

Pawlak, Adam

Zasady wariacyjne a integracja teorii fizykalnych

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 19/1, 45-58

1974

Artykuł umieszczony jest w kolekcji cyfrowej Bazhum, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych tworzonej przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego.

Artykuł został zdigitalizowany i opracowany do udostępnienia w internecie ze środków specjalnych MNiSW dzięki Wydziałowi Historycznemu Uniwersytetu Warszawskiego.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.



Adam Pawlak

ZASADY WARIACYJNE A INTEGRACJA TEORII FIZYKALNYCH

W związku z burzliwym rozwojem nauki w XX w. wyłoniło się wiele istotnych problemów zarówno w sferze ideologicznej, jak i wewnątrz samej nauki. Rewolucja w przyrodznawstwie w wyniku ujawnienia własności i związków natury pociągnęła za sobą jakościowe zmiany tak przyrodniczych, jak i filozoficznych teorii o prawidłowościach przyrody. Istotnym problemem stała się interpretacja historii naukowego poznania oraz wyjaśnienie dialektyki naukowego poznania i dalszych tendencji rozwoju nauki. Wydaje się, że wśród współczesnych zagadnień centralne miejsce zajmuje dyferencjacja i integracja nauk. Świadczyć o tym mogą choćby dyskusje, jakie toczyły się i toczą do dziś w wielu środowiskach naukowych.

Jedność poznania naukowego przejawia się między innymi w ustaleniu uniwersalnych zasad i praw. Wyjaśniają one i jednocześnie wiążą ze sobą szeroki krąg zjawisk i procesów zachodzących zarówno w przyrodzie ożywionej, jak i nieożywionej. W fizyce do takich praw i zasad można zaliczyć prawo zachowania energii, pędu, ładunku, zasady wariacyjne, zasady Newtona itd. Dzięki nim można było uogólnić wiele pojedynczych doświadczeń, one też stały się podstawą do ujęcia różnorodności zjawisk fizycznych w jednolity system. Osiągnięcia i rozwój fizyki musiały wywrzeć olbrzymi wpływ na filozoficzny obraz świata. Po pierwsze dlatego, że w fizyce sprawdza się idea zachowania i substancjalności materii. Po drugie, że fizyka opiera się na takich pojęciach, jak masa, energia, ładunek, pęd, spin itd., które rozpatrzone w filozoficznych kategoriach jakości¹, niewyczerpalności i elementarności, pozwalają na głębsze uzasadnienie obiektywności świata i jego poznawalności. Po trzecie, że uniwersalne zasady i prawa fizyki charakteryzują wzajemne stosunki różnorodnych własności, przejawiających się w konkretnych zjawiskach na różnych poziomach strukturalnych materii, co świadczy w określonym stopniu o materialnej jedności wszechświata.

Wzajemne oddziaływanie materialnych obiektów warunkuje nierozzerwalną więź wszystkich zjawisk. Wydaje się, że naukowym potwierdzeniem jedności materii i wzajemnego oddziaływania różnych form jej ruchu stało się m.in. odkrycie wariacyjnych zasad mechaniki oraz zasady zachowania i przemiany energii. Tak więc fizyka XIX w. przyczyniła się w dużym stopniu do wykrycia jedności między zjawiskami mechanicznymi, cieplnymi i elektrycznymi, a rewolucja w fizyce XX w. wykazała konieczność zbudowania jakościowo nowego obrazu świata.

¹ Na ogół fizycy sądzą, że fizyka nie posługuje się kategorią jakości, wszystkie bowiem jakości redukują się do ilości. Takie stanowisko wydaje się nam w dużym stopniu uproszczone. Ponieważ nie ma to istotnego wpływu na prowadzony tu wywód, kwestię tę pominię.

Wraz z burzliwym rozwojem fizyki wynikło wiele nowych i ostrych problemów filozoficznych, a stare zostały naświetlone w nowy sposób.

Pierwszą poważną próbę filozoficznej interpretacji nowych osiągnięć fizyki podjęto na gruncie pozytywizmu. E. Mach wyjaśniał jedność wiedzy naukowej wychodząc od swoich „elementów świata” i zasady ekonomii myślenia. Usiłował on wywieść jedność świata i wiedzy ludzkiej o tym świecie z poziomu doświadczeń zmysłowych. Tym samym problem jedności wiedzy, analiza jego obiektywnych podstaw zastąpiona została zasadą oszczędności myślenia, która jakoby miała harmonijnie wiązać całą wiedzę w jedną spójną wewnątrznie całość.

W książce *Materializm a empiriokrytycyzm* Lenin poddał ostrej krytyce stanowisko Macha, ukazując, że konsekwentny empiriokrytyczny wywód o jedności wiedzy prowadzi do solipsyzmu, albowiem najbardziej ekonomiczne jest uznanie istnienia jednego jedynego subiekta z jego wrażeniami.

Z nieco innej pozycji, lecz w tym samym punkcie, krytykował Macha również Planck, twierdząc, że „...gdyby kiedyś rzeczywiście machowska zasada ekonomii miała zająć centralne miejsce w teorii poznania, to bieg myśli uczonych [...] uległby zakłóceniu, fantazja została by sparalizowana i na skutek tego postęp nauki mógłby zostać zahamowany, co miałyby fatalne skutki”².

Krytyka zasady ekonomii myślenia dowiodła, że za jej pomocą nie można rozwiązać problemu jedności wiedzy naukowej w ogóle, a problemu jedności teorii fizykalnych w szczególności.

Problem jedności współczesnych teorii fizyki jest złożony i można go rozpatrywać w różnych aspektach. Do najistotniejszych można zaliczyć rolę zasad zachowania przy tworzeniu nowych teorii, zastosowanie zasady korespondencji, kwestię unitarnej teorii pola i in. Mimo wielu trudności coraz wyraźniej zarysowuje się kształt nowego, fizycznego obrazu świata, który zapewne pogodzi teorię względności, mechanikę kwantową i fizykę cząstek elementarnych.

W świetle tych faktów wydaje się niezbędne rozpatrzenie wariacyjnych zasad fizyki i to tym bardziej, że zasady wariacyjne mogą wyjaśnić szereg procesów na wszystkich prawie poziomach strukturalnych materii, czyli że ze względu na swą ogólną treść mogą one być porównane z prawami dialektyki.

Z przyczyn obiektywnych nie pretendujemy do pełnej analizy tych zasad, a naszą dyskusję sprowadzamy do rozważenia jedynie głównych zagadnień z nimi związanych.

1. ZASADY WARIACYJNE A ZASADY ZACHOWANIA

Wariacyjne zasady fizyki w ogólnej postaci matematycznej wyrażają prawa ruchu³ i formalnie dzielą się na różniczkowe i całkowite. Podział ten nie jest jednak zasadniczy, niektóre bowiem z tych zasad, np. „zasada najprostszego toru” — H. Hertza, mogą być w mechanice teoretycznej zapisane zarówno w różniczkowej, jak i całkowitej postaci⁴. Ograniczmy się więc do podania dwóch sformułowań tych zasad:

² M. Planck: *Jedność fizycznego obrazu świata*. Warszawa 1970 s. 41.

³ Są to równania różniczkowe drugiego rzędu; w wyniku całkowania tych równań możemy określić ruch układu.

⁴ W. G. Niewzgljadow: *Teoreticzeskaja miechanika*. Moskwa 1959.

w różniczkowej postaci — zasadę d'Alamberta⁵, i w całkowej — zasadę W. Hamiltona⁶. Zasada d'Alamberta brzmi następująco: „Pełna wirtualna praca efektywnych sił równa się zeru dla wszystkich odwracalnych, wirtualnych przesunięć zgodnych z zadanymi warunkami kinetycznymi”⁷. Tak więc zapisać ją można w postaci:

$$\sum_{k=1}^N (\vec{F}_k - m_k \vec{a}_k) \delta q_k = 0$$

\vec{F}_k — zadane siły, \vec{a}_k — przyspieszenie cząstek

q_k — wirtualne przesunięcia, m_k — masa cząstek

Najbardziej ogólną postać ma zasada najmniejszego działania.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

t_1, t_2 — czas L — funkcja Lagrange'a w warunkach:

$$\delta q_i(t_1) = 0, \quad \delta q_i(t_2) = 0 \text{ i } \delta t = 0$$

co oznacza, że wśród wielu wartości całki działania (S) przy wariacji ruchów minimalna jej wartość odpowiada rzeczywistemu ruchowi układu.

Biorąc pod uwagę, że wszystkie zasady wariacyjne — z wyjątkiem zasady najmniejszego działania — są słuszne tylko w mechanice i tracą swą uniwersalność przy przejściu do innych działów fizyki (co bardziej szczegółowo omówimy później), w dalszych rozważaniach będziemy rozpatrywać tylko zasadę Hamiltona, która obejmuje wszystkie pozostałe. Znając funkcję Lagrange'a (L) możemy podać równania ruchu: w mechanice klasycznej, kwantowej, relatywistycznej, w elektrodynamice kwantowej, a także odpowiednio podstawiając funkcję Lagrange'a — otrzymamy równania termodynamiki, fizyki statystycznej⁸, chemii⁹.

2. ZASADA NAJMNIJSZEGO DZIAŁANIA A ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

W rozważaniach nad przyrodą nieożywioną fizycy od początku uważali za swój podstawowy cel znalezienie takiej uniwersalnej zasady, która pozwoliłaby opisać i wyjaśnić wszystkie zjawiska fizyczne, przewidzieć przyszłe zdarzenia i odtworzyć te, które odbyły się w przeszłości. Jak dotąd cel ten nie został osiągnięty, co więcej, wydaje się w ogóle nieosiągalny. Oznaczałoby to przecież, że już poznaliśmy w pełni całą przyrodę wraz ze wszystkimi jej przejawami, a wydaje się, że materia, zarówno pod względem ilościowym, jak i jakościowym,

⁵ Inaczej — ogólne równanie mechaniki.

⁶ Znana też pod nazwą zasady najmniejszego działania.

⁷ G. Lanczos: *The Variational Principles of Mechanics*. Toronto 1949 s. 139, 114.

⁸ L. S. Połak: *Wariacjonnyje principy mechaniki, ich razwitiye i primienienije w fizykie*. Moskwa 1960.

⁹ A. G. Stoletow: *Izbrannyje soczinnienija*. Moskwa 1950 s. 565—566.

jest niewyczerpalna. Dlatego też w poznaniu przyrody możemy tylko przybliżać się do tego idealnego celu jako do nieosiągalnej granicy.

Z wielu ogólnych zasad i praw fizyki zbliżających do tego idealnego celu najistotniejsze w XX w. zdają się być: zasada najmniejszego działania oraz zasada zachowania energii.

Wychodząc z zasady najmniejszego działania można dedukcyjnie wyprowadzić główne tezy wszystkich podstawowych teorii fizycznych. Świadczy o tym chociażby fakt, że N. Bohr opierając się na zasadzie najmniejszego działania określił warunki kwantowania w swej teorii atomu, a Luis de Broglie, posługując się również tą zasadą, odkrył falowe własności elektronów. Zastosowana w każdej dziedzinie, zasada ta nie tylko wyjaśnia znane osobliwości zjawisk fizycznych, ale również jednoznacznie określa ich przebieg w przestrzeni oraz czasie i może dać wyczerpującą informację o tych zjawiskach, jeśli są znane niezbędne stałe wielkości fizyczne i jednocześnie jeśli zadane są warunki brzegowe. Biorąc pod uwagę fakt, że w literaturze filozoficznej znacznie więcej miejsca poświęcono analizie zasady zachowania energii¹⁰ niż zasadzie najmniejszego działania, i że nie ma potrzeby powtórnego rozpatrywania tej zasady, ograniczymy się tylko do porównania tych dwóch fundamentalnych zasad fizyki.

Zasada zachowania energii¹¹ jako uniwersalne prawo przyrody została odkryta jeszcze w połowie XIX w. Mając zastosowanie w różnych dziedzinach fizyki klasycznej, do chwili obecnej pozostaje ona jedną z ważniejszych zasad współczesnych teorii fizycznych. Zasada zachowania energii obowiązuje na wszystkich znanych poziomach strukturalnych materii. Należy jednak przypomnieć, że prawo zachowania energii można otrzymać z równania zasady najmniejszego działania, co oznacza, że zawiera się ono w zasadzie najmniejszego działania. Odwrócenie dedukcji wydaje się niemożliwe.

Z powyższego wynika, że zasada zachowania energii jest zasadą mniej ogólną, niż zasada najmniejszego działania. Twierdzenie to zostało dowiedzione przez wielu czołowych fizyków i filozofów m.in. przez Mołłakowa¹², Yourgenau¹³, Landau¹⁴, Lanczosa¹⁵ i innych. Ponadto już Hamilton zauważył, że energia — w odróżnieniu od działania — nie pozostaje niezmienna w stosunku do przekształceń Lorentza, ponieważ czas odgrywa w niej zasadniczą, podstawową rolę. A jeśli wziąć pod uwagę teorię względności Einsteina, to jak słusznie twierdził Planck, w stosunku do przestrzeni zasada zachowania energii musi być uzupełniona zasadą zachowania pędu. „Naczelnym prawem fizycznym — pisze Planck — ukoronowaniem tego całego systemu teoretycznego jest — przynajmniej moim zdaniem — zasada najmniejszego działa-

¹⁰ Zob. np. N. F. Owczinikow: *Principy sochranienija*. Moskwa 1966; W. N. Wiesielewski: *Filozofskoje znaczenije zakonow sochranienija materii i dviżenija*. Moskwa 1964; E. M. Pugaczew: *Wielikij zakon prirody* Moskwa 1961; T. D. Lee, C. N. Jang: *Question of Parityconservation in Weak Interactions*. „Physical Review” 1956 nr 1.

¹¹ Często używa się również nazwy „prawo zachowania energii”.

¹² W. M. Mołłakow: *Problema priczinnosti i wariacjonnyje principy klasycznej mechaniki*. Aszchabad 1963.

¹³ Yourgenau, Wolfgang and Mandelstam, Stanley: *Variational principles in dynamics and grautum theory*. London 1960.

¹⁴ L. Landau, E. Lifszic: *Mechanika*. Warszawa 1961.

¹⁵ G. Lanczos, jw.

nia”¹⁶. Sprawę tę sformułował rozstrzygająco A. G. Stoletow: „Zasada najmniejszego działania jest bardziej ogólna, niż zasada zachowania energii, bo ta ostatnia zawiera się w niej jako następstwo”¹⁷. W tym świetle niesłuszny wydaje się pogląd niektórych uczonych¹⁸, iż prawo zachowania energii i jej przemiany ma charakter bardziej ogólny, niż zasada najmniejszego działania dlatego, że zasada ta wyraża tylko zachowanie energii, a pomija jej przemianę.

Należy wziąć pod uwagę i to, że prawo zachowania energii, niezależnie od tego, w jakiej dziedzinie fizyki zastosowane, posiada postać tylko jednego równania, zaś zasada najmniejszego działania w każdym odrębnym przypadku daje dokładnie tyle równań, ile wchodzi w nią zmiennych niezależnych.

Możliwość kilku równań w jednej zasadzie wynika stąd, że zasada najmniejszego działania jest zasadą wariacyjną. W związku z tym z niezliczonej ilości możliwych do pomyślenia ruchów przy zadanych warunkach zasada najmniejszego działania „wybiera” tylko jeden określony ruch i charakteryzuje go jako rzeczywiście zachodzący w przyrodzie. „Wybór” określonego ruchu możliwy jest dzięki istnieniu prawidłowości, która polega na tym, że przy zbliżaniu się ruchu teoretycznie możliwego do ruchu rzeczywistego, tzn. przy dążeniu wariacji ruchu rzeczywistego (wariacji zgodnej z założonymi warunkami) do zera pewna wielkość charakteryzująca ruch również dąży do zera. Z tego warunku wyprowadza się (jak w każdym zadaniu na ekstremum) dla każdej niezależnej współrzędnej oddzielne równanie. Dla określenia rzeczywistego ruchu istotne są przede wszystkim zadane warunki, którym to podporządkowane są wszystkie teoretycznie możliwe ruchy, a szczególnie ważna jest ta wielkość fizyczna, która powinna przekształcić się w zero dla dowolnej wariacji ruchu rzeczywistego.

3. HISTORIA ROZWOJU ZASAD WARIACYJNYCH

Ażeby osiągnąć prawidłowy pogląd na istotę zasad wariacyjnych, należy rozpatrzyć je w historycznym rozwoju, a także poznać różne podejścia i tendencje w ujmowaniu tego zagadnienia. Rozpatrzmy więc główne momenty ewolucji zasad wariacyjnych. Pierwsze istotne spostrzeżenia i uwagi dotyczące tych zasad spotykamy w XIV w. przy opisie trajektorii planet, ruchu światła, formy ciał itd.

W latach pięćdziesiątych XVII w. bardziej konkretne poglądy na wariacyjne zasady spotykamy u Fermata. On to po raz pierwszy zastosował tę zasadę do określenia toru, po którym porusza się światło. Zgodnie z tą zasadą (nazwaną przez niego „zasadą najkrótszego czasu”) światło wybiera ze wszystkich możliwych torów łączących odpowiednie punkty A i B taki tor, który wymaga najmniejszego czasu dla przebycia go. Zasada ta stwierdza, że tor, po którym porusza się światło w próżni, stanowić będzie pewna krzywa¹⁹, w środowisku niejednorodnym zaś otrzymamy krzywą innego typu. Podstawą zasady Fermata była zapewne znana zasada filozoficzna: „Przyroda działa na najbardziej łatwych i dostępnych drogach”²⁰.

¹⁶ M. Planck, jw. s. 63.

¹⁷ A. G. Stoletow, jw. s. 566.

¹⁸ Np. L. S. Połak, jw.

¹⁹ Dla euklidesowej przestrzeni torem jest prosta.

²⁰ *Wariacjonnyje principy miechaniki*. Moskwa 1959 s. 51.

We współczesnym sformułowaniu fizykalnym zasadę Fermata przedstawiamy następująco:

$$1) \int_A^B n ds = 0 \quad \text{lub} \quad 2) t = \frac{1}{c} \int_{(l)} n dl$$

n — współczynnik załamania światła

t — czas

l — tor promienia świetlnego

Z pierwszego równania wynika, że wariacja całki równa się zeru, a to oznacza, że różnica między całką wzdłuż toru rzeczywistego a całką wzdłuż sąsiedniego toru jest nieskończenie małą wielkością (matematycznie wielkością drugiego rzędu) w porównaniu z odległością między torami, co ma istotne znaczenie dla wielu zjawisk fizycznych.

Z zasady Fermata otrzymuje się prawo załamania światła, równanie sferycznych powierzchni, równanie na współczynnik załamania itd. Świadczy to o dużym znaczeniu tej zasady dla fizyki, a w szczególności o jej dużej roli integracyjnej w dziedzinie optyki geometrycznej. Jeśli uznać za słuszny pogląd znanego fizyka, Feynmana, iż „...kryterium doniosłości każdej zasady zawiera się w tym, że przewiduje ona coś nowego ..., a z łatwością można pokazać, że zasada Fermata przewiduje szereg nowych faktów”²¹ (m.in. Luis de Broglie tworząc swoją teorię o falowych własnościach elementarnych cząstek powoływał się na optyczno-mechaniczną analogię Hamiltona, opartą na formalnym utożsamieniu zasady Fermata i zasady najmniejszego działania), to jej wartość heurystyczna nie pozostawia wątpliwości.

W mechanice zasadę wariacyjną sformułował jako jeden z pierwszych J. Bernoulli, rozwiązując zagadnienie krzywej najszybszego spadania. Nie bez znaczenia była dla następnych badań odkryta przez Bernoulliego analogia zjawisk optyczno-mechanicznych²², która w dużym stopniu przyczyniła się w swoim czasie do powstania mechaniki kwantowej. Bernoulli, podobnie jak i Fermat, przy wyjaśnianiu swoich odkryć wychodził z założeń rozpowszechnionej w XVII w. „zasady o prostocie działań w przyrodzie”. Nieco później, bo w 1774 r., Moro de Maupertuis, matematyk i filozof, podniósł zasadę najmniejszego działania do rangi najbardziej ogólnych praw przyrody. „Prawa ruchu i spoczynku — pisał on — wyprowadzone z tej zasady są dokładnie tymi, jakie obserwujemy w przyrodzie; możemy zachwycać się rezultatami zastosowania tej zasady do wszystkich zjawisk”²³.

$$m v s = m i n$$

m — masa

v — prędkość

s — droga przebyta przez ciało

Niestety, taka postać równania nie pozwala na wyciągnięcie jakiegokolwiek konkretnego wniosku, ponieważ dopóki nie będą zbadane

²¹ T. Feynman: *Lectures on physics*. Vol. 1. London 1963 s. 15. Jest to zresztą pogląd podzielany przez metodologów i fizyków raczej powszechnie.

²² J. Bernoulli: *Izbrannyye soczinjenija po miechanike*. Moskwa 1964 s. 36—37.

²³ *Wariacjonnyje principy*, jw. s. 55.

określone warunki, którym powinny odpowiadać możliwe zmiany, dopóty nie można nic powiedzieć o tym, jakie zmiany należy porównywać ze sobą. Maupertuis zasadę najmniejszego działania ujął w sposób skrajny, uważając, że cała przyroda zbudowana jest jako system celowy.

Rozważając z tego punktu widzenia kwestię procesów i zjawisk przyrody należałoby uznać: po pierwsze, że podstawą wszystkich zjawisk przyrody są świadome zmiany skierowane ku określonemu celowi; po drugie, że cel ten osiąga się najkrótszą drogą i najlepszymi środkami. Takiemu stanowi przeczą znane nam fakty nauk przyrodniczych. Jednak mimo to stanowisko reprezentowane przez Maupertuisa uzyskało poparcie wielu ówczesnych uczonych, m.in. znalazło odzwierciedlenie w poglądach Eulera, który jednocześnie zrobił wiele w zakresie uściślenia zasady najmniejszego działania przez jej matematyzację. W tej postaci, jaką nadał jej Euler, pozwala ona precyzyjnie opisywać ruch cząstek. Euler dowiódł, że ciało poruszające się pod działaniem sił centralnych z punktu A do B z określoną prędkością zakreśla tor, któremu odpowiada ekstremum całki.

$$\int_A^B m v ds = \text{ekstremum}$$

m — masa

v — prędkość

ds — element trajektorii

Mimo to nie udało mu się dostrzec uniwersalnego charakteru tej zasady w zakresie fizyki. Uważał on, że możliwe jest jej zastosowanie tylko do niewielu szczegółowych zadań.

Naukowej krytyki poglądów Maupertiusa dokonał d'Alambert, twierdząc, że dla tych samych zjawisk można znaleźć różne wyrażenia matematyczne, a doszukiwanie się jakiegokolwiek innego sensu oprócz tego, który zawiera się w matematycznej formie, jest nieuzasadnione i wręcz szkodliwe.

Niestety, d'Alambert zasadę najmniejszego działania rozpatrywał tylko jako zasadę matematyczną, negując jej uniwersalność i fizyczny charakter. Dopiero Lagrangé, uogólniając rezultaty Eulera, jako pierwszy nadał jej nie tylko całkowicie ścisłą formę, ale także jednoznaczną interpretację fizyczną. Wprowadzenie przez Lagrange'a pojęcia izoenergetycznej wariacji związało zasadę najmniejszego działania z zasadą zachowania „żywych sił”²⁴.

Lagrange udowodnił ponadto, że dla rzeczywistego ruchu wariacja działania jest ekstremalna. Równanie Lagrange'a $S = \int_A^B m v ds$ przy

$E = \text{const}$ ukazuje w sposób jednoznaczny, jaki będzie rzeczywisty ruch punktu materialnego lub układu przy zadanych warunkach początkowych. W późniejszym okresie (1830—1835) Jakobi i Hamilton wykazali, że rozpatrywana zasada może mieć zastosowanie poza mechaniką, jeśli zostanie inaczej sformułowana. Tym samym osiągnęli to, co nie udało się wielu poprzednikom. Zastosowali oni zasadę naj-

²⁴ „Żywa siła” jest to masa pomnożona przez kwadrat prędkości.

mniejszego działania nie tylko w mechanice, ale także do badań zjawisk elektromagnetycznych. W. Hamilton zaś wykrył analogię między zasadą najmniejszego działania i zasadą Fermata, wiążąc tym samym zjawiska optyczne z mechanicznymi. Analogia ta polega — zgodnie z twierdzeniem Hamiltona — na tym, że istniejąca wielkość (będąca w jednej zasadzie działaniem, a w drugiej — czasem) «użyta» przez światło przy przejściu od dowolnego punktu A do dowolnego punktu B okazuje się najmniejszą wtedy, kiedy światło przebiega rzeczywistym torem, a nie jakimkolwiek innym (inaczej oznacza to, że wariacja działania równa się zero). Matematycznie można to zapisać:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

W — wariacja, L — funkcja Lagrange'a

W przypadku gdy $L = T - U$, przy czym T — energia kinetyczna, U — energia potencjalna.

I tylko wtedy to równanie Hamiltona zgodne jest z zasadą najmniejszego działania. Dlatego też utożsamianie równania Hamiltona z zasadą najmniejszego działania w ogóle, z czym bardzo często można spotkać się w różnych pracach²⁵, wydaje się niewłaściwe. Zasada Hamiltona sformułowana została przez niego następująco: ciało, na które działa siła, porusza się wzdłuż takiego toru, aby krzywa różnicy energii kinetycznej i energii potencjalnej ograniczała jak najmniejsze pole. Hamilton udowodnił również, że ciało pozostawione samo sobie tak, aby mogło się poruszać w przestrzeni w naturalny sposób, będzie poruszało się wzdłuż toru, któremu odpowiada najmniejsze pole ograniczone krzywą lagrangianu²⁶. Szczególnie ważne okazało się stwierdzenie Hamiltona, że wszystkie możliwe ruchy, które będziemy porównywać, nie muszą posiadać jednakowej energii (jak u Lagrange'a), powinny jednak zachodzić w tym samym czasie. Hamilton sformułował także równania znane pod nazwą kanonicznych. W równaniach tych zamiast lagrangianu zastosował inną wielkość fizyczną, nazwaną później hamiltonianem, który stanowi sumę energii kinetycznej i potencjalnej. Jeśli potrafimy napisać wyrażenie określające sumę energii kinetycznej i potencjalnej w każdym punkcie przestrzeni, to hamiltonian — jak słusznie zauważył Hamilton — będzie zawierał wszystkie osiągalne informacje o układzie ciał i ich oddziaływaniach na siebie. Jest to o tyle istotne, że pozwala nam rozwiązać wiele problemów przy użyciu jednego równania.

Ponadto w razie sytuacji, w których niezbędne jest wprowadzenie współrzędnych sferycznych lub cylindrycznych, a także kiedy występują różne rodzaje pól np. pola elektromagnetyczne i pola sił jądrowych, możemy — jeśli tylko potrafimy napisać wyrażenie określające energię potencjalną w każdym punkcie przestrzeni — wykazać, jakie prawa zachowania będą spełnione w danym układzie fizycznym.

Tym samym z równań Hamiltona można wprowadzić zasadę zachowania energii i pędu, a także bezpośrednio przewidzieć, jakie po-

²⁵ L. Landau, E. Lifszic jw.; *Filosofija i jestiestwoznanije*. Woroneż 1965.

²⁶ Lagrangian = różnica energii kinetycznej i potencjalnej (L).

łożenie i jaką prędkość będą miały wszystkie ciała w dowolnej chwili należące do danego układu.

Tak więc — jak słusznie stwierdza L. S. Połak — „...ogólnie rzecz biorąc z zasady Hamiltona można wyprowadzić dowolne, konkretne, szczegółowe prawo tylko w tym przypadku, kiedy albo na podstawie doświadczenia, albo na podstawie jakiś ogólnych pojęć określi się wielkości wchodzące pod znak całki”²⁷.

Znaczenie zasady Hamiltona jest tym większe, że stwarza ona duże możliwości wyjaśnienia szeregu ogólnych właściwości i związków w jakościowo różnych obiektach. Osiągnąć to można przez zastosowanie w równaniach Hamiltona różnych układów współrzędnych, np. kartezjańskich, uogólnionych²⁸. Wprowadzając współrzędne uogólnione można rozwiązywać różne problemy z dziedziny fizyki, np. problemy naładowanych cząstek w polach magnetycznych, zachowania się materii w wysokich temperaturach itd. Znaczenie to wynika zaś z faktu, że fizyczną treść tej zasady stanowi określona wielkość, posiadająca wymiar działania, osiągająca dla realnych układów i ruchów ekstremum. Działanie to uogólnia dwie wielkości fizyczne energię i czas, i jest jedną z najbardziej uniwersalnych stałych fizycznych. W związku z tym fizyczna treść zasady najmniejszego działania określa jej matematyczną formę (a w szczególności tę formę, którą jej nadali Lagrange i Hamilton). Co więcej, fizyczna treść tej zasady jest uniwersalna dla wszystkich form ruchu materii i stąd wynika jej rola jako czynnika integrującego teorie fizyczne.

Interpretacja zasad wariacyjnych w rozwoju historycznym przechodziła szereg stadiów, przy czym zachowana została ta prawidłowość, że ruch może zachodzić tylko po przeciwstawnych, ekstremalnych torach, a działanie układu w procesie ruchu dąży ku ekstremalnemu, przeciwstawnym wartościom²⁹.

Zasada najmniejszego działania, jako jedna z zasad wariacyjnych, może być wyprowadzona z zasady d’Alamberta, którą nazywa się również ogólnym równaniem mechaniki. Analiza równości:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F} - m_i \vec{a}_i) \delta q_i = 0$$

pokazuje, że siły działające na układ są w równowadze z siłami inercji. Wzajemne oddziaływanie sił inercji i sił działających na układ określa

²⁷ L. S. Połak: *Y. R. Gamilton i princip stacjonarnego diejstwija*. Moskwa 1936 s. 196.

²⁸ Współrzędne uogólnione — to dowolne wielkości q_1, q_2, \dots , charakteryzujące całkowicie położenie układu i pędy $\{\dot{p}\}, \{\dot{q}\}$

²⁹ Rozpatrzmy jako przykład ruch ciała na powierzchni kuli. Biorąc pod uwagę zasadę inercji Newtona ruch ciała będzie zachodził po liniach geodezyjnych. W ten sposób ruch jednostajny ciała na powierzchni ziemi między dwoma dowolnymi punktami powinien zachodzić po łukach, tzn. po przeciwstawnych torach (minimalnym i maksymalnym), a szczególnym przypadkiem w tych warunkach będzie położenie punktów na przeciwległych końcach średnicy koła (kinetyczne ogniska), ponieważ ruch między tymi punktami może zachodzić co najmniej kilkoma torami w ciągu tego samego interwału czasu i przy tej samej ilości działania. Linie geodezyjne są najprostszymi liniami na kuli. Na powierzchni kuli odcinkiem najprostszym będzie łuk wielkiego koła, jak i łuk dopięający wielkiego koła, otrzymane przez przecięcie sfery ziemskiej płaszczyznami przechodzącymi przez rozpatrywane dwa punkty toru — z wyjątkiem przechodzących przez środek kuli.

rzeczywisty ruch układu dla każdej określonej chwili czasu. Ekwiwalentność zasady d'Alamberta i zasady najmniejszego działania w ramach mechaniki pozwala traktować je jako zasady tej samej klasy. Należy jednak wziąć pod uwagę fakt, że zasada d'Alamberta ustala w prosty sposób ogólną własność ruchu układu mechanicznego z idealnymi więzami, zgodnie z którymi rzeczywisty ruch układu różni się od wszystkich możliwych tym, że tylko dla rzeczywistego ruchu suma elementarnych prac sił działających na dany układ i sił inercji przy dowolnym możliwym przesunięciu układu równa się w każdej chwili czasu zeru.

4. ROLA ZASAD WARIACYJNYCH W PROCESIE INTEGRACJI WIEDZY NAUKOWEJ

Przy formułowaniu zasad wariacyjnych jedni twórcy uważali, że wielkość działania należy odnieść do nieskończonego małego odcinka czasu, a inni, że tę charakterystyczną wielkość należy odnieść do skończonego interwału trajektorii ruchu. Odpowiednio do tych punktów widzenia otrzymano różne klasy zasad wariacyjnych.

Do klasy odpowiadającej drugiemu punktowi widzenia możemy zaliczyć zasadę Bernoulliego, d'Alamberta, Gaussa i Hertza. Wszystkie te zasady nazywamy różniczkowymi i ustalają one, czym różni się rzeczywisty ruch układu od kinetycznie możliwych w każdej określonej chwili czasu. Zasady te odzwierciedlają kategorię dyskretności w mechanice i wewnątrz niej są one ekwiwalentne. Poza mechaniką klasyczną zasady te nie mają większego zastosowania przede wszystkim dlatego, że ich wyrażenia związane są z określonym układem współrzędnych i przy przekształcaniu układu współrzędnych pozostają niezmiennie.

Do drugiej klasy zasad wariacyjnych zaliczamy zasadę najmniejszego działania Moupertuisa, Lagrange'a i Hamiltona. W zasadach tych działanie jest odniesione do skończonego odcinka czasu. W takim przypadku rzeczywisty ruch różni się od wszystkich możliwych ruchów tym, że dla dowolnej dopuszczalnej wariacji całka wzięta po czasie zeruje się. Oznacza to, że dla rzeczywistego ruchu całka po czasie, którą określamy jako działanie, posiada mniejszą wartość, niż dla dowolnego innego ruchu zgodnego z zadanymi warunkami.

W warunkach, w których rzeczywisty ruch układu zachodzi w określonym czasie, obliczenie go wymaga rozpatrzenia późniejszej fazy ruchu. W ten sposób określony stan układu staje się w pewnym stopniu zależny od stanów późniejszych. Okazuje się więc, że wariacyjne zasady wyjaśniają zjawiska zachodzące w mechanice klasycznej w sposób determinujący, zgodnie z zasadą, że „dla każdego układu izolowanego dowolny określony stan układu determinuje późniejsze i wcześniejsze stany tego układu”³⁰.

Koncepcja fizyki klasycznej oparta jest na przekonaniu, że wszystkie zjawiska sprowadzają się ostatecznie do ruchów, które odbywają się w sposób ciągły, a założenie ciągłości umożliwia zawarcie w tych samych wyrażeniach wariacyjnych przeszłych i przyszłych stanów układu.

³⁰ *The Feynman*, jw.

Współrzędne wchodzące w równania Hamiltona, Lagrange'a itd. są funkcjami ciągłymi czasu i w związku z tym możemy napisać równania ruchu zawierające pochodne tych współrzędnych względem czasu:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

Zasada najmniejszego działania w tej postaci, jaką jej nadał Hamilton, zawiera w sobie zarówno równanie Lagrange'a, jak i Newtona, a prawa mechaniki w tej postaci stanowią jednocześnie formułę przyczynowości na poziomie mechaniki, inaczej przyczynowości dynamicznej, np. druga zasada mechaniki Newtona oznacza, że każda zmiana posiada przyczynę, która tę zmianę wywołuje i wyjaśnia, ponadto przyczyna ta powinna poprzedzać zmianę.

Mechanika klasyczna wypracowała specyficzne pojęcie związku przyczynowego. Jego treść sprowadza się do tego, że jeśli znany jest stan początkowy jakiegokolwiek ciała, to można określić, zgodnie z drugim prawem Newtona, jego dowolny stan w przyszłości. Inaczej mówiąc, dokładna znajomość położenia i prędkości ciała pozwala jednoznacznie określić trajektorię jego ruchu. Okazało się jednak, że pojęcie przyczynowości sformułowane w ten sposób jest bardzo ograniczone, ponieważ nie można go zastosować do wyjaśniania wielu zjawisk przyrody.

Już w fizyce klasycznej spotykając się z koniecznością opisu procesów, w których brała udział duża liczba cząstek, musiano wyjść poza ramy dynamicznej przyczynowości. Wprowadzenie pojęcia statystycznej przyczynowości pozwoliło pogłębić ogólne pojęcie przyczynowości i tym samym rozwiązać szereg zagadnień w fizyce. Ten nowy, statystyczny typ związku przyczynowego (do wprowadzenia którego fizycy zostali niejako zmuszeni trudnościami, jakie napotykali przy opisywaniu ruchu układu oddziaływających cząstek) zawiera w sobie jako szczególny przypadek dynamiczny związek przyczynowy, jak stwierdzają m. in. Krajewski³¹, Augustynek³², Własow³³ i inni.

Zasadę najmniejszego działania w postaci, jaką nadał jej Hamilton, można zapisać jako:

$$1) \quad \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = 0$$

L — średnia wartość funkcji Lagrange'a
Przy synchroniczno-wariacyjnych ruchach otrzymuje całkę:

$$2) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

Dlatego biorąc zamiast L funkcję L możemy wyrazić zasadę najmniejszego działania dla zespołów statystycznych (dla rzeczywistego ruchu działanie z uśrednioną funkcją Lagrange'a przybiera stacjonarny charakter).

³¹ K. Krajewski: *Związek przyczynowy*. Warszawa 1967.

³² Z. Augustynek: *Determinizm fizyczny*. Warszawa 1962.

³³ A. A. Własow: *Statisticzeskije funkcije raspriedielenija*. Moskwa 1966.

W takim sformułowaniu zasada najmniejszego działania zawiera w sobie statystyczną przyczynowość i pozwala zastosować ją przy określaniu statystycznego rozkładu cząstek.

W mechanice kwantowej zasadę najmniejszego działania wyrażamy równaniem:

$$3) \quad \delta S = S\Psi(\hat{H} - E)\Psi^* d\tilde{l} = 0$$

Ψ — funkcja falowa układu

\hat{H} — operator Hamiltona

Ψ^* — funkcja zespolona z Ψ

E — wartość własna energii

Jak widać z równania (3), wielkości klasyczne wchodzące do równania (1) zamieniono operatorami, a prawdopodobieństwo określonego stanu indywidualnej cząstki i oddzielnego aktu wzajemnego oddziaływania ma inny sens, niż prawdopodobieństwo stanu układu w mechanice klasycznej.

Tak więc mechanika kwantowa wyraża nową, kwantową treść w terminach wariacyjnej zasady najmniejszego działania. W statystyce kwantowej zasady wariacyjne są równoważne z twierdzeniem o maksymalnej entropii zamkniętego układu kwantowego w stanie równowagi termodynamicznej. Jeśli rozpatrzmy układ zamknięty opisany hamiltonianem — H , opisywany macierzą gęstości, to rozwiązaniem problemu wariacyjnego będzie rozkład kanoniczny Gibbsa dla statystyki kwantowej³⁴.

Zasady wariacyjne mają również praktyczne zastosowanie przy określaniu rozkładu statystycznego kwantowego gazu.

Z dotychczasowych rozważań nie wynika jeszcze (jakby się pozornie mogło wydawać), że zasady wariacyjne są uogólnieniem wszystkich praw fizyki. Co więcej, w oderwaniu od informacji, którą wnoszą różne prawa fizyki, zasady wariacyjne przekształcają się w czysto matematyczne wyrażenia. Informacja zaś zostaje wprowadzona tylko w procesie poznania własności materialnego świata i związków w nim zachodzących.

5. HEURYSTYCZNA ROLA ZASADY NAJMNIJSZEGO DZIAŁANIA

Uniwersalność wielkości opisywanych przez zasadę najmniejszego działania pozwala sądzić o bliskiej jej więzi z kategoriami filozoficznymi, co podnosi Helmholtz: „Wydaje się, że powszechne znaczenie zasady najmniejszego działania na tyle nie podlega wątpliwości, że może ona pretendować do roli heurystycznej zasady i przewodniej nici w poszukiwaniach sformułowań dla praw nowych klas zjawisk”³⁵. Dowodem heurystycznej roli zasady najmniejszego działania jest płodne jej zastosowanie w biologii.

Teoretycznie obliczona za pomocą zasady najmniejszego działania forma optymalna, przewidująca minimalny rozchód wosku dla otrzy-

³⁴ Zob. L. Landau i E. Lifszic: *Fizyka statystyczna*. Warszawa 1956.

³⁵ *Wariacyjnyje principy*, jw. s. 433.

mania maksymalnej objętości komórek, zgadza się dokładnie z rzeczywistą formą tych komórek³⁶. Minimalne rozchodowanie przez pszczoły materiału jest rezultatem ich przystosowania się do minimalnego działania (rozchodowania energii i czasu).

Potwierdzeniem tych związków są przede wszystkim rezultaty uzyskane przez znanego uczonego N. Raszewskiego³⁷ w biologii matematycznej. Stosując wariacyjne zasady w biologii Raszewski obliczył wystarczająco dokładnie optymalny wymiar żywej komórki, określił budowę układu krwionośnego człowieka, podał ogólne formy budowy roślin itd. Związki te uprawniają nas do wyciągnięcia wniosków, że budowa organizmu i rozwój jak i ewolucja świata organicznego, odbywają się zgodnie z zasadą najmniejszego działania.

•

Analiza zasad wariacyjnych w ich rozwoju pokazuje, że zasady te, szczególnie w mechanice, ustanawiają własności, którymi rzeczywiste ruchy układów mechanicznych różnią się od wszystkich kinetycznie możliwych ruchów, i pozwalają w konsekwencji otrzymać równania ruchu lub warunki równowagi danego układu. Znaczenie metodologiczne zasad wariacyjnych polega na tym, że każda z nich pozwala otrzymać równania ruchu odpowiednich układów z jednego ogólnego twierdzenia. Stąd też wynika ich zastosowanie przy analizie jakościowo różnych form ruchu materii.

Szereg zasad wariacyjnych ustanawia w sensie ogólnym określoną własność fizyczną, charakteryzującą rzeczywisty ruch układu mechanicznego w sposób pozwalający na dokonanie ich ekstrapolacji na wiele innych dziedzin fizyki. Tym między innymi uwarunkowana jest ważność tych zasad dla całej fizyki.

Uznanie znanej tezy, że materii w różnych jej postaciach właściwe są ogólne ekstremalne prawidłowości, mające odzwierciedlenie w zasadach wariacyjnych, pociąga za sobą konieczność uznania, iż wewnętrzna więź i jedność fizycznych zasad uwarunkowana jest wewnętrzną, rzeczywistą i obiektywną jednością prawidłowości przyrody, a nie, jak sądził między innymi E. Mach, wyłącznie spójnością matematycznego formalizmu.

Fakt ten świadczy również o tym, że możliwe jest przenoszenie pewnych zasad wariacyjnych jako koncepcji metodologicznej i teoretycznej na inne dziedziny nauki (chemia, biologia) itd. Zgodnie więc z poglądem Kompaniejca, że „...zasady wariacyjne pozwalają w jednolity sposób pojmować prawa odnoszące się do różnych dziedzin fizyki teoretycznej, otwierając tym samym pole dla szerokich uogólnień”³⁸, a także z tym, co podkreśla wielu autorów (Lanczos, Yourgenau), zasady wariacyjne stanowią istotny element fizykalnego obrazu świata, a tym samym są elementem w konstrukcji materialistycznego obrazu świata w ogóle.

³⁶ Mamy tu na myśli formę, jaką nadają komórce „miodowej” pszczoły przy jej budowie.

³⁷ N. Rashevsky: *Mathematical Principles in Biology and their Applications*. New York 1961.

³⁸ A. S. Kompaniejec: *Teoreticzeskaja fizyka*. Moskwa 1957 s. 75.

А. Павляк

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИНТЕГРАЦИЯ ФИЗИКАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Бурное развитие науки в XX веке в значительной степени способствовало интенсивному росту дифференциации наук. Особенно отчетливо это видно на примере физики. В связи с этим необходимо проанализировать проблемы интеграции физикальных теорий. В статье описаны вариационные принципы, рассматриваемые как фактор, унифицирующий различные разделы физики. Сравнивая вариационные принципы с принципами сохранения, автор устанавливает, что принцип минимального действия является более общим, чем принцип сохранения энергии.

В последних разделах статьи автор пытается реконструировать материалистическую картину мира на базе физики, приходя к выводу, что общепризнанные тезисы о том, что материи в различных ее видах свойственны общие экстремальные закономерности, имеющие отражение в вариационных принципах, вызывает необходимость признания внутреннего и объективного единства закономерностей природы. Этот факт свидетельствует также и о том, что некоторые вариационные принципы можно использовать как методологические концепции в других областях науки (биологии, химии).

А. Pawlak

VARIATIONAL RULES AND THE INTEGRATION OF PHYSICAL THEORIES

The violent development of science in the 20th century has considerably contributed to an intense increase in the differentiation of sciences. This is especially evident in physics. In this connection it seems necessary to analyze the problems of integrating physical theories. Variational rules, treated as a factor unifying various sections of physics, are discussed in the article. By comparing variational rules with the rules of conservation, the author states that the rule of the smallest activity is more general than the conservation of energy rule.

In the final part of the article the author tries to materialistically reconstruct the image of the world on the ground of physics and reaches the conclusion that the acceptance of the thesis that general extreme regularities which are reflected in variational rules are characteristic of matter in its various forms, involves the necessity of acknowledging the internal and objective unity of nature's regularity. This fact also testifies to the possibility of transferring certain variational rules to other fields of science (biology, chemistry) as a methodological conception.