Opial, Zdzisław

# O pracach Jana Brożka z teorii liczb

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 3/4, 537-563

1958

*Zdzisław Opial*

# O PRACACH JANA BROŻKA Z TEORII LICZB

Spośród matematycznych dzieł Jana Brożka właściwie tylko trzy zawierają oryginalne wyniki, zasługujące na większą uwagę ze strony historyka matematyki: *Apologia* i obie *Rozprawy o liczbach doskonałych* [1]. Dlatego też bez rzetelnej, drobiazgowej analizy tych dzieł właściwa ocena oryginalnego wkładu Brożka do nauki jest w ogóle niemożliwa. Dotyczy to przede wszystkim *Rozpraw o liczbach doskonałych,* bo ocenę *Apologii* ułatwiają prace Chaslesa i Günthera, wyzyskane w pełni przez polskich badaczy matematycznego dorobku naszego uczonego. Tymczasem, nie umniejszając bynajmniej wartości obszernej monografii Jana Frankego [2] poświęconej Brożkowi, należy stwierdzić, że jego krytyczno-historyczny rozbiór *Rozpraw o liczbach doskonałych* jest powierzchowny, niepełny i nie daje odpowiedzi na szereg istotnych pytań związanych z matematyczną twórczością Brożka. Franke ogranicza się bowiem prawie wyłącznie do przełożenia treści tych rozpraw na język współczesnej matematyki, a w komentarzu historycznym nie uwzględnia najnowszych, łatwo dostępnych publikacji dotyczących rozważanego problemu [3]. Nowsza, popularnonaukowa monografia Jadwigi Dianni [4] nie przy-

---

[1] *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios. Additae sunt duae disceptationes de numeris perfectis.* Gdańsk 1652. Bibliografia Estreichera wymienia także wydanie wcześniejsze: *Aristoteles et Euclides defensus contra Petrum Ramum et alios. Additae sunt duae disceptationes de numeris perfectis.* Amsterdam 1638. Ponadto osobno wyszła: *De numeris perfectis disceptatio.* Kraków 1637. W *Apologii* Brożek biorąc w obronę Arystotelesa i Euklidesa przed atakami Piotra Ramusa zajmuje się szeregiem zagadnień geometrycznych, m.in. teorią wielokątów gwiaździstych, problemami izoperymetrycznymi itp. Natomiast obie *Rozprawy o liczbach doskonałych* stanowiące osobny dodatek do *Apologii* zupełnie się z jej treścią nie wiążą.

[2] J. N. Franke, *Jan Brożek,* Kraków 1884.

[3] Np. pracy E. Lucas, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure.* „Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, t. X (1877), s. 129—193 i 239—293.

[4] J. Dianni, *Jan Brożek,* Warszawa 1949.

nosi pod tym względem żadnych zmian. Także wstęp i komentarz pióra tej samej autorki do drugiego tomu *Wyboru pism* Jana Brożka [5] nie wprowadza do syntetycznego ujęcia jego twórczości matematycznej niczego nowego. A tymczasem bez dokładnej analizy dzieł Brożka, i to zarówno z punktu widzenia samej matematyki, jak i z punktu widzenia historii tej dyscypliny, pogląd nasz na wielkość jego matematycznego talentu i na miarę jego osiągnięć musi pozostać z konieczności niepełny, powierzchowny, a czasami wręcz błędny.

I tutaj trzy zwłaszcza sprawy wysuwają się na plan pierwszy. Konieczne jest — po pierwsze — rozszyfrowanie do końca matematycznej treści wszystkich jego dzieł poprzez ich gruntowną analizę. Przecież szereg wyników Brożka zasługuje na to, aby traktować je tak, jak traktuje się wyniki współczesnej matematyki. Dotyczy to także, a może nawet przede wszystkim, wyników zawartych w obu *Rozprawach o liczbach doskonałych*. Konieczne jest — po drugie — dokładne poznanie tego wycinka historii matematyki, który wiąże się pośrednio lub bezpośrednio z zagadnieniami, nad którymi pracował Brożek. Pozwoli to na przeprowadzenie odpowiednich porównań, umożliwi także poznanie ewentualnych źródeł inspiracji naszego uczonego, a przede wszystkim ułatwi znalezienie w historii matematyki właściwego miejsca dla naukowej działalności Brożka w tej dziedzinie nauki. Wiąże się z tym bezpośrednio postulat trzeci, mianowicie konieczność poznania roli, jaką odegrały badania Brożka w rozwoju matematyki.

Wydaje się, że bez zadośćuczynienia trzem powyższym postulatom syntetyczne ujęcie dorobku Jana Brożka w dziedzinie matematyki będzie sprawą fantazji i pisarskiego talentu historyka matematyki. Dlatego też postawiłem sobie za cel częściowe choćby tylko wypełnienie przedstawionego powyżej programu badań nad matematyczną twórczością Brożka. Nie roszcząc sobie zresztą bynajmniej pretensji do wyczerpania tematu, zajmę się w tym artykule wyłącznie *Rozprawami o liczbach doskonałych*. Spróbuję przy tym dokonać z jednej strony dokładniejszej analizy ich matematycznej treści, a z drugiej wskazać tło historyczne, na którym dla uzyskania pełniejszego obrazu naukowej działalności Brożka, trzeba je rozpatrywać. Innymi słowy artykuł ten — według mego zamierzenia — ma stanowić próbę komentarza historyczno-krytycznego do prac Brożka z teorii liczb.

[5] Jan Brożek, *Wybór pism*, Warszawa 1956.

## I

Jak wiadomo, głównym celem *Rozpraw o liczbach doskonałych* jest wykazanie, że pewne spośród liczb postaci $2^{n-1}(2^n - 1)$, uważanych przez Piotra Bongusa[6] i innych matematyków za liczby doskonałe[7], nimi nie są. Wiadomo przy tym było jeszcze z *Elementów* Euklidesa, że na to, aby jakaś liczba postaci $2^{n-1}(2^n - 1)$ była doskonałą, potrzeba i wystarcza, aby $2^n - 1$ było liczbą pierwszą. Jeżeli więc Bongus wśród liczb doskonałych umieszcza szereg liczb nadmiarowych, tj. mniejszych od sumy wszystkich swych podzielników, to czyni tak dlatego, że nie umiejąc stwierdzić, iż pewne liczby postaci $2^n - 1$ są złożone, uznaje je bezkrytycznie za pierwsze. Chcąc jednak potraktować zagadnienie tworzenia liczb doskonałych postaci $2^{n-1}(2^n - 1)$ bardziej sumiennie i poważniej, trzeba by umieć w jakiś sposób badać, które spośród liczb postaci $2^n - 1$ są liczbami pierwszymi. Mowa tu, rzecz oczywista, o jakimś sposobie znacznie prostszym od sprawdzania przez kolejne dzielenie badanej liczby przez wszystkie liczby pierwsze, mniejsze od jej pierwiastka kwadratowego, sposób ten bowiem, stosunkowo prosty w przypadku liczb małych, staje się zupełnie bezużyteczny w odniesieniu do liczb większych, a o takie właśnie chodzi w omawianym zagadnieniu. Reguła Euklidesa na tworzenie liczb doskonałych prowadzi więc nieuchronnie do poszukiwania prostszych, „skróconych" sposobów stwierdzania, czy jakaś liczba postaci $2^n - 1$ jest pierwszą czy nie. Nic dziwnego zatem, że na tym właśnie terenie spotyka się Brożek z genialnym matematykiem francuskim, twórcą teorii liczb, Piotrem Fermatem, u którego (jak zobaczymy potem) tego rodzaju poszukiwania stanowiły punkt wyjścia dla szeregu niezwykle płodnych badań.

W pierwszej *Rozprawie o liczbach doskonałych* wykazuje wpierw Brożek, że dwie spośród liczb proponowanych przez Bongusa i innych nie są liczbami doskonałymi, a na jej zakończenie podaje cechy podzielności liczb postaci $2^n - 1$ przez dziesięć kolejnych liczb pierwszych: 3, 5, ..., 31. W drugiej natomiast *Rozprawie* najpierw podaje cechy podzielności liczb omawianej postaci przez liczby pierwsze od 3 do 101, a dopiero później — na ich podstawie — pokazuje, że i kilka dalszych liczb Bongusa nie może być liczbami doskonałymi.

---

[6] P. Bongus, *De mistica numerorum significatione*, Bergamo 1583.

[7] Liczbami doskonałymi nazywamy liczby równe sumie wszystkich swoich podzielników.

Swoje twierdzenia o podzielności zestawia Brożek w postaci następującej tabelki [8]:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | | 3 |
| | 4 | | 5 |
| | 6 | | 7 |
| | 10 | | 11 |
| | 12 | | 13 |
| | 8 | | 17 |
| | 18 | | 19 |
| | 11 | | 23 |
| Każda liczba postępu dwójko- | 28 | lub jej wielokrotność, pomniej- | 29 |
| wego, zaczynającego się od | 5 | szona o jedność jest podziel- | 31 |
| jedności, której wykładni- | 36 | na przez | 37 |
| kiem jest liczba | 20 | | 41 |
| | 14 | | 43 |
| | 23 | | 47 |
| | 52 | | 53 |
| | 58 | | 59 |
| | 60 | | 61 |
| | 66 | | 67 |
| | 35 | | 71 |
| | 9 | | 73 |
| | 39 | | 79 |
| | 82 | | 83 |
| | 11 | | 89 |
| | 48 | | 97 |
| | 100 | | 101 |

Otóż właśnie przytoczone powyżej reguły podzielności stanowią o wartości obu *Rozpraw*. Wobec tego jednak, że Brożek nie podaje zupełnie dowodów tych twierdzeń, powstaje pytanie, w jaki sposób mógł je odkryć, jak mógł je uzasadnić, dowieść? Zupełnie pewnych odpowiedzi na te pytania dać oczywiście nie można, spróbuję jednak przedstawić pewien prosty sposób otrzymywania wszystkich tych twierdzeń środkami najzupełniej dostępnymi matematykowi XVII wieku. Przy tym sam sposób postawienia zagadnienia przez Brożka i otrzymane przez niego wyniki przemawiają za tym, że twierdzenia te uzyskał na tej lub podobnej drodze. W każdym bądź razie podanie takiej metody może nam ułatwić ocenę wyników Brożka, nawet jeżeli on sam posługiwał się nieco inną metodą. Co do tego bowiem że swoich twierdzeń nie uzyskał Brożek w sposób czysto empiryczny, przez dokonanie niezliczonej ilości potrzebnych w takim przypadku

[8] J. Brożek, *Apologia pro Aristotele et Euclide* etc., s. 129. W dalszym ciągu będę cytował to dzieło po prostu jako *Apologia*.

rachunków, panuje wśród tych, którzy zajmowali się dotychczas jego matematycznym dorobkiem, zupełna zgoda. Oto, co na ten temat pisze, po przedstawieniu twierdzeń Brożka, Franke na stronie 214 cytowanej już monografii:

„Nie daje jednak nigdzie żadnej wskazówki, jakim sposobem te cechy otrzymał. Otóż zdaje się nie ulegać wątpliwości, że musiał posiadać jakąś metodę lub regułę ogólniejszą, z której te cechy wyprowadził, bo trudno przypuścić, żeby przez próbowanie empiryczne doszedł do tylu twierdzeń, których odgadnienie wymagałoby koniecznie doprowadzenia postępu dwójkowego do wyrazów tak wielkich, iżby się zaledwie wypisać dały".

Podobny pogląd na tę sprawę reprezentuje też J. Dianni (l.c. s. 85):

„Nie daje jednak nigdzie żadnej wskazówki, jakim sposobem te cechy otrzymał. Prawdopodobnie miał jakąś metodę lub regułę ogólniejszą, z której te cechy wyprowadził. Trudno bowiem przypuścić, by doszedł do tych twierdzeń przez próby empiryczne — tym bardziej że wymagałoby to doprowadzenia wyrazów postępu geometrycznego do takiej ilości cyfr, iż zaledwie można by je wypisać".

Za tym, że Brożek rzeczywiście posiadał jakąś metodę ogólną, przemawia przede wszystkim fakt, że twierdzeń tych, w tym ogólnym sformułowaniu, jakie znajdujemy w *Rozprawach,* w sposób rachunkowy w ogóle nie da się sprawdzić, zważywszy, że dotyczą one nieskończonej ilości liczb. Poza tym znając krytycyzm Brożka, można z całą pewnością przyjąć, że nie ogłosiłby on żadnego wyniku nie umiejąc go odpowiednio uzasadnić.

Zanim przystąpię do wyłożenia moich poglądów na tę sprawę, ustalmy wpierw kilka faktów. Już w *Arithmetica Integrorum* [9] podaje Brożek liczbowe wartości wszystkich wyrazów postępu $\{2^n\}$ dla wykładników od 1 aż do 100. Tamże, dla ułatwienia rachunków, dokonuje też rozkładu liczb całkowitych na sumy liczb postaci $2^n$. Ale, jak łatwo stwierdzić, zdobyte w ten sposób doświadczenie i dobra znajomość postępu $\{2^n\}$ nie mogły mu w żaden sposób ułatwić odkrycia i uzasadnienia omawianych twierdzeń. Potrzebne tu było nie byle jakie doświadczenie, ale doświadczenie w rozkładaniu liczb naturalnych na czynniki, a tym nigdzie się Brożek przed napisaniem *Rozpraw* specjalnie nie zajmował. Co więcej, i przy pisaniu samych *Rozpraw* żadnego poważniejszego doświadczenie w tej dziedzinie nie po-

[9] J. Brożek, *Arithmetica integrorum,* Kraków 1620.

siadał. W systematycznym rozkładzie na czynniki kolejnych liczb całkowitych nigdy nie wyszedł poza liczbę 100! W drugiej *Rozprawie* omawiając problem ilości liczb nadmiarowych i niedomiarowych pisze przecież wyraźnie:

„Jeżeli jednak policzysz w zakresie od 1 aż do 100 liczby doskonałe, nadmiarowe i niedomiarowe, to znajdziesz tylko dwie doskonałe, dwadzieścia jeden nadmiarowych, a wszystkie pozostałe — nie licząc 100 — zarówno parzyste jak i nieparzyste, w liczbie 75, będą niedomiarowymi. Tak, że w granicach od 1 do 100 niedomiar występuje częściej, niż nadmiar: tak samo p r a w d o p o d o b n i e (podkreślenie moje — Z.O.) jest między 100 i 1000 i dalej“ [10].

A zatem, nie zajmując się nigdy przed tem systematycznie rozkładaniem liczb naturalnych na czynniki, przystąpił Brożek, w związku z teorią liczb doskonałych, od razu do trudnego problemu rozkładu na czynniki, ale tylko liczb postaci $2^n—1$. Problemu trudnego przede wszystkim dlatego, że liczby tego ciągu rosną bardzo szybko. Ułatwić to trudne zadanie mogło tylko rozsądne postawienie całego problemu, a nigdy dokonywanie dzieleń czy rozkładów na czynniki w sposób przypadkowy. Czy jednak odpowiednie postawienie tego problemu jest możliwe i czy ułatwia ono rzeczywiście znalezienie podanych przez Brożka cech podzielności? Otóż tak!

Liczb pierwszych w ciągu $\{2^n—1\}$ można szukać oczywiście przez usuwanie z niego liczb złożonych, a więc najpierw wszystkich liczb podzielnych przez 3, następnie wszystkich liczb podzielnych przez 5, 7, 11 itd. Tak przecież postępuje się przy szukaniu liczb pierwszych w ciągu liczb naturalnych, w ten właśnie sposób powstaje tak zwane sito Eratostenesa. Z tego punktu widzenia twierdzenia Brożka o podzielności przez liczby pierwsze wyrazów rozpatrywanego ciągu stanowią, razem wzięte, początek, pewien fragment nowego sita. Można by je — dla łatwiejszego formułowania naszych poglądów i przez analogię z sitem Eratostenesa — nazwać sitem Brożka. Wydaje się, że właśnie stworzenie takiego nowego sita dla liczb postaci $2^n—1$ było pomysłem Brożka i punktem wyjścia dla omawianych twierdzeń.

Sito Brożka — nasuwa się dalsze przypuszczenie — utworzone zostało na wzór sita Eratostenesa i, co więcej, niewątpliwie przy pomocy sita Eratostenesa. Spróbuję pokazać to na przykładzie. Niech

[10] *Apologia*, s. 148.

chodzi, na przykład, o wyznaczenie tych elementów ciągu $\{2^n-1\}$, które są liczbami podzielnymi przez 13. Posługując się kompletnym sitem Eratostenesa trzeba by w tym celu zbadać, czy któraś z liczb nieskończonego ciągu:

(I) $13, 2\cdot 13, 3\cdot 13, 4\cdot 13, 5\cdot 13,$ itd.

jest liczbą postaci $2^n-1$, to znaczy którąś z liczb ciągu:

(II) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, itd.

pomniejszoną o jedność. Otóż 13, pierwsza liczba ciągu (I) nie jest liczbą tej postaci, podobnie jak i $2\cdot 13$. Liczbie 13 do 16, liczby ciągu (II), brakuje 3, a nie 1. Analogicznie, liczbie $2\cdot 13$ do 32 brakuje 6 (dwa razy więcej niż poprzednio liczbie 13 do 16). Liczby $3\cdot 13$ można w ogóle nie brać pod uwagę, w pobliżu bowiem następnej liczby ciągu (II), w tym przypadku liczby 64, znajdzie się dopiero liczba $4\cdot 13$, ale i jej będzie do 64 brakowało 12, a nie 1. (A więc znowu różnica pomiędzy odpowiednią liczbą ciągu (I), a kolejną liczbą ciągu (II) wzrosła dwukrotnie — łatwo zauważyć, że tak będzie stale). Zupełnie podobnie można opuścić liczby $5\cdot 13$, $6\cdot 13$ i $7\cdot 13$, bo dopiero liczba $8\cdot 13$ znajdzie się w pobliżu następnej liczby ciągu (II), tj. 128. Do 128 będzie jej brakowało 24, a więc następnej liczbie ciągu (I), to jest liczbie $9\cdot 13$, do 128 będzie brakowało tylko 11. Następną z kolei liczbą ciągu (I), którą należałoby wziąć pod uwagę, będzie teraz liczba $18\cdot 13$; będzie się ona różnić od 256 o 22, w jej miejsce trzeba by więc wziąć liczbę $19\cdot 13$, której do 256 brakuje tylko 9. Kontynuując tego rodzaju rachunki dochodzimy z łatwością do takiej liczby ciągu (I), której do odpowiedniej liczby ciągu (II) brakuje tylko 1. W naszym przykładzie będzie to liczba $315\cdot 13$ równa $2^{12}-1$. Dla większej przejrzystości i prostoty można by wykonać te wszystkie obliczenia ujmując je w tabeli podanej na stronie następnej.

Po znalezieniu liczby $315\cdot 13$, będącej (jak to wynika z tabeli) liczbą postaci $2^n-1$, nic oczywiście nie stoi na przeszkodzie, aby dalszych liczb tego rodzaju szukać w ten sam sposób. Okazuje się przy tym (patrz dwa ostatnie wiersze podanej tabeli), że ciąg reszt z dzielenia przez odpowiednie liczby ciągu (I) dla liczb ciągu (II) od $2^{12}$ do $2^{23}$ będzie wiernym powtórzeniem ciągu reszt, jaki uzyskaliśmy dla liczb od $2^0$ do $2^{11}$. Zatem znowu odpowiednia liczba ciągu (I) będzie mniejsza tylko o 1 od $2^{24}$. Podobnie, w ciągu (I) znajdziemy liczby mniejsze o 1 od $2^{36}$, $2^{48}$ itd., ogólnie, od liczb postaci $2^{12n}$. Stąd też twierdzenia Brożka.

Tabela reszt z dzielenia liczb ciągu $\{2^m\}$ przez liczby ciągu $\{n \cdot 13\}$

Kolejne liczby ciągu $\{2^m\}$

| Liczby ciągu $\{n \cdot 13\}$ | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^3$ | $2^4$ | $2^5$ | $2^6$ | $2^7$ | $2^8$ | $2^9$ | $2^{10}$ | $2^{11}$ | $2^{12}$ | $2^{13}$ | $2^{14}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1·13 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 1·13 | | 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 1·13 | | | 4 | | | | | | | | | | | | |
| 1·13 | | | | 8 | | | | | | | | | | | |
| 1·13 | | | | | 3 | | | | | | | | | | |
| 2·13 | | | | | | 6 | | | | | | | | | |
| 4·13 | | | | | | | 12 | | | | | | | | |
| 8·13 | | | | | | | | 24 | | | | | | | |
| 9·13 | | | | | | | | 11 | | | | | | | |
| 18·13 | | | | | | | | | 22 | | | | | | |
| 19·13 | | | | | | | | | 9 | | | | | | |
| 38·13 | | | | | | | | | | 18 | | | | | |
| 39·13 | | | | | | | | | | 5 | | | | | |
| 78·13 | | | | | | | | | | | 10 | | | | |
| 156·13 | | | | | | | | | | | | 20 | | | |
| 157·13 | | | | | | | | | | | | 7 | | | |
| 314·13 | | | | | | | | | | | | | 14 | | |
| 315·13 | | | | | | | | | | | | | 1 | | |
| 630·13 | | | | | | | | | | | | | | 2 | |
| 1260·13 | | | | | | | | | | | | | | | 4 |

Oczywiście Brożek tworzył swoje sito bynajmniej nie w celu znajdowania liczb pierwszych postaci $2^n-1$, na to bowiem aby w ten sposób otrzymać nowe, nie znane jeszcze liczby pierwsze, trzeba by wykonać dziesiątki i setki tego rodzaju rachunków. Niemniej jednak tak utworzone sito pozwoliło mu stwierdzić, że pewne liczby postaci $2^n-1$ są złożone, czyli nie mogą służyć do tworzenia liczb doskonałych według reguły Euklidesa, a to właśnie stanowiło doraźny cel *Rozpraw*.

Czy jest jednak prawdopodobne, aby przy odkrywaniu i ewentualnym uzasadnieniu swoich twierdzeń posługiwał się Brożek podobną metodą? Z całą stanowczością można dać na to pytanie odpowiedź twierdzącą. Zresztą i w samym tekście *Rozpraw* łatwo można znaleźć ustępy niedwuznacznie przemawiające na korzyść tej hipotezy. Tak na przykład, w pierwszej z nich, bezpośrednio przed podaniem dziesięciu swoich reguł podzielności, pisze Brożek:

„Jaka tedy będzie reguła na znajdywanie liczb pierwszych, z których powstają liczby doskonałe? Nie wątpię, że geometrzy (...) naszego wieku mają jakiś doskonały na to sposób: oczekując na jego wyjawienie, podaję tu kilka reguł wprowadzonych p r z y p o m o c y s i t a E r a t o s t e n e s a“ (podkreślenie moje — Z. O.)[11].

A po przytoczeniu cech podzielności kończy Brożek pierwszą *Rozprawę* zdaniem:

„Dalszych reguł dostarczy sito Eratostenesa“ [12].

Nie ulega więc wątpliwości, że przy odkrywaniu swoich cech podzielności posługiwał się Brożek sitem Eratostenesa, a same cechy stanowią odpowiedź na dziesięć kolejnych pytań: jakie liczby postaci $2^n—1$ są podzielne przez 3?, przez 5?, ..., przez 31?. Rzecz jasna, że nie mógł Brożek przy tym operacji, jakich się dokonuje przy tworzeniu sita Eratostenesa, stosować do całego nieskończonego ciągu liczb postaci $2^n—1$; jeżeli więc pomimo tego wypowiada swe twierdzenia w postaci ogólnej, to oznacza to, że przy dokonywaniu tych operacji odkrył jakąś prawidłowość w rodzaju tej, z której korzystałem przy dzieleniu liczb omawianego ciągu przez 13. Stąd też wyrażona w ostatnim zdaniu pierwszej *Rozprawy* pewność, że i dla dalszych liczb pierwszych posługiwanie się sitem Eratostenesa da analogiczne wyniki. I tak też się stało. Dalsze piętnaście cech podzielności, podanych już w drugiej *Rozprawie*, otrzymał Brożek z pewnością w zupełnie ten sam sposób. Nawiązując bowiem do faktu, że w poprzedniej *Rozprawie* pokazał, że dwie spośród liczb Bongusa nie są liczbami doskonałymi, pisze przecież niedwuznacznie:

„Jeżeli więc dwie liczby nie mogą pozostać w tabeli liczb doskonałych, to czyż nie można słusznie wątpić i o pozostałych? Zanim jednak je zbadamy, podam wpierw tabelę postępu geometrycznego dwójkowego, ..., i dalsze reguły wynikające z sita Eratostenesa“ [13].

Warto zwrócić także uwagę na fakt, że Brożek swoim rozważaniom na temat liczb Bongusa nadaje nazwę przesiewania. Rzeczywiście, na zakończenie tej części drugiej *Rozprawy*, którą poświęcił wyłącznie liczbom doskonałym, pisze wyraźnie:

---

[11] *Apologia*, s. 118.
[12] *Apologia*, s. 120.
[13] *Apologia*, s. 126—7.

„Jasne więc, że spośród tych liczb, które podał Bongus nie wszystkie są doskonałymi. Z podanej przez niego dwudziestki, po ich przesianiu (podkreślenie moje — Z.O.). pozostało tylko dziesięć“ [14].

## II

Należałoby teraz z kolei poświęcić nieco miejsca historii problemu, o którym traktują *Rozprawy* Brożka. Otóż — jak wiadomo — omówione powyżej twierdzenia Brożka są szczególnymi przypadkami tak zwanego małego twierdzenia Fermata, które obecnie formułuje się zwykle w następujący sposób:

*Jeżeli p jest liczbę pierwszą i a nie jest przez nią podzielne, to p dzieli* $a^{p-1}-1$.

Istotnie, przyjąwszy np. $a=2$ i $p=3,5, ..., 101$ otrzymamy stąd, że kolejno: 3 dzieli $2^2-1$, 5 dzieli $2^4-1$, ..., 101 dzieli $2^{100}-1$. Wprawdzie twierdzenia Brożka mówią więcej, bo obejmują także przypadki, gdy najmniejszy wykładnik, dla którego $p$ dzieli $2^n-1$, jest mniejszy od $p-1$, a ponadto głoszą, że z podzielności przez $p$ liczby $2^k-1$ wynika podzielność przez $p$ wszystkich liczb postaci $2^{nk}-1$, dla $n=2,3,4, ...$, ale — jak zobaczymy dalej — wszystko to mieści się także w oryginalnym twierdzeniu Fermata.

Powstaje oczywiście ważne pytanie, czy formułując swoje reguły podzielności Brożek zdawał sobie sprawę z tej prawidłowości w ich brzmieniu, której ostatecznym wyrazem jest właśnie twierdzenie Fermata? Pewnej odpowiedzi na to pytanie dać niepodobna. Faktem jest, że nigdzie o tym nie pisze, a wydaje się, że gdyby choć tylko przeczuwał prawdziwość tak ogólnego twierdzenia, to nie omieszkałby uczynić o tym odpowiedniej wzmianki. Przeciwko temu przypuszczeniu przemawia w pewnej mierze także i fakt, że nie dla każdej liczby pierwszej $p$, najmniejszym wykładnikiem, dla którego $2^n-1$ jest podzielne przez $p$, jest liczba $p-1$. Odstępstw od tej reguły, jak widać z podanej poprzednio tabeli reguł Brożka, jest dość dużo, jeżeli więc nie patrzy się na tę tabelę z odpowiedniego punktu widzenia, to prawidłowość taka może ujść uwagi. Istnieje jednak pewien ważki argument przemawiający za tym, że Brożek zdawał sobie sprawę z owej prawidłowości. Mam na myśli okoliczność, że podał on cechy podzielności tylko dla liczb pierwszych do 101 włącznie. Otóż łatwo można by to wytłumaczyć przyjąwszy, że Brożek na-

[14] *Apologia*, s. 140.

prawdę przeczuwał twierdzenie Fermata. Wiedziałby wtedy, że analogiczna cecha podzielności dla 103 mogłaby go wyprowadzić poza liczbę $2^{100}-1$, a tylko do tej liczby miał cyfrowe wartości wyrazów ciągu $\{2^n\}$. Jak było naprawdę? Trudno to rozstrzygnąć, tym bardziej, że na 101 mógł się zatrzymać i z tego po prostu powodu, że — licząc od 3 — jest to dwudziesta piąta z kolei liczba pierwsza (w pierwszej *Rozprawie* zatrzymał się na dziesiątej, równej 31).

Charakterystyczne, że sam Fermat odkrył swoje twierdzenie w związku z owym sposobem tworzenia liczb doskonałych, który przedtem nazwaliśmy regułą Euklidesa. W tym samym mniej więcej czasie, kiedy Brożek przygotowywał swoje *Rozprawy o liczbach doskonałych,* także i kilku matematyków francuskich zajmowało się intensywnie tym zagadnieniem i wieloma problemami pokrewnymi. Głównym inicjatorem tych badań był, jak się wydaje, Frenicle, matematyk-amator rozmiłowany w dociekaniach własności liczb całkowitych. Gdzieś około roku 1636 Fermat zapoznał się — za pośrednictwem Mersenne'a — z wynikami Frenicle'a. Jakkolwiek przedtem jeszcze wiele zapewne czasu poświęcił badaniu liczb zaprzyjaźnionych, liczb, dla których suma ich podzielników jest dwa lub trzy razy większa od nich samych itp., to dopiero współzawodnictwo z Freniclem stało się głównym bodźcem do intensywnych i niezwykle przy tym owocnych badań Fermata nad własnościami liczb całkowitych. Widać to choćby z następującego urywku listu Fermata do Robervala z sierpnia 1640 roku:

„Dalej — pisze Fermat — muszę Panu powiedzieć, że Frenicle od pewnego czasu wzbudził we mnie ochotę do odkrywania tajemnic liczb, w czym, jak mi się wydaje, jest on niezwykle biegły. Posłałem mu szereg pięknych twierdzeń o postępach geometrycznych, które zaczynają się od jedności; twierdzenia te nie tylko odkryłem, ale także i udowodniłem, chociaż ich dowody są dość ukryte. Proszę spróbować je znaleźć, twierdzenia Pan bowiem widział" [15].

Owocem tych dociekań nad „tajemnicami liczb" było między innymi także tak zwane dziś małe twierdzenie *Fermata.* Pierwszą o nim wzmiankę znajdujemy w liście Fermata do Mersenne'a. Dokładna data tego listu jest niepewna, ale wydawcy *Dzieł* Fermata umieszczają go w każdym razie w roku 1640:

---

[15] P. Fermat, *Oeuvres,* t. II, s. 203. Edition de Ch. Henry et P. Tannery, Paris 1894. W dalszym ciągu będę cytował to wydanie po prostu jako P. Fermat, *Oeuvres.*

„Za najważniejszy — pisze w nim Fermat — uważam skrócony sposób znajdowania liczb doskonałych, którego będę się trzymał, jeżeli Frenicle nie wyjawi mi swojej metody.

Oto trzy znalezione przeze mnie twierdzenia, na których mam nadzieję wznieść cały gmach:

Liczby mniejsze o jedność od liczb postępu dwójkowego, jak

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | |
| 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 | 511 | 1023 | 2047 | 4095 | 8191 | itd. |

nazwijmy podstawami liczb doskonałych, ponieważ, ilekroć są one liczbami pierwszymi, służą do ich tworzenia. Napiszmy nad tymi liczbami tyleż liczb postępu naturalnego: 1, 2, 3, 4, 5 itd. i nazwijmy je ich wykładnikami. Twierdzę teraz, że:

1° gdy wykładnik którejś z liczb podstawowych jest złożony, to i jego podstawa jest złożona. Na przykład, ponieważ 6, wykładnik 63, jest złożony, przeto 63 też jest liczbą złożoną;

2° gdy wykładnik jest liczbą pierwszą, to jego podstawa, pomniejszona o jedność, jest podzielna przez podwojony wykładnik. Na przykład, ponieważ 7, wykładnik 127, jest liczbą pierwszą, przeto 126 jest wielokrotnością 14;

3° gdy wykładnik jest liczbą pierwszą, to jego podstawa może być podzielna tylko przez te liczby pierwsze, które są o jedność większe od wielokrotności podwojonego wykładnika lub od podwojonego wykładnika. Na przykład, ponieważ 11, wykładnik 2047, jest liczbą pierwszą, przeto twierdzę, że liczba ta może być podzielna tylko przez liczbę większą o jedność od 22, tj. 23, lub też przez liczbę większą o jedność do jakiejś wielokrotności 22; istotnie, 2047 jest podzielne tylko przez 23 lub 89, z którego po odjęciu jedności pozostaje 88 — wielokrotność 22.

Oto trzy bardzo piękne twierdzenia, które odkryłem i udowodniłem nie bez trudu; mógłbym je nazwać fundamentami znajdowania liczb doskonałych. Nie wątpię, że Frenicle posunął się jeszcze dalej, ale ja przecież dopiero zaczynam i bez wątpienia twierdzenia te uznają za bardzo piękne ci wszyscy, którzy niewiele się tym dotychczas zajmowali; chętnie też poznałbym zdanie o tym pana de Roberval“ [16].

Z przytoczonego fragmentu korespondencji Fermata z Mersennem wynika jasno, że w owym okresie jednym z głównych tematów

[16] P. Fermat, *Oeuvres*, t. II, s. 198.

matematycznych zainteresowań Fermata były liczby doskonałe, a jego badania w tym zakresie dotyczyły przede wszystkim reguły Euklidesa na ich tworzenie. Jak już powiedzieliśmy poprzednio, chodziło tu głównie o znalezienie prostych sposobów na stwierdzenie, czy jakaś liczba postaci $2^n—1$ jest pierwszą czy nie. Wszystkie trzy twierdzenia, podane w przytoczonym liście, stanowią właśnie niezwykle skuteczne narzędzie do tego rodzaju badań. Przy tym dwa pierwsze są bezpośrednimi uogólnieniami bardzo szczególnych wyników Brożka, a ich praktyczne znaczenie, jeżeli chodzi o ich stosowanie w problemie tworzenia liczb doskonałych, pokrywa się w zasadzie ze znaczeniem reguł Brożka. Natomiast trzecie twierdzenie, szczególnie trudne do znalezienia na drodze empirycznej, przewyższa pod tym względem znacznie oba twierdzenia poprzednie. Opierając się bowiem na tym twierdzeniu można bezpośrednio zbadać, czy dana liczba postaci $2^n—1$ jest liczbą złożoną, podczas gdy drugie twierdzenie daje nam informacje nie o w y b r a n e j przez nas liczbie omawianej postaci, ale tylko o pewnych spośród tych liczb. Innymi słowy, twierdzenie drugie, przy dowolnie wybranej liczbie pierwszej $p$, podaje liczby postaci $2^n—1$, które są jej wielokrotnościami, natomiast twierdzenie trzecie, przy dowolnie wybranej liczbie $2^n—1$ podaje wszystkie liczby pierwsze, które mogą być jej podzielnikami. Nie trzeba chyba specjalnie zaznaczać, że właśnie twierdzenie trzecie — odwrotne w pewnym sensie do twierdzenia drugiego — posiada większe znaczenie praktyczne w interesującym nas tu problemie. Zresztą w dalszym ciągu cytowanego powyżej listu podaje Fermat, w jaki sposób, właśnie na podstawie twierdzenia trzeciego, odkrył, że liczba 137438953471, równa $2^{37}—1$, jest podzielną przez 223. Wiedział mianowicie z góry, że liczbę tę mogą dzielić tylko liczby pierwsze określonej postaci, w tym przypadku tylko liczby $2(2\cdot37)+1=149$, $3(2\cdot37)+1=223$ itd., a więc już druga próba dała mu wynik pozytywny.

Warto zaznaczyć, że Brożek natomiast nie umiał stwierdzić, czy liczba $2^{37}—1$ jest liczbą pierwszą czy nie, i dlatego liczby $2^{36}(2^{37}—1)$ nie usunął z tabeli Bongusa. Daje nam to jeszcze jeden argument na poparcie hipotezy, że Brożek nie umiał sformułować małego twierdzenia Fermata. Wyrażone tym twierdzeniem prawo podzielności liczb postaci $2^n—1$ przez liczby pierwsze daje równocześnie wskazówkę, wśród jakich liczb pierwszych należałoby przede wszystkim szukać podzielników ustalonej liczby $2^n—1$. Trzecie twierdzenie Fermata wyjaśnia to zagadnienie do końca, ale i bez niego można by —

znając tylko twierdzenie drugie — zająć się na przykład w przypadku liczby $2^{37}-1$ przede wszystkim zbadaniem jej podzielności przez liczby 149, 223 itd. Wydaje się więc bardzo prawdopodobne, że gdyby Brożek zdawał sobie w pełni sprawę z tego, iż wszystkie jego cechy podzielności mogą być szczególnymi przypadkami pewnej reguły ogólnej, i gdyby umiał tę regułę ogólną choćby tylko sformułować, to mógłby także w prosty sposób znaleźć, że liczba $2^{37}-1$ jest podzielna przez 223.

Zauważmy, że Fermat nie podaje się bynajmniej za pierwszego odkrywcę zawartych w cytowanym liście własności liczb całkowitych. Wprost przeciwnie, wyraża przekonanie, że zna je także już Frenicle. I tak też najprawdopodobniej było. Frenicle nie mógłby z taką swobodą operować dziesięcio- czy dwudziestocyfrowymi liczbami bez znajomości twierdzeń tego typu, ale spośród ówczesnych matematyków (nie licząc Kartezjusza, który — zajęty problemami większej wagi — nie przypisywał tego rodzaju badaniom żadnej wartości) tylko jeden Fermat zdolny był nadać tym twierdzeniom tak ogólną postać i uzasadnić je poprawnymi dowodami [17].

O tym, że w tym okresie Fermat znał już twierdzenie drugie i w tym ogólnym sformułowaniu, w jakim nosi ono dziś jego imię ($a$ — dowolne, niekoniecznie równe 2), świadczy późniejszy tylko o kilka miesięcy list, skierowany tym razem bezpośrednio do Frenicle'a.

„Wydaje mi się — pisze w nim Fermat — że po tym, co powiedziałem, muszę Panu wyjawić podstawę, na której opieram dowody wszystkich twierdzeń dotyczących postępów geometrycznych. Oto ona:

Każda liczba pierwsza dzieli niezawodnie jedną z potęg — 1 dowolnego postępu, a wykładnik tej potęgi jest podzielnikiem danej liczby pierwszej — 1; dalej, po znalezieniu pierwszej potęgi spełniającej ten warunek, wszystkie potęgi, których wykładniki są wielokrotnościami wykładnika pierwszej, także spełniają ten warunek" [18].

Po zilustrowaniu tego twierdzenia odpowiednim przykładem pisze Fermat w dalszym ciągu:

---

[17] Por. J. P. Gram, *Nogle Bemaerkninger om Fermats Taltheory*. Zeuthen Festkr. 1909. Pracę tę znam tylko na podstawie jej streszczenia w „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", t. XXXX, s. 55.

[18] P. Fermat, *Oeuvres*, t. II, s. 208.

„Twierdzenie to jest prawdziwe bez wyjątku dla każdego postępu i wszystkich liczb pierwszych; posłałbym Panu jego dowód, gdyby nie obawa, że list będzie zbyt długi“ [19].

Twierdzenie o podzielności liczb postaci $a^n-1$ przez liczby pierwsze było zatem znane Fermatowi już w roku 1640, a może i nieco wcześniej. Niemniej jednak cytowane powyżej listy opublikowane zostały dopiero w pośmiertnym wydaniu dzieł Fermata w 1679 roku. Oryginalny dowód Fermata podzielił przy tym los dowodów szeregu innych jego twierdzeń. Nie utrwalony w żadnym liście, nie przekazany w żadnym druku, przepadł dla nas bezpowrotnie, tak że pierwszym znanym nam dowodem tego twierdzenia jest dowód Leibniza z roku 1680, również nie opublikowany, ale zachowany za to w rękopisie [20].

Ani Frenicle, ani też Fermat nie ogłaszali drukiem uzyskanych przez siebie wyników. Wyjątkowo tylko pewne z nich, w formie jak gdyby informacji dla szerokiej rzeszy czytelników, przenikały na karty dzieł kompilacyjnych Mersenne'a, który — sam niezbyt tęgi matematyk — spełniał w tej epoce powstawania życia naukowego w nowoczesnym tego słowa znaczeniu rolę całej instytucji. Prowadząc korespondencję z przedstawicielami większości krajów europejskich, licząc wśród swoich przyjaciół ludzi tej miary co Kartezjusz, Fermat, Cavalieri, Torricelli i wielu innych, Mersenne był doskonale poinformowany o najnowszych wydarzeniach i odkryciach we wszystkich prawie dziedzinach nauki, a w szczególności w dziedzinie matematyki i fizyki. Wielokrotnie też wyzyskiwał te informacje w swoich dziełach o charakterze kompilacyjnym, nie zawsze zresztą podając ich źródło. Tak też było i z odkryciami Fermata i Frenicle'a w teorii liczb doskonałych. Część ich została podana, oczywiście bez żadnych dowodów i bliższych szczegółów, w formie krótkiej wzmianki, w *Praefatio generalis* do książki Mersenne'a *Cogitata Physico-mathematica* [21]. Omawiając treść przedkładanej czytelnikowi książki i nawiązując do jednego z jej ustępów, pisze Mersenne:

„Warto by tamże zaznaczyć, aby wszyscy mający książkę Bongusa mogli poprawić jej błędy, że spośród 28 liczb uważanych przez

---

[19] Tamże.

[20] Por. D. Mahnke, *Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung*, Bibliotheca Mathematica (3) 13, s. 29.

[21] F. Marini Mersenni Minimi *Cogitata physico-mathematica in quibus tam naturae quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur*. Parisiis 1644.

niego w rozdziale XXVIII księgi *O liczbach* za doskonałe, nie wszystkie są liczbami doskonałymi, jako że 20 z nich, to liczby niedoskonałe; podał on zatem tylko 8 liczb doskonałych: 6, 28, 496, 8128, 23550336 [22], 137438691328 i 2305843008139952128. Są to liczby 1, 2, 3, 4, 8, 10, 12 i 29 tabeli Bongusa. Tylko one są doskonałymi.

Dalej, liczby doskonałe występują tak rzadko, że zdołano znaleźć ich dotychczas tylko jedenaście, to znaczy jeszcze trzy inne różne od Bongusowych; nie otrzymasz bowiem liczby doskonałej, różnej od wymienionych ośmiu, jeżeli nie będziesz brał w postępie dwójkowym, zaczynającym się od jedności, wykładników większych od 62. Dziewiątą bowiem liczbę doskonałą daje potęga o wykładniku 68, mniej 1, dziesiątą — potęga o wykładniku 128, mniej 1, jedenastą w końcu potęga 258, mniej 1, to znaczy potęga 257, pomniejszona o jedność i pomnożona przez potęgę 256" [23].

Mersenne nawiązuje więc do twierdzeń Bongusa, podobnie jak czyni to Brożek w swoich *Rozprawach o liczbach doskonałych*. Podane w przytoczonym ustępie wyniki stanowią niewątpliwie tylko nieznaczną część rezultatów uzyskanych w tej dziedzinie przez matematyków francuskich. Sięgają one jednak znacznie dalej niż analogiczne tezy naszego uczonego. Wydaje się przy tym, że wyniki te przypisać należy raczej Frenicle'owi niż Fermatowi [24].

Dalsze losy problemu tworzenia liczb doskonałych według reguły Euklidesa i ściśle z nim związanych zagadnień dotyczących liczb pierwszych określonej postaci omawia szczegółowo E. Lucas w swojej, cytowanej już przez nas pracy. Szczegółowe zestawienie wyników, uzyskanych w tej dziedzinie w czasach najnowszych znaleźć można na przykład w artykułach W. Sierpińskiego, ogłoszonych w czasopiśmie „Matematyka" [25].

---

[22] Pomyłka, najprawdopodobniej drukarska, powinno być 33550336.

[23] S. 16.

[24] Oto co na ten temat pisze Paul Tannery: „Nie ulega wątpliwości, że to właśnie w związku z problemem liczb doskonałych Fermat odkrył twierdzenie, które dziś nosi jego imię; wydaje się zresztą, że problem ten stanowił jedną ze specjalności Frenicle'a i jemu to — jak sądzę — a nie Fermatowi, należy przypisać te badania, których wyniki podał Mersenne w słynnym ustępie swoich *Cogitata Physico-mathematica*. P. Tannery, *Sur la date des principales découvertes de Fermat*, Bulletin des Sciences math. et astr. 2e série, t. VII (1883), s. 116—128. Patrz także: P. Tannery, Mémoires scientifiques, t. VI, s. 1—18.

[25] W. Sierpiński, *O liczbach pierwszych*, „Matematyka", VI, (1953), 2(24), s. 11—15 oraz W. Sierpiński, *Liczba pierwsza o 687 cyfrach*, „Matematyka", VII (1954), 1(29), s. 3.

## III

Jak wiadomo, do drugiej *Rozprawy o liczbach doskonałych* dołączył Brożek obszerny ustęp o liczbach zaprzyjaźnionych [26]. Podaje w nim drugą parę takich liczb: 18416 i 17296 (pierwsza para: 220 i 284 była znana jeszcze w starożytności). Reguła ogólna, którą przy tej okazji proponuje i którą następnie stosuje do znalezienia wymienionej pary liczb zaprzyjaźnionych, wymaga dwóch czynności:

I. znalezienia dwóch liczb nieparzystych $p$ i $q$ takich, aby różnica pomiędzy pierwszą z nich a drugą była równa różnicy pomiędzy sumą podzielników (właściwych) drugiej i pierwszej;

II. zbadania, czy po pomnożeniu obu tych liczb przez któryś z wyrazów postępu 1, 2, $2^2$, $2^3$ itd., nie otrzymamy liczb zaprzyjaźnionych.

Sens tego przepisu jest bardzo jasny, a sam przepis można z łatwością otrzymać po trochę tylko uważniejszej analizie problemu. Na to bowiem, aby dwie liczby postaci $2^n p$, $2^n q$, gdzie $p$ i $q$ są nieparzyste, a $n$ jakąś liczbą naturalną, były liczbami zaprzyjaźnionymi, p o t r z e b a, aby liczby $p$ i $q$ spełniały warunek I, to znaczy, aby różnica $p-q$ była równa różnicy pomiędzy sumą podzielników liczb $q$ i $p$. Tak na przykład, dla pary 220 i 284 mamy $n=2$, oraz $p=55$, a $q=71$; podzielnikami liczby 55 są liczby 5 i 11, 71 jest liczbą pierwszą. Suma podzielników liczby 55 wynosi zatem 16 i, jak łatwo sprawdzić, warunek I jest spełniony. Jest to zatem warunek k o n i e c z n y, jaki powinny spełniać liczby $p$ i $q$, jeżeli para $2^n p$, $2^n q$ ma być parą liczb zaprzyjaźnionych. Ale bynajmniej nie wystarczający. Stąd główna słabość reguły Brożka i jej minimalna przydatność do tworzenia par liczb zaprzyjaźnionych. Już samo znajdowanie liczb nieparzystych, spełniających warunek I nie jest rzeczą prostą. Systematyczne ich wyszukiwanie, bez pomocy jakichś dodatkowych reguł, wymagałoby bowiem dokonywania rozkładu na czynniki setek i tysięcy liczb, a fakt, że takich par można by podać stosunkowo dużo, nie tylko nie ułatwiałby pracy, ale wprost przeciwnie, stanowiłby dodatkową trudność, zważywszy, że mnożenie tych par przez wyrazy postępu 1, 2, $2^2$, $2^3$ itd. tylko wyjątkowo mogłoby nam dostarczyć parę liczb zaprzyjaźnionych, gdy tymczasem stwierdzenie nieprzydatności do tego celu wielu innych takich par pochłonęłoby wiele dodatkowej pracy. Tak na przykład, pary 15, 23 i 21, 31

[26] Liczbami zaprzyjaźnionymi nazywamy parę liczb $a$, $b$ takich, że suma podzielników liczby $a$ równa jest $b$, a suma podzielników $b$ równa jest liczbie $a$.

a także 33, 47 itd. czynią wprawdzie zadość warunkowi I, ale do tworzenia liczb zaprzyjaźnionych według przepisu II służyć nie mogą.

W każdym bądź razie widać stąd natychmiast, że reguły Brożka nie można mierzyć tą samą miarą, co na przykład, identycznych zresztą ze sobą, reguł Thabita Ibn Qurrah, Fermata i Kartezjusza: *Liczby* $2^n(3\cdot 2^n-1)\,(3\cdot 2^{n-1}-1)$ *i* $2^n(9\cdot 2^{2n-1}-1)$ *są zaprzyjaźnione, jeżeli tylko* $3\cdot 2^n-1$, $3\cdot 2^{n-1}-1$ *i* $9\cdot 2^{2n-1}-1$ *są liczbami pierwszymi.* Stosowanie tej reguły wymaga tylko stwierdzenia, że pewne, ściśle określone liczby są liczbami pierwszymi, pozwala — innymi słowy — na skoncentrowanie uwagi na pewnych jedynie liczbach, podczas gdy reguła Brożka nie wyklucza, nie eliminuje z pola badań żadnych liczb i jej stosowanie prowadzi do zagadnienia dotyczącego znowu wszystkich liczb całkowitych i pod tym względem w stosunku do problemu wyjściowego nie stanowi żadnego postępu.

Systematyczne wyszukiwanie par liczbowych spełniających warunek I jest nie tyle trudne, ile uciążliwe. Dla uproszczenia, rezygnując ewentualnie z innych par tego typu, można by się ograniczyć do poszukiwania takich par, w których jedna z liczb jest liczbą pierwszą. Wówczas wystarczy każdą po kolei liczbę nieparzystą rozłożyć na czynniki pierwsze, znaleźć wszystkie jej podzielniki, a następnie utworzyć ich sumę z pominięciem jedności i samej liczby. Jeżeli po dodaniu tej sumy do badanej liczby otrzymamy liczbę pierwszą, to właśnie ta liczba pierwsza wraz z liczbą badaną będzie stanowiła szukaną parę. Tak na przykład, liczba 55 rozkłada się na dwa czynniki: 5 i 11. Ich suma wynosi 16. Po dodaniu tej sumy do 55 otrzymujemy 71 — liczbę pierwszą. Tak więc, chcąc znaleźć w ten sposób drugą z kolei parę liczb zaprzyjaźnionych, trzeba by tego rodzaju rachunki, łatwe początkowo, ale później coraz trudniejsze, przeprowadzić aż do liczby 1081, wykluczyć po drodze szereg par spełniających wprawdzie warunek I, ale do tworzenia liczb zaprzyjaźnionych zupełnie nieprzydatnych, i stwierdzić w końcu, że liczba 1081, powiększona o sumę jej podzielników z pominięciem jedności, to jest liczba 1151, jest liczbą pierwszą, a następnie rozpatrzeć wszystkie pary liczbowe, otrzymane z pary 1081, 1151 przez pomnożenie przez liczby 2, 4, 8 i 16. Tymczasem stosowanie reguły Thabita Ibn Qurrah wymagałoby tylko stwierdzenia, że 23, 47 i 1151 są liczbami pierwszymi, a więc znikomej jedynie części tej pracy, co stosowanie reguły Brożka.

Jedno jednak warto jeszcze podkreślić. Otóż, gdybyśmy szukali liczb zaprzyjaźnionych sposobem Brożka, nawet po przyjęciu z góry, że będziemy się ograniczać do rozpatrywania tylko takich par liczb spełniających warunek I, w których jedna jest liczbą pierwszą, to i tak otrzymalibyśmy wszystkie pary liczb zaprzyjaźnionych, jakich może nam dostarczyć reguła Thabita Ibn Qurrah. Istotnie, do podanego przez niego wzoru na liczby zaprzyjaźnione: $2^n(3 \cdot 2^n - 1)\ (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$ i $2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1)$ dochodzi jeszcze dodatkowy warunek, aby czynnik $9 \cdot 2^n - 1$ był liczbą pierwszą, a przecież para liczb $(3 \cdot 2^n - 1)\ (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$ *i* $9 \cdot 2^{2.1-1} - 1$, to właśnie para spełniająca pierwszy warunek Brożka.

Z podanych powyżej powodów można z całą stanowczością stwierdzić, że znalezienie trzeciej pary liczb zaprzyjaźnionych w proponowany przez Brożka sposób, bez pomocy dodatkowych reguł, byłoby wręcz niemożliwe. Nie ulega też wątpliwości, że i znalezienie pary 18416, 17296 kosztowałoby Brożka niemało trudu, gdyby prawdą było to, że znalazł ją samodzielnie, jak to twierdzą Franke i Dianni. Ale tak bynajmniej nie było. I tutaj musimy przejść do drugiej, niezwykle ważnej kwestii: w jakim stosunku pozostają badania Brożka nad liczbami zaprzyjaźnionymi do analogicznych badań na zachodzie Europy?

Zaraz na wstępie przyjdzie nam stwierdzić, że pogląd Frankego i Dianni, jakoby Brożek był pierwszym z matematyków europejskich, który znalazł drugą parę liczb zaprzyjaźnionych, jest bezpodstawny. Na długo bowiem przed naszym uczonym podał ją Piotr Fermat. Wyliczając swoje główne dotychczasowe odkrycia w dziedzinie matematyki, pisze on w liście do Robervala z 22 września 1636 roku między innymi:

„W ten właśnie sposób znalazłem liczbę 672, dla której suma podzielników jest dwa razy od niej większa, tak jak suma podzielników liczby 120 jest dwa razy większa od 120.

Również w ten sam sposób znalazłem nieskończenie wiele liczb mających tę samą własność, co 220 i 284, to znaczy takich, że suma podzielników pierwszej równa jest drugiej, a suma podzielników drugiej równa jest pierwszej. Jeżeli chce Pan przykład dla lepszego zapoznania się z problemem, to proszę:

17296 i 18416

spełniają ten warunek. Jestem pewny, że zgodzi się Pan ze mną, iż to zagadnienie i inne tego rodzaju są bardzo trudne; ich rozwiązanie posłałem, dawniej jeszcze, Panu de Beaugrand“ [27].

---

[27] P. Fermat, *Oeuvres*, t. II, s. 72.

Wynika stąd, że Fermat zajmował się tym problemem jeszcze przed rokiem 1636, w którym to roku Mersenne ogłosił część uzyskanych przez niego wyników w *Préface générale* do dzieła *Harmonie Universelle*, zaznaczając przy tym, że autorem ich jest Fermat. Pisze on mianowicie:

„Gdybym chciał pisać o ludziach wysokiego pochodzenia lub wielkich przymiotów, którzy znajdują w tej części matematyki takie upodobanie, że — być może — nie można by ich już niczego nowego nauczyć, powtórzyłbym nazwisko tego, któremu poświęcona jest księga *O Organach*[28] i dodałbym doń Pana Fermata, radcę Parlamentu Tuluzy, któremu zawdzięczam podanie dwóch liczb 17296 i 18416, których podzielniki odtwarzają je nawzajem, podobnie jak to czynią podzielniki dwóch liczb 220 i 284; ... zna on też niezawodne reguły na znajdowanie nieskończenie wielu innych liczb tego rodzaju"[29].

Wprawdzie nie podaje tu Mersenne sposobu tworzenia liczb zaprzyjaźnionych, ale czyni to już w roku następnym w *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle*[30]. Podobnie jak w roku poprzednim, ogranicza się jednak do podania tylko dwóch pierwszych par liczb zaprzyjaźnionych. Trzecią parę takich liczb, mianowicie parę: 9437056 i 9363584 znajdujemy po raz pierwszy w liście Kartezjusza do Mersenne'a z 31 marca 1638 roku[31]. Kartezjusz podobnymi problemami nigdy się specjalnie nie zajmował, a tę parę liczb zaprzyjaźnionych podał jako odpowiedź na wyzwanie Stefana Pascala i Robervala, uczestniczących po stronie Fermata w słynnym sporze pomiędzy nim a autorem *Rozprawy o Metodzie,* toczącym się wokół *Dioptryki* Kartezjusza z jednej strony, a metody maksimów i minimów Fermata z drugiej. Pytanie, czy Kartezjusz znalazł tę nową parę liczb zaprzyjaźnionych samodzielnie, czy też korzystał przy tym z publikacji Mersenne'a, jest dla nas nieistotne. Ważne jest to, że już w roku następnym, w przedmowie do *Nouvelles Pensées de Galilée*[32], podaje Mersenne wszystkie trzy pary liczb zaprzyjaźnionych:

---

[28] Mowa tu o Stefanie Pascalu, ojcu słynnego Błażeja.

[29] M. Mersenne, *Harmonie Universelle* (1636). Cytuję podług P. Fermata, *Oeuvres,* t. II, s. 20.

[30] Odpowiedni ustęp tego dzieła cytują wydawcy dzieł Fermata. Patrz P. Fermat, *Oeuvres,* t. II, s. 22 i nast.

[31] Por. R. Descartes, *Oeuvres,* Edition de Ch. Adam et P. Tannery, t. II, s. 93 i nast.

[32] *Les nouvelles pensées de Galilée, mathématicien et ingénieur du duc de Florence...,* Paris 1639.

„Nie znano również innych liczb, których podzielniki wzięte naprzemian dawałyby te same liczby, poza liczbami 284 i 220, które nazwano zaprzyjaźnionymi, ponieważ podzielniki 284 dają 220, a podzielniki 220 dają 284. Niedawno jednak znaleziono dwie następujące pary: 18416, 17296 i 9437056, 9363584“ [33].

Wszystkie wymienione powyżej książki Mersenne'a były najprawdopodobniej Brożkowi zupełnie nieznane. Dużą przeszkodę w ich poznaniu stanowił chociażby fakt, że były one pisane w języku francuskim, jakkolwiek trzeba zaznaczyć, że równocześnie z *Harmonie Universelle* ukazał się łaciński przekład tego dzieła. Ale Mersenne wraca jeszcze dwukrotnie w swoich publikacjach do liczb zaprzyjaźnionych. W cytowanej już przez nas książce *Cogitata Physico-mathematica*, bezpośrednio po przytoczonym powyżej ustępie o liczbach doskonałych, pisze Mersenne:

„Są także inne liczby, nazywane zaprzyjaźnionymi, jako że mają one podzielniki, które je odtwarzają nawzajem, takimi są — najmniejsze ze wszystkich — 220 i 284, podzielniki bowiem pierwszej tworzą drugą i, na odwrót, podzielniki drugiej dają dokładnie pierwszą. Takimi również są 18416 i 17296, a także 9437036 i 4363584 i nieskończenie wiele innych“ [34].

Otóż w Bibliotece Jagiellońskiej znajduje się jeden egzemplarz tej książki (pod sygnaturą: Mathesis 1247), łatwo przy tym stwierdzić, że książka ta przeszła przez ręce Brożka [35]. Co więcej znał on z pewnością dokładnie jej treść. Świadczą o tym poczynione przez niego na niej tu i ówdzie notatki, a w szczególności dłuższa notatka na wewnętrznej stronie tylnej okładki. Pisana jest ona niewątpliwie ręką Brożka. Wprawdzie jej treść nie dotyczy tej części książki, w której Mersenne pisze o liczbach zaprzyjaźnionych, ale za to na marginesie tej samej strony, na której o nich mowa, tuż obok przytoczonych powyżej ustępów o liczbach doskonałych i zaprzyjaźnionych znajduje się notatka o następującej treści:

9437036
4718518
2359259
*non sunt*
*amici*

---

[33] Cytuję za wydawcami dzieł Fermata. Patrz P. Fermat, *Oeuvres*, t. IV, s. 66.

[34] S. 16.

[35] W zidentyfikowaniu pisma Brożka pomogła mi kierowniczka Działu Starodruków Biblioteki Jagiellońskiej, p. dr A. Kamińska, za co jej przy tej okazji serdecznie dziękuję.

4363584
2181792
1090896
etc.

Jej sens łatwo zrozumieć. W podanej przez Mersenne'a trzeciej parze liczb zaprzyjaźnionych są dwa błędy, zamiast 9437056 jest 9437036, a zamiast 9363584 jest 4363584. Podana zatem w ten sposób para istotnie nie stanowi pary liczb zaprzyjaźnionych. Widoczne jest to zresztą natychmiast choćby stąd, że już połowa pierwszej liczby jest większa od drugiej, a więc i suma podzielników pierwszej liczby nie może być równa drugiej liczbie. Autorem przytoczonej powyżej notatki marginesowej był także Brożek, podobnie jak i drugiej notatki dotyczącej znowu własności liczb, a umieszczonej obok podanej przez Mersenne'a tabeli podzielników liczby 5040:

*sine ordine sic recensentur*[36].

W pierwotnej wersji niniejszego artykułu (pisanej w październiku 1956) na podstawie przytoczonej powyżej notatki Brożka na marginesie dzieła Mersenne'a i stwierdzenia, że reguła Brożka na tworzenie liczb zaprzyjaźnionych praktycznie nie przedstawia prawie żadnej wartości, wysunąłem hipotezę, że wynik Brożka (tj. druga para liczb zaprzyjaźnionych) nie jest oryginalny. Drugą *Rozprawę o liczbach doskonałych* znałem wtedy jedynie z jej streszczenia w monografii Frankego i z tłumaczenia jej fragmentów w *Wyborze Pism*. Jedyny wówczas egzemplarz *Apologii*, jakim rozporządzała Biblioteka Jagiellońska (sygn. 50849 I) był pożyczony. Tymczasem z końcem 1956 roku Biblioteka pozyskała skądś drugi egzemplarz tego dzieła (sygn. 355840 I Mag. St. Dr. XVII), tak że kiedy w grudniu tego roku ponownie zaglądnąłem do Biblioteki, mogłem już zapoznać się z oryginałem drugiej *Rozprawy* Brożka. I cóż się okazało? Oprócz szeregu zdań potwierdzających moją hipotezę o sposobie tworzenia sita dla liczb postaci $2^n$—1, znalazłem w nim i taki oto ustęp:

„Nie udowodniono, że nie ma więcej liczb zaprzyjaźnionych. Długo pilnie tę rzecz badał czcigodny Stanisław Pudłowski, obojga praw doktor i profesor, sławny ze swego wybornego i gruntownego wykształcenia; krótko przed śmiercią pisał do mnie podając za Mersennem parę 18416 i 17296, a także parę 9437036 i 4363584. Ale te

[36] Na przedostatniej stronie w *Praefatio ad lectorem* przed księgą *De hydraulicis et pneumaticis phaenomenis*.

ostatnie liczby od razu okazują się nieprzydatne, połowa bowiem większej jest o wiele większa od mniejszej, a więc suma jej podzielników przewyższa liczbę mniejszą“ [37].

Wynik Brożka jest zatem naprawdę nieoryginalny! Co więcej nawet, Brożek wcale tego nie ukrywa. Zupełnie natomiast nie rozumiem, jak to się stało, że dotychczasowi badacze matematycznych pism Brożka tego ustępu w ogóle nie zauważyli. Czyżby nie było go w tym egzemplarzu *Apologii*, którym się posługiwali?

Przy okazji warto także od razu zaznaczyć, że i szereg innych wiadomości o własnościach liczb całkowitych zaczerpnął Brożek z dzieła Mersenne'a. Tak na przykład, podaje on w drugiej *Rozprawie* liczby 120 i 672, jako przykłady liczb, dla których suma podzielników jest dwa razy większa od samych liczb (porównaj cytowany list Fermata z 22.IX.1636) i liczbę 30240 jako przykład liczby, dla której suma podzielników jest trzykrotnie większa od samej liczby. Wszystkie te przykłady, obok wielu innych tego samego typu, można znaleźć w *Praefatio generalis* dzieła *Cogitata Physico-mathematica*. Tym razem jednak Brożek nie wspomina o źródle swoich informacji, podobnie jak i pomija zupełnym milczeniem fakt, że w tym właśnie dziele Mersenne informuje o wyniku weryfikacji liczb rzekomo doskonałych Bongusa.

Jeszcze raz, tym razem tuż przed swoją śmiercią, wraca Mersenne do problemu liczb zaprzyjaźnionych w dziele *Novarum Observationum Physico-mathematicarum F. Marini Mersenii Minimi tomus III, quibus accessit Aristarchus Samius de Mundi systemate*, wydanym w Paryżu w 1647 roku. W rozdziale *De numerorum arcanis*, na s. 180 podaje mianowicie, nawiązując do poprzednich informacji o liczbach zaprzyjaźnionych, umieszczonych w *Cogitata Physico-mathematica*, sposób ich tworzenia.

„W tym samym miejscu mowa o liczbach zaprzyjaźnionych, które tak oto możesz znaleźć. Obierz taką liczbę należącą do postępu dwójkowego, aby jej trzykrotność, pomniejszona o 1, była liczbą pierwszą i aby dwukrotność tej ostatniej liczby, powiększona o 1, była także liczbą pierwszą, po pomnożeniu jej przez podwojenie liczby wziętej z postępu dwójkowego powstanie pierwsza z liczb zaprzyjaźnionych, iloczyn zaś dwóch pierwszych liczb, pomnożony jeszcze przez wymienioną liczbę postępu dwójkowego da drugą liczbę zaprzyjaźnioną“.

[37] *Apologia*, s. 154.

Łatwo sprawdzić, że jest to właśnie reguła Thabita Ibn Qurrah, jeżeli bowiem obraną liczbą postępu dwójkowego będzie $2^{n-1}$, to pierwsza z wymienionych przez Mersenne'a liczb będzie miała postać $3 \cdot 2^{n-1} - 1$, druga zaś będzie równa

$$2(3 \cdot 2^{n-1} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^n - 1$$

a trzecia

$$(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1) + 3 \cdot 2^{n-1} - 1 + 3 \cdot 2^n - 1 = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

a więc zupełnie tak samo jak u matematyka arabskiego. Regułę tę podał Mersenne'owi Fermat. W nieco innej postaci ogłosił ją Mersenne, jak już pisałem, w 1639 roku w *Nouvelles Pensées de Galilée*. Również i *Novarum Observationum Physico-mathematicarum F. Marini Mersenni Minimi tomus* III znajduje się w Bibliotece Jagiellońskiej (sygn. Medicina 5741 i 5742, oprawione wraz z *Medicina Practica Francisci Feynei)*, Brożek go jednak najprawdopodobniej nie znał, i to tłumaczyłoby, dlaczego jeszcze w 1652 roku twierdzi, że nie znaleziono dotychczas ogólnej reguły na tworzenie liczb zaprzyjaźnionych.

## IV

Tak więc, wydaje się, że główny trzon, punkt wyjścia a zarazem najistotniejszy i najwartościowszy wynik obu *Rozpraw o liczbach doskonałych* stanowią:

1° koncepcja sita eliminującego liczby złożone postaci $2^n - 1$, częściowe jego skonstruowanie i zastosowanie do krytyki liczb rzekomo doskonałych Bongusa,

2° bliższa analiza problemu tworzenia liczb zaprzyjaźnionych, tak bowiem należy ocenić treść reguły Brożka na tworzenie takich liczb, sama zaś reguła, jak starałem się to wykazać, z trudem tylko zasługuje na tę nazwę.

Trudno odmówić tym wynikom i koncepcjom oryginalności i ważności. Z drugiej jednak strony nie można zbytnio przeceniać oryginalnego wkładu Brożka do teorii liczb, szczególnie jeżeli wziąć pod uwagę poziom i problematykę specjalnie w tym okresie bujnego rozkwitu matematyki, który przypadł na ostatnie 20 lat życia Brożka, kiedy to nowe zupełnie horyzonty odkrywali Cavalieri i Torricelli we Włoszech, Kartezjusz, Fermat, Pascal, Desargues, Roberval i wielu innych we Francji. Tymczasem z historii problemów, którym poświęcone były *Rozprawy* Brożka, wynika niedwuznacznie, że w czasie pracy nad nimi Brożek stracił już kontakt z matematyką europejską, czego trudno nie żałować, współpraca bowiem, a nawet wymiana myśli z czołowymi przedstawicielami matematyki na zachodzie Europy, pozwoliłaby niewątpliwie Brożkowi na pełniejsze wykorzystanie swego matematycznego talentu. Charakterystycznym wydaje się przy tym fakt, że to nie Brożek, ale jego przeciwnik w sporze o istnienie próżni, Walerian Magni, utrzymywał korespondencję z Mersennem. Wśród korespondentów i przyjaciół Mersenne'a była w ogóle spora garstka mieszkańców Polski lecz Brożka brakło niestety w ich liczbie [38].

## О РАБОТАХ ЯНА БРОЖЕКА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ


Выдающийся польский математик XVII в. Ян Брожек (Joannes Broscius — 1585—1652) в своих двух трактатах под общим заглавием „De numeris perfectis disceptatio" (первое издание первого трактата — 1637, первое издание второго — 1652), показал, что 10 из 20 чисел вида $2^{n-1}(2^n-1)$, которые Бонгус („De mistici numerorum significatione" — Bergamo 1583) и другие математики считали совершенными, таковыми не являются. Как известно, для этого достаточно было доказать, что соответствующие числа вида $2^n-1$ не являются первыми числами. С этой целью Брожек формулирует (не приводя доказательств) 25 признаков делимости числа ряда $(2^n-1)$ через очередные первые числа от 3 до 101:

$$2^{2k}-1=0 \text{ (mod 3)};\ 2^{4k}-1=0 \text{ (mod. 5)};\ \ldots\ 2^{8k}-1=0 \text{ (mod. 17)};$$
$$2^{100k}-1=0 \text{ (mod. 101)};\ (k=1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Следовательно, это отдельные случаи так называемой малой теоремы Ферма.

Автор статьи показывает, как Брожек, пользуясь ситом Эрастофена, мог простейшим образом открыть указанные выше признаки делимости и возможно обосновать их. Он выдвигает при этом гипотез, что создание для чисел ряда $(2^n-1)$ сита, аналогичного ситу Эрастофена для ряда натуральных чисел, было главным намерением Брожека, и что 25 приведенных признаков являются началом именно такого сита. В связи с этим автор статьи предлагает принять для упомянутых выше утверждений Брожека общее название сита Брожека. В качестве обоснования своего гипотеза автор приводит несколько выдержек из обоих трактатов Брожека, которые говорят в пользу этого гипотеза.


---

[38] Oto co pisze na ten temat H. de Coste w *La vie du R. P. Marin Mersenne: „Après la mort l'on a trouvé dans sa cellule plusieures lettres qui lui ont été écrites par Mr le Cardinal François Barbarin..., par le R P. Valerien Magni docte Capucin Milanez, aussi de Varsovie,..., par feu Mr Jean Charles Comte de Conopaskij, Abbé de Tinez, de Vachory en Pologne: par Jean Hevelius Eschevin, de la ville et République de Danzick au même Royaume: par Laurens Eichstadius Medecin, de la même ville de Danzick: par Joh. Mochingerus de la même ville:..*" Cytuję podług artykułu B. Boncompagni, *Intorno alcune lettere di Evangelista Torricelli, del P. Marino Mersenne e di Francesco du Verdus.* „Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche", t. VIII.

Много места отведено в статье освещению той части истории математики на Западе Европы, которая непосредственно связана с темой трактатов Брожека. В частности, приведен ряд отрывков из переписки Ферма, Френикла, Мерсена и соответствующие выдержки из трудов этого последнего.

Часть своего второго трактата на тему совершенных чисел Брожек посвятил рассуждениям по вопросам дружественных чисел. Ему принадлежит, в частности, одно правило, касающееся образования этого рода чисел. Однако, в польской литературе, посвященной работам Брожека по математике, монографии Я. Франке (1884) и Ю. Дианни (1949), результаты его работ в этой области теории чисел оценивались в корне неправильно.

Автор статьи более подробно анализирует упомянутое правило Брожека об образовании дружественных чисел и доказывает, что оно почти целиком непригодно для той цели, которой должно было служить. Кроме того автором доказывается, что некоторые результаты, приведенные Брожеком (вторая по счету пара дружественных чисел 18416 и 17296, числа 120 и 672, для которых сумма делителей в два раза больше чисел и т. д.), и считавшиеся до сих пор его оригинальным достижением, были им взяты из известного труда Мерсена „Cogitata physico-mathematica".

Также и в этом случае автор статьи приводит исчерпывающие сведения по истории теории дружественных чисел в первой половине XVII века.

## JOANNES BROSCIUS AND HIS DISSERTATIONS ABOUT THE THEORY OF NUMBERS

Jan Brożek (Joannes Broscius 1585—1652) a prominent Polish mathematician in two of his dissertations under a common title De numeris perfectis disceptatio (first edition of the first dissertation was published in 1637, first edition of the second — in 1652) has established that among the 20 numbers of the type $2^{n-1}$ $(2^n - 1)$ which Bongus (De mistica numerorum significatione, Bergamo 1583) and other mathematicians considered to be perfect, 10 of them are not perfect. It is common knowledge that to attain this end it is only necessary to prove that the corresponding numbers of the type $2^n - 1$ are not prime numbers. In order to reach this end Brożek formulates (giving no proof) 25 properties of divisibility of numbers belonging to the sequence $(2^n - 1)$ by succesive prime numbers from 3 to 101:

$$2^{2k} - 1 = 0 \pmod 3;\ 2^{4k} - 1 = 0 \pmod 5; \ldots\ 2^{8k} - 1 = 0 \pmod{17} \ldots$$
$$2^{100k} - 1 = 0 \pmod{101}\ (k = 1, 2, 3) \ldots$$

These are therefore particular cases of the so called little Fermat's theorem.

The author of this article demonstrates how Broscius was able to discover, with the aid of Erastostenes sieve, in a very simple way the above named properties of divisibility and to prove them. He assumes that Brożek's chief intention was the formulation of a sieve for numbers of the sequence $(2^n - 1)$, analogues to the Erastostenes sieve for natural numbers, and that the 25 proporties were just the beginning of such a sieve. He proposes therefore that the above named theorems should be given a common name-Brożek's sieve. To establish his claim the author gives a number of quotations from both Brożek's dissertations.

A large part of this article is devoted to make the Polish reader acquainted with such fragments of the history of mathematics in Western Europe that are directly connected with Brożek's dissertations. He gives a number of quotations taken from correspondence of Fermat, Frenicle and Mersenne and whole passages from the works of the last named.

A part of his second dissertation on perfect numbers Brożek devotes to the problem of friendly numbers. Among others he is the author of a certain rule concerning the formation of such numbers. In the Polish literature however which deals with the mathematical works of Brożek (monograph by

J. Franke — 1884 and J. Dianni — 1949) the results obtained by Brożek in this department of the theory of numbers have been wrongly interpreted.

The author examines closely the above named Brożek's rule on the formation of friendly numbers and demonstrates its complete uselessness for the purpose for which it was intented. He demonstrates moreover that a whole number of results obtained by Brożek (the second consecutive pair of friendly numbers 18416 and 17296, numbers 120 and 672 whose sum of divisors is twice as great as the numbers themselves a.s.f.) and which hitherto were considered to be Brożek's original work were taken by him from well known work of Mersenne Cogitata physico-mathematica.

As he has done before the author provides here abundant information as to the history of the theory of friendly numbers in the first half of the XVII century.