustyna) badania na temat powiązania pojęcia nieskończoności i pojęcia Boga przedstawił Duns Szkot. W koncepcji średniowiecznego filozofa (teologa) nieskończoność, jako *modus intrinsecus* (nieskończoność intensywna), jest wewnętrznym (modyfikacja sposobu istnienia), transcendentalnym członem dysjunktywnym w określonej parze rozłącznych właściwości bytu (*passiones disiunctae entis*), wyrażającym doskonałość Boga. Różnica pomiędzy Tomaszem z Akwinu a Dunsem Szkotem w sprawie nieskończoności polega na tym, że dla pierwszego nieskończoność Boga jest brakiem ograniczenia istnienia (przy czym akcent pada na akt istnienia w nieograniczoności), natomiast drugi określił nieskończoność jako pozytywną modyfikację treści istoty (doskonałości), jako wewnętrzny sposób intensywności doskonałości bytu Boga (I. Zieliński, *Nieskończoność bytu Bożego w filozofii Jana Dunsa Szkota*, Lublin 1980).

[50] J. Woleński, *Metamatematyka a epistemologia*, Warszawa 1993.

na, dziedzina niekompletna) zakłada nieskończoność aktualną (stały zakres zmienności uprzednio określony względem zmiennych); (2) zasada finityzmu: matematyzacja pojęcia nieskończoności wymaga jego finityzacji, poprzez (a) wprowadzenie jednorodnego ontycznie statusu wszystkich dopuszczonych matematycznie zbiorów, (b) ustalenie, że wszystkie takie zbiory posiadają charakterystykę liczbową (arytmetyczną); (3) zasada absolutnej nieskończoności: istnieją mnogości, które nie są zbiorami, tzn. nie są dopuszczonymi matematycznie obiektami i nie posiadają pełnej charakterystyki liczbowej (mogą natomiast występować w dowodach nie wprost jako pewne określone obiekty) i które wyznaczają granice matematyzacji pojęcia nieskończoności.

2. Zasada dziedziny (ZD) zawiera, nawet w formalnym ujęciu, wysoce spekulatywny przeskok znaczeniowy w przypadku odniesienia do powyższej problematyki, polegający na tym, że bez bliższych wyjaśnień utożsamia się wielkości stałe i zmienne z aktualnością i potencjalnością. Zachodzi potrzeba wypracowania ogólnych sensów pojęć aktualności i potencjalności (dopuszczonych matematycznie). Zwłaszcza pojęcie potencjalności pozostaje na gruncie teorii mnogości (i filozofii teorii mnogości) na poziomie nierzadko deklaratywnym.

3. Zasada finityzmu występuje na gruncie systemów teorii mnogości w różnych sformułowaniach, lecz dostarcza podstawowej informacji o wieloaspektowych granicach teoriomnogościowego operowania pojęciem nieskończoności. Informacja ta koreluje z założeniem aksjomatyzacji teorii mnogości: nieograniczone posługiwanie się pojęciem nieskończoności prowadzi do antynomii.

4. Naukowo dopuszczalne granice operowania pojęciem nieskończoności ilustruje również zasada absolutnej nieskończoności. Jakkolwiek zaangażowana teologicznie oraz dopuszczająca różne interpretacje (od prostego określenia absolutu do koncepcji absolutnych mnogości, od aktualnej nieskończoności absolutnej do potencjalnej nieskończoności absolutnej) stanowi przykład wyłączenia absolutu z opisu matematycznego. W szczególności zasada absolutnej nieskończoności ujawniająca trudności z uniwersum teoriomnogościowym może być sygnałem rewidującym dla uniwersów ontologii filozoficznych. Zasada absolutnej nieskończoności poza tym znajduje swoje umotywowanie w zasadach generujących dla liczb porządkowych, klasach liczbowych oraz w dowodzie twierdzenia o alefach. Zasada ta była rozwijana w dalszych etapach rozwoju teorii mnogości w postaci: (1) teorii ograniczenia rozmiaru zbioru (E. Zermelo, P.E.B. Jourdain, B. Russell, D. Mirimanoff, J. von Neumann), (2) analiz dotyczących antynomii teoriomnogościowych, (3) rozróżnienia przez J. von Neumanna klas właściwych (odpowiedniki Cantorowskich wielkości absolutnych) i zbiorów,

(4) badań dotyczących uniwersum teoriomnogościowego (np. zasada refleksji), (5) badań nad dużymi liczbami kardynalnymi, (6) dyskusji z teorią kategorii.

5. Przedstawiony argument (G. Priest) dotyczący zawieszenia Cantora dystynkcji pomiędzy pozaskończonością i absolutną nieskończonością nie jest konkluzywny (błąd *pars pro toto*, brak uwzględnienia pewnych zastrzeżeń Cantora co do nieformalnego wyprowadzania z faktów matematycznych wielkości absolutnie nieskończonych, brak wzmianki o zasadzie ograniczania specyfikującej obiekty pozaskończone), wskazuje jednak na trudności przyjęcia drugiej koncepcji absolutu, według której wielkości absolutnie nieskończone (np. całość wszystkich alefów) są potencjalnie nieskończone w przeciwieństwie do pierwszej koncepcji, w myśl której nieskończoność absolutna stanowi przykład nieskończoności aktualnej.