Aszot T. Grigorjan, Boris A. Rozenfeld

MECHANIKA NIEEUKLIDESOWA

Mechanika nieeuklidesowa, czyli mechanika klasyczna w przestrzeni nieeuklidesowej, a przede wszystkim w przestrzeni Łobaczewskiego, powstała pod koniec lat 60-tych XIX w., kiedy idee Łobaczewskiego zaczęły przyjmować się wśród matematyków. Do rozwoju tej mechaniki przyczyniła się głównie chęć wyjaśnienia, czy geometria nieeuklidesowa nie pozostaje w sprzeczności z zasadami mechaniki klasycznej. W razie bowiem stwierdzenia takiej sprzeczności można byłoby wysnuć wniosek, że w rzeczywistym świecie obowiązuje geometria Euklidesa, a nie nieeuklidesowa.

Pomysł opracowania mechaniki nieeuklidesowej w tym właśnie celu wysunął jeszcze sam Nikołaj Łobaczewski w swej podstawowej pracy *O podstawach geometrii* (1829—1830). Nazywając odkryty przez siebie system „geometrią urojoną", pisał on: „Pozostawałoby zbadać, jakiego rodzaju zmiana nastąpi wskutek wprowadzenia geometrii urojonej do mechaniki i czy nie napotkamy tu pojęć o naturze rzeczy, przyjętych już i bezspornych, które zmuszą nas jednak do ograniczenia lub wręcz do odrzucenia zależności linii od kątów" [1].

Pierwszą pracą z zakresu mechaniki nieeuklidesowej była rozprawa matematyka włoskiego Angela Genocchi'ego *W sprawie dowodu Davieta de Foncenex* [2]. Miała ona na celu wykazanie, że dowód prawa składania sił za pomocą równoległoboku (autorem tego dowodu był zapewne Lagrange), opublikowany w 1760 r. w Turynie przez Davieta de Foncenex, zachowuje moc również w przestrzeni Łobaczewskiego. W 1870 r. ukazują się prace: Niemca Ernsta Scheringa *Siła ciężkości w przestrzeni Gaussa* oraz Belga Josepha de Tilly *Studia z zakresu mechaniki abstrakcyjnej* [3]. Przez przestrzeń Gaussa rozumiał Schering przestrzeń Łobaczewskiego, której geometrię odkryli niezależnie od siebie Łobaczewski, Janos Bolyai i Gauss; Gauss nie ogłosił wyników tych badań i dowiedziano się o nich dopiero po jego śmierci.

W pracach Scheringa i Tilly'ego, podobnie jak i w pracy Genocchiego sformułowane zostało prawo składania sił w przestrzeni Łobaczewskiego, przy czym Genocchi i Schering określali siły za pomocą punktów przyłożenia i wielkości, a Tilly — za pomocą skierowanych odcinków. Genocchi obok przestrzeni Łobaczewskiego rozpatrywał również prze-

---

[1] N. I. Łobaczewskij, *O naczałach gieomietrii.* W: *Połnoje sobranije soczinienij.* T. 1. Moskwa—Leningrad 1946, s. 261.

[2] A. Genocchi, *Intorna ad dimonstrazione di Daviet de Foncenex.* „Atti della Ra Accademia delle Scienze di Torino", t. 4, 1869, ss. 323—327.

[3] E. Schering, *Die Schwerkraft im Gaussischen Raum.* „Nachrichten der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften", 1870, ss. 311—321; J. de Tilly, *Études de Mécanique abstraite.* „Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Academie Royale de Belgique", t. 21, 1870.

strzeń Riemanna, Schering zaś poświęcił składaniu sił w wielowymiarowych przestrzeniach Riemanna i Łobaczewskiego specjalną pracę *Siła ciężkości w wielowymiarowych przestrzeniach Gaussa i Riemanna* [4].

Ogólną teorię wektorów ślizgających się w przestrzeniach Euklidesa, Łobaczewskiego i Riemanna, które można rozpatrywać jako przestrzeń rzutową o trzech wymiarach, pierwszy próbował zbudować matematyk niemiecki Ferdinand Lindemann w pracy *O nieskończenie małych ruchach i o układach sił przy ogólnym wymiarowaniu rzutowym* [5]. Ustalił on naprzód prawo składania w przestrzeniach o metryce rzutowej nieskończenie małych obrotów i przesunięć, które w przestrzeniach nieeuklidesowych wyrażane są za pomocą wektorów ślizgających się, a następnie przeniósł to prawo na siły traktowane jako nieskończenie małe obroty. Dowiódł przy tym wielu bardzo wyrafinowanych teorematów związanych ze ślizgającymi się wektorami.

Dogodną charakterystykę nieskończenie małych ruchów kinematycznych i dynamicznych skrętników określonych przez dowolne układy sił — zaproponował dla przestrzeni nieeuklidesowych matematyk angielski William Kingdon Clifford we *Wstępnym zarysie bikwaternionów* [6]. Twórca teorii kwaternionów i autor terminu „wektor" William Rowan Hamilton nazwał bikwaternionami i biwektorami odpowiednio kwaterniony i wektory o współrzędnych zespolonych. Clifford uogólnił pojęcie bikwaternionów i biwektorów Hamiltona, które nazywał bikwaternionami i biwektorami hiperbolicznymi, i zdefiniował bikwaterniony i biwektory eliptyczne i paraboliczne, tzn. takie kwaterniony i wektory, których współrzędne są w pierwszym wypadku liczbami postaci $a + be$ ($e^2 = 1$), a w drugim — liczbami postaci $a + b\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 0$). Liczby te nazywał Clifford odpowiednio liczbami zespolonymi eliptycznymi i parabolicznymi, obecnie nazywa się je odpowiednio liczbami podwójnymi i dualnymi. Clifford dowiódł, że każdemu biwektorowi parabolicznemu $\mathbf{a} + \mathbf{b}\varepsilon$ można przyporządkować w przestrzeni Euklidesa skrętnik, składający się z wektora ślizgającego się $\mathbf{a}$, skierowanego wzdłuż pewnej osi i określającego obrót dokoła niej, oraz współliniowego z nim wektora swobodnego $\mathbf{b}$, wyznaczającego ruch postępowy wzdłuż tejże osi; stworzył on w ten sposób podstawę rachunku śrubowego w przestrzeni Euklidesa. Zarazem jednak Clifford wykazał, że każdemu biwektorowi $\mathbf{a} + \mathbf{b}\varepsilon$ można przyporządkować ruch śrubowy przestrzeni Riemanna, składający się z przesunięć wzdłuż dwóch biegunów względem siebie prostych, który również można traktować jako ruch składający się z przesunięć wzdłuż jednej z tych prostych i z obrotu dokoła niej. W 1874 r. Clifford zastosował ten aparat myślowy do mechaniki przestrzeni Riemanna w pracy *Ruch ciała sztywnego w przestrzeni eliptycznej* [7].

W 1881 r. ideę Clifforda rozciągnął na przestrzeń Łobaczewskiego H. Cox w pracy *Współrzędne jednorodne w geometrii urojonej i ich*

---

[4] E. Schering, *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen.* „Nachrichten der Königliche Gesellschaft der Wissenschaften", 1873, ss. 148—159.

[5] F. Lindemann, *Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischen Massbestimmung.* „Mathematische Annalen", t. 7, 1874, ss. 56—143.

[6] W. K. Clifford, *Preliminary Sketch of Biquaternions.* „Proceedings of London Mathematical Society", t. 4, 1873, ss. 381—395.

[7] W. K. Clifford, *Motion of a Solid in Elliptic Space,* „Mathematical Papers", 1882, ss. 378—384.

zastosowanie do układu sił[8], w której wykazał, że każdemu bikwaternionowi hiperbolicznemu **a** + **b***i* można przyporządkować ruch śrubowy przestrzeni Łobaczewskiego składający się z przesunięcia wdłuż pewnej prostej i obrotu dokoła niej. W 1884 r. matematyk i fizyk angielski Robert Samuel Heath opublikował artykuł *O dynamice ciała sztywnego w przestrzeni eliptycznej*[9], w którym rozwijał idee Clifforda.

W 1892 r. matematyk i filozof rosyjski Paweł Juszkiewicz napisał pracę — opublikowaną dopiero w 1898 r. — *O składaniu sił w przestrzeni hiperbolicznej*[10]. Autor, rozpatrując siły w przestrzeni Łobaczewskiego i idąc za Tilly'm, przedstawia je za pomocą odcinków skierowanych. Rozważył on składanie sił, zarówno w wypadku, gdy są one skierowane wzdłuż przecinających się prostych, jak i w tych wypadkach, gdy są skierowane wzdłuż prostych równoległych i rozchodzących się.

W 1897 r. na Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Zurychu mechanik francuski Jules Andrade wystąpił z referatem *Statyka nieeuklidesowa*. Wyniki badań włączył on w postaci aneksu *Statyka geometrii Łobaczewskiego, Euklidesa i Riemanna* do swej książki *Wykład mechaniki fizycznej*[11].

Największe jednak znaczenie w rozwoju mechaniki nieeuklidesowej mają prace Aleksandra Kotielnikowa *Rachunek skrętniczny* i *Rzutowa teoria wektorów*[12]. W pierwszej z tych prac autor rozwinął algebrę bikwaternionów parabolicznych Clifforda i zastosował ją kolejno do statyki, kinematyki i dynamiki przestrzeni euklidesowej, wyrażając w ten sposób skrętniki zarówno kinematyczne, jak i dynamiczne. W pracy następnej uogólnił on swą teorię na przestrzenie nieeuklidesowe Riemanna i Łobaczewskiego, zastępując odpowiednio bikwaterniony paraboliczne — eliptycznymi i hiperbolicznymi. Tytuł *Rzutowa teoria wektorów* tłumaczy się tym, że Kotielnikow, idąc za Lindemannem, buduje jednolitą teorię wektorów we wszystkich trzech podstawowych przestrzeniach o metryce rzutowej.

Przez wektor w przestrzeni nieeuklidesowej rozumiał Kotielnikow uporządkowaną parę punktów, czyli skierowany odcinek, przy czym wektory jednakowej długości, leżące na tej samej prostej i mające ten sam zwrot są równoważne. Rozpatrywane przezeń wektory były przeto analogami wektorów ślizgających się przestrzeni euklidesowej. Natomiast nie istnieją w przestrzeniach nieeuklidesowych analogi wektorów swobodnych przestrzeni euklidesowej, ponieważ w przestrzeni Riemanna każde dwie proste leżące w jednej płaszczyźnie przecinają się, a w przestrzeni Łobaczewskiego — proste równoległe wprawdzie istnieją, ale własności ich różnią się zasadniczo od własności prostych równoległych w przestrzeni euklidesowej.

Każdemu wektorowi długości *a* Kotielnikow przyporządkował liczby

---

[8] H. Cox, *Homogeneous Coordinates in Imaginary Geometry and their Application to Systems of Forces*. „Quarterly Journal of Mathematics", t. 18, 1881,

[9] R. S. Heath, *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space*. „Philosophical Transactions of the Royal Society of London", t. 179, 1884, cz. 2, ss. 281—324.

[10] P. S. Juszkiewicz, *O służenii sił w gipierboliczeskom prostranstwie*. „Wiestnik Opytnoj Fiziki i Elementarnoj Matiematiki", t. 22, 1898, ss. 258—263 i 285—293.

[11] J. Andrade, *Leçons de Mécanique physique*. Paris 1898.

[12] A. P. Kotielnikow, *Wintowoje isczislenije i niekotoryje primienienija jego k gieometrii i miechanikie*. Kazań 1895; tenże, *Projektiwnaja tieorija wiektorow*. Kazań 1899.

nieujemne: w wypadku przestrzeni Łobaczewskiego *rtha*, a w wypadku przestrzeni Riemanna — *rtga* gdzie *r* oznacza promień krzywizny przestrzeni. Liczby *rtha* i *rtga* nazywał Kotielnikow tensorami wektora. Każdemu wektorowi i każdej liczbie odpowiada wg Kotielnikowa nowy wektor o tym samym początku, tej samej prostej działania i tym samym zwrocie, gdy liczba jest dodatnia, a o zwrocie przeciwnym, gdy liczba jest ujemna, przy czym tensor nowego wektora równy jest iloczynowi tensora danego wektora przez absolutną wartość danej liczby. Nowy wektor nazywa on iloczynem danego wektora przez daną liczbę. Najważniejsza jest jednak w teorii Kotielnikowa definicja składania wektorów. Przez sumę dwóch wektorów o wspólnym początku rozumie on wektor o początku w tymże punkcie a o końcu w punkcie przecięcia prostych łączących końce danych wektorów z punktami przecięcia ich prostych z płaszczyzną biegunową ich wspólnego początku względem absolutu.

Definicja ta odnosi się w równej mierze do przestrzeni Łobaczewskiego, jak i do przestrzeni Riemanna. Natomiast w przestrzeni euklidesowej, w której rolę płaszczyzny biegunowej względem absolutu odgrywa dla wszystkich punktów przestrzeni płaszczyzna nieskończenie odległa, definicja pokrywa się ze zwykłym określeniem sumy dwóch wektorów jako przekątnej równoległoboku. Kotielnikow dowiódł przy tym, że jego definicja sumy wektorów posiada wszystkie własności zwykłej sumy wektorów: przemienność, łączność itd., określane przezeń mnożenie wektorów: przez liczby jest rozdzielne w stosunku do ich dodawania.

Później, w 1927 r., geometra kazański Piotr Szyrokow, na którego duży wpływ wywarł Kotielnikow, zaproponował w pracy *Przekształcenie całek skrętnicznych w przestrzeni o stałej krzywiźnie* [13] konstrukcję geometryczną poglądowo przedstawiającą zarówno kotielnikowską definicję mnożenia wektorów przez liczbę, jak i jego definicję dodawania wektorów w przestrzeni nieeuklidesowej. Szyrokow przyjął za punkt wyjścia, że przestrzeń Riemanna można sobie wyobrazić jako hipersferę (trójwymiarową powierzchnię kuli) w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej (przy czym punkty diametralnie przeciwstawne utożsamiają się ze sobą), a przestrzeń Łobaczewskiego — jako hipersferę w czterowymiarowej przestrzeni pseudoeuklidesowej (przy czym i tu diametralnie przeciwstawne punkty utożsamiają się). Szyrokow dowiódł, że tensor wektora przestrzeni nieeuklidesowej jest zbieżny z modułem wektora czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej lub pseudoeuklidesowej w hiperpłaszczyźnie stycznej do hipersfery w punkcie początkowym wektora przestrzeni nieeuklidesowej będącego rzutem wektora przestrzeni nieeuklidesowej ze środka hipersfery na wspomnianą hiperpłaszczyznę styczną. Stwierdził on również, że iloczyn wektora przestrzeni nieeuklidesowej i pewnej liczby odpowiada iloczynowi odpowiadającego mu wektora przestrzeni czterowymiarowej przez tę liczbę, a suma dwóch wektorów przestrzeni nieeuklidesowej mających wspólny początek odpowiada sumie odpowiadających im wektorów przestrzeni czterowymiarowej. Za zrealizowania zaś wszystkich własności iloczynu wektora i liczby oraz własności sumy wektorów w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej

[13] Por. pracę zbiorową *In memoriam N. I. Lobatschewskii*. Kazań 1927, ss. 119—134, a także: P. A. Szyrokow, *Izbrannyje raboty po gieometrii*. Kazań 1966, ss. 302—314.

lub pseudoeuklidesowej wynika zrealizowanie tych własności w przestrzeniach nieeuklidesowych zdefiniowanych przez Kotielnikowa.

Kotielnikow przedstawiał siły w przestrzeniach nieeuklidesowych jako wektory tych przestrzeni. Dwa układy sił w przestrzeni nieeuklidesowej są równoważne, gdy od jednego z nich można przejść do drugiego za pomocą następujących operacji: przenoszenia sił wzdłuż ich prostych działania bez zmiany ich długości (a więc i tensorów) i zwrotów; składania sił o wspólnym początku według podanej przez niego reguły; rozkładania siły na sumę sił o wspólnym początku według tej samej reguły; dodawania w dowolnym punkcie siły zerowej albo — co jest równoznaczne — dwóch równych sił przeciwstawnych. Terminologia tłumaczy się tu tym, że w wypadku przestrzeni euklidesowej można zawsze otrzymać z jednego układu sił drugi, wywierający na układ punktów materialnych to samo działanie mechaniczne za pomocą analogicznych operacji, przy czym wektory składa się oczywiście zgodnie z zasadą równoległoboku.

Kotielnikow wykazał, że układ sił przestrzeni nieeuklidesowej, leżących w jednej płaszczyźnie, jest zawsze równoważny jednej sile. Ponieważ każde dwie proste przecinają się na płaszczyźnie rzutowej, przeto każde dwie siły w płaszczyźnie nieeuklidesowej można przesunąć wzdłuż ich prostych działania do punktu przecięcia tych prostych i dodać je w tym punkcie wg podanej reguły. W przestrzeni Riemanna otrzymamy przy tym zawsze zwykłą siłę, w przestrzeni zaś Łobaczewskiego w wypadku składania sił skierowanych wzdłuż prostych równoległych lub rozchodzących się otrzymamy siłę skierowaną wdłuż prostej stycznej do absolutu lub wzdłuż prostej idealnej. Z tego względu w przestrzeni Riemanna nie istnieją analogi par sił przestrzeni euklidesowej, w przestrzeni zaś Łobaczewskiego istnieją dwa rodzaje analogów par sił: równoważne sile skierowanej wzdłuż prostej stycznej do absolutu oraz równoważne sile skierowanej wzdłuż prostej idealnej. Ogólnie biorąc, układ sił w przestrzeni nieeuklidesowej — jak to wykazał Kotielnikow — jest równoważny dwóm siłom, przy czym w przestrzeni zawsze istnieją takie punkty, że przy zastąpieniu układu kilku sił równoważnym mu układem dwóch sił linie działania tych dwóch sił są wzajemnie biegunowe względem absolutu. Te dwie proste wzajemnie biegunowe noszą nazwę osi układu sił w przestrzeni nieeuklidesowej. W przestrzeni Riemanna obie te osie są równorzędne, zaś w przestrzeni Łobaczewskiego jedna z osi zawsze przecina się z absolutem, druga zaś nie.

Zamiast punktów przestrzeni nieeuklidesowej można rozpatrywać płaszczyzny biegunowe względem nich w stosunku do absolutu. Ponieważ w przestrzeni Riemanna każdy punkt posiada płaszczyznę biegunową, przeto każdy wektor w tej przestrzeni, rozpatrywany jako para punktów, można zastąpić parą płaszczyzn biegunowych względem tych punktów; płaszczyzny te muszą się przecinać wzdłuż prostej, będącej linią działania danego wektora, biegunowej względem absolutu. W przestrzeni Łobaczewskiego każdy punkt rzeczywisty posiada idealną płaszczyznę biegunową, każdy zaś punkt idealny posiada rzeczywistą płaszczyznę biegunową. Dlatego też i tu można zastąpić każdy wektor parą przecinających się płaszczyzn, przy czym linia przecięcia tych płaszczyzn jest tu również biegunowa względem prostej działania danego wektora. Jeżeli się ograniczyć do rozpatrywania punktów rzeczywistych przestrzeni Łobaczewskiego, to należy rozpatrywać w niej jedynie wektory określane przez pary punktów rzeczywistych, wektory zaś określane przez pary punktów idealnych trzeba zastępować parami biegunowych względem nich płaszczyzn rzeczywistych.

Kotielnikow nazywał parę płaszczyzn przecinających się w określonym porządku rotorem, a linię przecięcia — osią rotoru. Można zatem powiedzieć, że każdy układ sił w przestrzeni nieeuklidesowej Riemanna i Łobaczewskiego jest równoważny wektorowi i rotorowi, przy czym oś rotoru pokrywa się z prostą wektora. W wypadku przestrzeni Łobaczewskiego wektor jest określany przez parę punktów rzeczywistych, rotor — przez parę płaszczyzn rzeczywistych. Wektor swobodny w przestrzeni euklidesowej można również wyrazić za pomocą pary płaszczyzn uporządkowanych w określony sposób, w tym wypadku jednak płaszczyzny nie przecinają się, lecz są równoległe; są one przy tym prostopadłe do kierunku wektora swobodnego i znajdują się w odległości równej jego długości.

Obok pojęcia wektora i rotoru wprowadził również Kotielnikow pojęcie motoru, czyli uporządkowanego w określony sposób układu dwóch krzyżujących się prostych. Dwie takie proste mają w nieeuklidesowych przestrzeniach Riemanna i Łobaczewskiego dwie względem nich prostopadłe proste wzajemnie biegunowe. Dlatego też przyjęcie dwóch sił o wzajemnie biegunowych względem siebie liniach działania jest równoznaczne z przyjęciem motoru, którego pierwsza prosta przechodzi przez początkowe punkty danych wektorów, druga zaś — przez punkty końcowe. Motor, którego przyjęcie jest równoznaczne z przyjęciem wektora i rotoru o osi zbieżnej z prostą wektora, związany jest z ruchem śrubowym, składającym się z przesunięcia wyznaczonego przez wektor i obrotu wyznaczonego przez rotor. Dlatego Kotielnikow nazywał motory skrętnikami przestrzeni nieeuklidesowych. Skrętnik taki można również określić jako układ dwóch krzyżujących się prostych, których wspólna prostopadła jest zbieżna z osią skrętnika. Skrętniki przestrzeni euklidesowej Kotielnikow rozpatrywał jako biwektory paraboliczne, motory zaś przestrzeni Riemanna i Łobaczewskiego — jako biwektory eliptyczne i hiperboliczne. Podstawowym zaś aparatem analitycznym Kotielnikowa są bikwaterniony eliptyczne i hiperboliczne. Rachunek motorów zastosował Kotielnikow do rozwiązania wielu zadań mechaniki przestrzeni nieeuklidesowych.

Problemom mechaniki nieeuklidesowej poświęcona jest również praca Kotielnikowa *Teoria wektorów a liczby zespolone*, opublikowana pośmiertnie [14]. Zawiera ona bardziej zwięzły i popularny wykład idei „rzutowej teorii wektorów".

W 1902 r. ukazała się praca słynnego mechanika rosyjskiego Nikołaja Żukowskiego, zwanego ojcem lotnictwa rosyjskiego, poświęcona ruchowi dwuwymiarowego ciała sztywnego na płaszczyźnie Łobaczewskiego (tytuł tej pracy *O ruchu materialnej figury pseudosferycznej na powierzchni pseudosfery* [15] — tłumaczy się tym, że Żukowski przyjmował interpretację płaszczyzny Łobaczewskiego jako powierzchni tzw. pseudosfery w przestrzeni euklidesowej).

---

[14] Por.: A. P. Kotielnikow, W. A. Fok, *Niekotoryje primienienija idiej Łobaczewskogo w mechanikie i fizikie.* Moskwa—Leningrad 1950, ss. 7—47.

[15] Por.: N. J. Żukowskij, *Sobranije soczinienij.* T. 1. Moskwa—Leningrad 1948, ss. 375—418.

W latach 1905 i 1906 geometra niemiecki Heinrich Liebmann i geometra włoski Roberto Bonola wprowadzili do swoich zarysów geometrii nieeuklidesowej wykład mechaniki nieeuklidesowej [16]: Liebmann jako rozdział 7: *Mechanika nieeuklidesowa*, a Bonola w postaci suplementu 5: *Podstawowe zasady statyki a pewnik Euklidesa*. Bonola wyłożył zasady statyki nieeuklidesowej wg Tilly'ego i Andrade'a i zastosował statykę na płaszczyźnie Łobaczewskiego do wyprowadzenia wzorów trygonometrii płaskiej. Liebmann oprócz statyki nieeuklidesowej rozpatrywał równania różniczkowe dynamiki w przestrzeniach nieeuklidesowych, analogi newtonowskiego potencjału oraz ruch planet w przestrzeniach nieeuklidesowych.

Pełny wykład statyki geometrycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni Łobaczewskiego dał w latach 1922—1927 Nikołaj Gorin w cyklu artykułów *O składaniu sił w przestrzeni Łobaczewskiego* [17]. Gorin nie znał *Rzutowej teorii wektorów* Kotielnikowa i opierał się na wynikach Genocchiego, Tilly'ego i Andrade'a. Nie posługując się ani wektorami, ani kwaternionami, określał on siły w przestrzeni Łobaczewskiego za pomocą współrzędnych będących w istocie rzeczy współrzędnymi wektorów w stycznych przestrzeniach euklidesowych. Nie posługiwał się on również rozszerzoną przestrzenią Łobaczewskiego, a w tych wypadkach, kiedy Kotielnikow rozpatrywał siły skierowane wzdłuż prostych idealnych, Gorin rozpatrywał pary sił. Wykazawszy, że wszelki układ sił jest w przestrzeni Łobaczewskiego równoważny sile i parze, Gorin rozpatrywał również składanie postępowych przesunięć i obrotów ciała sztywnego i wskazał na analogię między wzorami, wyrażającymi przekształcenie układu sił w równoważny statycznie układ w przestrzeni Łobaczewskiego, i wzorami przekształcania wielkości charakteryzujących pole elektromangetyczne w szczególnej teorii względności.

W ostatnich latach ukazało się sporo prac poświęconych badaniu ruchu ciała sztywnego w przestrzeni Łobaczewskiego, których autorami są kazańscy geometrzy Aleksander Szyrokow (syn Piotra) i jego uczeń Michaił Kriukow [18].

W tym samym czasie znany fizyk belgijski Théophile de Donder, autor wielu prac z zakresu teorii względności, wysunął problem ruchu ciała sztywnego w przestrzeni riemannowskiej ogólnego typu, czyli — ogólnie rzecz biorąc — w przestrzeni o zmiennej krzywiźnie [19]. Uczeń de Dondera F. Van Bergen oraz matematyk jugosłowiański Rastko Stojanović zastosowali idee de Dondera do przestrzeni riemannowskich

---

[16] H. Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie*. Wyd. 2. Berlin—Leipzig 1912, ss. 195—219; R. Bonola, *Niejewklidowa gieometrija*. Przekład z włoskiego, Sankt-Peterburg 1910, ss. 194—210.

[17] N. P. Gorin, *O słożenii sił w prostranstwie Łobaczewskogo*. „Izwiestija Uralskogo Uniwiersitieta", t. 3, 1922—1923, ss. 1—20; „Izwiestija Uralskogo Politiechniczeskogo Instituta", t. 4, 1924—1925, ss. 3—16; t. 5, 1926, ss. 3—12; t. 6, 1927, ss. 3—26.

[18] A. P. Szyrokow, *Wintowaja riegularnaja precessija w prostranstwie Łobaczewskogo*, „Uczonyje Zapiski Kazanskogo Uniwiersitieta", t. 123, 1963, ss. 196—207; M. S. Kriukow, *Dwiżenije twiordogo tieła po iniercyi w prostranstwie Łobaczewskogo*. Tamże, ss. 103—127.

[19] Th. de Donder, *Mouvement d'un solide dans un espace de Riemann*, „Bulletin de l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Classe des Sciences", t. 28, 1942, ss. 8—16, 60—66; t. 32, 1946, ss. 86—96.

o stałej krzywiźnie, czyli do nieeuklidesowych przestrzeni Łobaczewskiego i Riemanna [20].

Należy wreszcie odnotować prace geometrów radzieckich poświęcone statyce w wielowymiarowej przestrzeni afinicznej (A. Łopszyc) i w wielowymiarowych przestrzeniach euklidesowych, nieeuklidesowej Riemanna i innych przestrzeniach o metryce rzutowej, otrzymywanych w przejściach granicznych z tych przestrzeni (B. Rozenfeld i jego uczniowie) [21].

НЕЕВКЛИДОВА МЕХАНИКА

Рассматривается история неевклидовой механики начиная с идей основателя неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского, поставившего задачу выяснения того, не противоречит ли эта геометрия принципам классической механики. Анализируются работы итальянских, немецких, бельгийских, английских, французских, русских и югославских геометров и механиков вплоть до работ 60-х годов XX века. Большинство работ посвящено неевклидовой статике, за последние десятилетия появились работы и по неевклидовой кинематике и динамике. Эти работы показывают, что как классическая неевклидова геометрия Лобачевского и Римана, так и развившаяся за последние десятилетия геометрия общих пространств с проективными метриками, не противоречат принципам механики и в этих пространствах могут быть развиты все разделы классической механики.

NON-EUCLIDEAN MECHANICS

The history of non-Euclidean mechanics is examined, beginning from Lobachevsky's ideas, the founder of non-Euclidean geometry. Lobachevsky aimed at explaining the fact wheather this geometry contradicted the principles of classical mechanics. The works of Italian, German, Belgic, English, French, Russian and Yugoslav geometricians and mechanicians are analized up to the works appeared in the sixties of the 20-th century. The great number of works devoted to non-Euclidean statics, during the last decade the works on non-Euclidean kinematics and dynamics are appeared. These works show us that classical non-Euclidean geometry of Lobachevsky and Riemann as well as general solid geometry which has developed during the last decades, does not contradict the principles of mechanics and in these solids all parts of classical mechanics may be developed.

---

[20] F. Van Bergen, *Mouvement d'un solide dans un espace Riemannien.* Tamże, t. 35, 1949, ss. 234—236; R. Stojanović, *Kretanije čvrstog tela u Rimanovim prostorima konstante krivine,* „Zbornik Radova Srpske Akademie Nauka, Matematički Institut", t. 5, 1956, ss. 219—238.

[21] A. M. Łopszyc, *Ekwiwalentnost sistiem sił w affinnom prostranstwie,* „Dokłady na Naucznych Konfieriencjach Jarosławskogo Gosudarstwiennogo Piedagogiczeskogo Instituta", t. 2, 1964, z. 3, ss. 75—84; B. A. Rozenfeld, T. M. Klimanowa i N. D. Piecko, *Projektiwnaja tieorija wiektorow.* „Matiematika. Izwiestija Wysszych Uczebnych Zawiedienij", 1962, nr 2, ss. 130—141, nr 3, 1962, ss. 122—130; B. A. Rozenfeld, *Mnogomiernyje prostranstwa.* Moskwa 1966, ss. 318—335.