Dianni, Jadwiga

Recepcja geometrii analitycznej w Polsce w wiekach XVII-XIX

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 19/4, 677-700

1974

Jadwiga Dianni

RECEPCJA GEOMETRII ANALITYCZNEJ W POLSCE W WIEKACH XVII—XIX

Umysł ludzki zdaje się iść po drodze tak niezbaczalnej, każdy postęp tak zda się być wyznaczonym, że daremne byłyby próby pisania historii jakiejś nauki, gdyby tę pracę chciano rozpoczynać od jakiejkolwiek epoki nie rzuciwszy okiem na czasy i zdarzenia uprzednie

G. Libri: *Histoire des Sciences Mathematiques en Italie,* Paris 1838.

WSTĘP

Wpływ twórczości Descartesa na rozwój wiedzy nowożytnej był ogromny. Miał on swoje źródło w filozoficzno-naukowej ideologii Kartezjusza, w której problematyka metafizyczna łączyła się z pojęciami nauki o przyrodzie. Samoistne studia, poszukiwania i rozważania oraz wybitne zdolności matematyczne wielkiego filozofa doprowadziły go do nowych odkryć, mających istotne znaczenie dla rozwoju nauk ścisłych, głównie matematyki. Dlatego też omawiam w niniejszej rozprawie osiągnięcia Kartezjusza-matematyka, poddając dokładniejszej analizie jego odkrycia w dziedzinie geometrii, zwanej dziś geometrią analityczną.

Zamiłowania matematyczne Kartezjusza skierowały go najpierw ku matematyce greckiej, której szczytowymi osiągnięciami były dzieła Euklidesa, Archimedesa, Apolliniosa z Pergi, Pappusa. Zapoznał się również z tematyką prac uczonych XVI w.: Viety, Cardana, Stevina, Keplera. Opierając się na odkryciach W. Snelliusa, Descartes pierwszy ujął w ścisłą formę geometryczną prawo refrakcji promieni świetlnych.

Koncepcję badania utworów geometrycznych za pomocą analizy poprzedziły niewątpliwie rozważania związków algebraicznych i ta właśnie dziedzina zawdzięcza Kartezjuszowi w znacznej mierze dzisiejszą symbolikę, wiele ważnych twierdzeń i metod w teorii równań algebraicznych. Wprowadził on m.in. „metodę współczynników nieoznaczonych", która ma ważne zastosowanie w teorii szeregów i w analizie. Zajmował się też równaniami trzeciego i czwartego stopnia. Wiele ważnych odkryć matematycznych zawiera jego korespondencja z współczesnymi mu uczonymi, zwłaszcza z F. de Beaune (Debeaunem) oraz M. Mersene. W niej rozważał m.in. kwadraturę i wyznaczanie środków ciężkości parabol różnych rzędów, kubaturę brył obrotowych z nich powstających oraz konstrukcję stycznej do cykloidy. Badania z tej dziedziny doprowadziły Kartezjusza do odkrycia krzywej, której odpowiada równanie $x^3+y^3=nxy$, a zwanej dziś „liściem Kartezjusza" (*folium Cartesi*). Początek układu współrzędnych, do których odniesiona jest ta krzywa, jest jej punktem węzłowym, a osie współrzędnych są stycznymi do krzywej w tym punkcie. Krzywa ma postać raczej pętlicy, od której w punkcie węzłowym rozchodzą się dwie gałęzie nieskończone, mające wspólną asymptotę. W spuściźnie rękopiśmiennej Kartezjusza odkryto w 1870 r. (de Jonquier) zapiski, podające związek między liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków wielościanu, z których wynika twierdzenie zwane dziś „twierdzeniem Eulera".

Już ten zakres badań wskazuje, jak ważne miejsce zajmowała matematyka w badaniach Kartezjusza. Tylko opierając się na jej założeniach — twierdził Descartes — możemy odróżnić w naukach prawdę od fałszu. Stąd dążenie do uogólnienia podstawowych prawideł matematycznych tak, by mogły one stanowić podstawę wszelkiego rozumowania. W prywatnym dzienniku zanotował filozof 10 XI 1619, że w dniu tym pojął wreszcie „podstawy wspaniałej nauki" [1]. Niewątpliwie podnietę do swych ważnych odkryć mógł znaleźć Kartezjusz u swych poprzedników, niemniej jednak jego twórczy geniusz potrafił zespolić te dwie tak na pozór różne dziedziny: analizy i geometrii, i stworzyć to, co dziś nazywamy geometrią analityczną.

Śledzenie zaczątków tej myśli doprowadza nas do źródła, z którego zrodziła się cała wiedza matematyczna, a więc do bardzo odległej starożytności. Ślady układu współrzędnych w postaci siatek prostych równoległych przecinających się pod kątem prostym znajdujemy na ścianach piramid egipskich jako środek pomocniczy do wyznaczania położenia i wielkości płaskorzeźb zdobiących grobowce faraonów [2]. Wprowadzone przez astronoma greckiego Hipparchosa (II w. p.n.e.) odcinki „długość" (μήκος) i „szerokość" (πλάτος) dla oznaczenia położenia punktu na powierzchni stanowią współrzędne odniesienia do południka przechodzącego przez wyspę Rhodos jako osie układu [3]. Współrzędnymi są również równoległe, które wyznaczał Heron z Aleksandrii (I w. n.e.) prostopadle do obranej osi przy pomiarach gruntowych, by otrzymać łatwe do obliczenia powierzchnie w formie trapezów [4]. Jeszcze bardziej zbliżonymi do właściwej formy układu współrzędnych były dwie podstawowe, prostopadłe do siebie linie *decimana* i *cardo*, wyznaczające zasadnicze kierunki planu budowy nowo zakładanego przez Rzymian miasta [5].

Obok tych praktycznych zastosowań układu osi pojawiły się w matematyce greckiej teoretyczne rozważania Euklidesa, Archimedesa i Apolloniosa z Pergi.

Euklides prócz słynnych *Elementów* napisał kilka innych prac, m.in. traktat o tzw. „poryzmach" *(porismata)*. Dzieło to jednak zaginęło, ale informacje o jego treści przekazał nam Pappus w swym *Zbiorze matematycznym* [6]. Że owe poryzmy zawierały zaczątki geometrii analitycznej,

---

[1] W. Voisé, Recenzja pracy A. Koyré: *Introduction à la lécture de Platon suivi de Entretiens sur Descartes* (Paris 1962). „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 1963 nr 3 s. 426—428.

[2] Odkrycie w piramidzie króla Seta (1400 p.n.e.). Por. J. G. Wilkenson: *Manner and Customs of the Ancient Egyptian.* T. 3. London 1837 s. 313.

[3] H. Berger: *Die geographische Fragmenten des Hipparch.* Leipzig 1869 s. 15, 29—30.

[4] *Vermessungslehre und Dioptra.* Leipzig 1903 s. 26, 266, 270.

[5] M. Cantor: *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst.* Leipzig 1876 s. 17 i n.

[6] *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Frederico Commandino in latinum conversae et commentariis illustratae.* Piza 1588.

wynika z wywodów Pappusa, określającego te zagadnienia jako odnoszące się do poszukiwania miejsc geometrycznych. Opierając się na wskazówkach Pappusa uczeni różnie usiłowali odgadnąć rzeczywiste znaczenie poryzmów. Udało się to dopiero francuskiemu historykowi matematyki M. Chaslesowi w rozprawie poświęconej specjalnie temu zagadnieniu [7], a opartej na dokładnej analizie wskazówek Pappusa. *Zbiór poryzmów* było to zestawienie rozmaitych własności lub rozmaitych położeń linij prostych i kołowych, przedstawiający zarazem przekształcenie tych własności jedne na drugie, czyli że poryzmy bły poniekąd równaniami tych krzywych [8].

Nie mając symbolów i sposobów algebraicznych, musiał Euklides, jak i inni matematycy greccy, rozmaitymi sposobami pomocniczymi szukać związku nowego miejsca geometrycznego ze znanym. Zatem nauka poryzmów była istotnie geometrią analityczną starożytnych, zastępowała analizę Descartesa, w której dzięki badaniu równań możemy określić dane miejsce geometryczne, jego naturę i położenie.

Jeśli chodzi o badania Archimedesa, to podkreślić musimy ważność jego „metody wyczerpywania", którą ten wielki matematyk przygotował odkrycie rachunku różniczkowego. Jeśli zaś weźmiemy pod uwagę ważny element geometrii analitycznej, mianowicie przecięcia stożkowe, to tu naczelne miejsce przypada Apolloniosowi z Pergi, który w swych sławnych Κωνικά (*Przecięcia stożkowe*) zawarł syntezę poprzednich osiągnięć w tej dziedzinie, wzbogaconą własnymi odkryciami [9]. Przez odpowiednie prowadzenie płaszczyzn tnących otrzymał Apollonios na jednym stożku wszystkie przecięcia stożkowe, wprowadzając dla nich nazwy: parabola, elipsa, hiperbola. Są one w związku z pochodzącymi od pitagorejczyków konstrukcjami powierzchni, objaśnionymi przez Euklidesa w ks. I (44) i VI (28, 29) *Elementów*.

Wprowadzony przez Apolloniosa układ dwóch osi, w którym np. dla elipsy jedna z osi jest zarazem średnicą, a druga jej styczną, jest nierozdzielnie związany z danym przecięciem stożkowym, tak że uważać go należy za pewne charakterystyczne linie pomocnicze, ułatwiające konstrukcję przecięcia stożkowego. Nie mamy tu zatem układu dla dowolnego przecięcia stożkowego, stąd metoda ta, w której brak algebry, nie może być uważana za geometrię analityczną w ścisłym tego słowa znaczeniu. Niemniej jednak wyprowadzone przez Apolloniosa w Κωνικά stosunki i proporcje między długościami cięciw równoległych do stycznych i ich odległościami od punktu styczności doprowadzają do związków, odpowiadających dzisiejszym równaniom, określającym w geometrii analitycznej przecięcia stożkowe.

Tak przedstawiałby się historyczny zarys jednego elementu geometrii analitycznej: pojęcia układu współrzędnych. Gdy weźmiemy pod uwagę drugi element składowy, a więc algebrę, to tu musimy sięgnąć do źródeł wiedzy średniowiecza, a mianowicie do matematyki hinduskiej. Według

---

[7] M. Chasles: *Les trois livres des porismes d'Euclide retablis pour la première fois d'après la notice et les lemmes de Pappus sur la forme des enoncées de ses propositions.* Paris 1870.

[8] W. Zajączkowski: *Geometrya analityczna.* Warszawa 1884 s. XVI.

[9] Przecięciami stożkowymi posługiwał się już w IV w. p.n.e. Menajchmos, stosując je do rozwiązania zagadnienia podwojenia kostki („Problem delijski") za pomocą dwóch przecinających się parabol. Por. L. Heiberg: *Archimedes Opera omnia.* Leipzig 1900—1915, t. 3 s. 78—80.

wspomnianego już Chaslesa [10], Hindusi posługiwali się algebrą dla ułatwienia dowodów twierdzeń geometrycznych, geometrią zaś dla udowodnienia prawideł algebry oraz uwidocznienia za pomocą figur przypadków analizy. Połączenie tych dwóch dyscyplin to dalszy poniekąd krok do powstania geometrii analitycznej.

Metody te rozwijali szerzej matematycy arabscy, którzy czerpali swą wiedzę zarówno ze źródeł greckich, jak i hinduskich, co występuje wyraźnie zwłaszcza u autorów IX w. Zagadnienia dziś należące do algebry rozwiązywali — jak wiemy — matematycy greccy w drodze konstrukcji geometrycznych, przy czym Euklides i Archimedes doszli w ten sposób do rozwiązywania równań drugiego stopnia. Rozszerzając tę metodę matematycy arabscy rozwiązali równania trzeciego stopnia. Późniejsi jednak matematycy arabscy, np. Abu Kamil Soga (IX w.) obrali w swych rozważaniach odmienną drogę. W *Zbiorze zadań* [11] Abu Kamil Soga rozwiązywał zagadnienia geometryczne w drodze algebraicznej. Pozostający pod wpływem tego uczonego Leonard Fibonacci z Pizy (XIII w.) rozważał obszernie zagadnienia algebraiczne w *Practica geometriae* [12] (1220) oraz w *Liber abaci* [13]. Podobnie rozumował Luca Pacioli w swej słynnej *Summa* [14]. Problemy te spotykamy również w korespondencji Regiomontanusa [15] oraz w podręczniku matematycznym J. Widmana [16]. Występuje tu już algebra w swej drugiej fazie, w postaci pierwszych symbolów, tzw. „kosicznych" od słowa *Coss*, oznaczających niewiadomą *X*. *Ta* „algebraiczna geometria" rozwijała się dalej w dziełach algebraików włoskich XVI i w początkach XVII w. Wybitnymi przedstwicielami tego kierunku badań są N. Tartaglia [17], G. Cardano [18], L. Benedetti [19], M. Ghetaldi [20]. Symbole algebraiczne w tych pracach są charakterystyczne dla algebraików włoskich i różnią się od tych, które wprowadzają matematycy francuscy, np. Vieta [21].

GEOMETRIA ANALITYCZNA: P. FERMAT I *GÉOMÉTRIE* DESCARTESA

Z zespolenia się dwóch elementów w wielowiekowych badaniach, które przedstawiliśmy w ogólnym zarysie do wieku XVII, powstała w swym

---

[10] M. Chasles: *Apercu historique sur l'origine et le developpement de méthodes en géométrie.* Paris 1870. Note XII. (II wyd. 1875).

[11] H. Suter: „Bibliotheca Mathematica" 10: 1909—1910 s. 15—42. Pamiętać jednak należy, że mamy tu „algebrę słowną", a nie symboliczną.

[12] *Scritti di Leonardo Pisano matematico.* T. 2. Roma 1857 s. 223—224.

[13] Tamże s. 4; C. Karpiński: „Bibliotheca Mathematica" 12—13: 1911—1912, s. 40—55.

[14] *Summa di Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita.* Venezia 1494 cz. 2, Dist. 8.

[15] M. Curtze: *Der Briefwechsel des Regiomontans mit Giovanni Bianchini;* J. Speier und H. Roeder: „Abhandlungen Geschichte der Mathematik" 2: 1902 s. 190 i następne.

[16] *Behende und hubsche Rechnung.* Leipzig 1489, Bl. D_3—D_4 oraz D_7 *recto* i *verso.*

[17] *Opere del famosissimo Nicole Tartaglia.* Venezia 1606 s. 296 i n.

[18] *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus.* Norimbergae 1545 cap. XI—XII.

[19] *Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber XIX.* Taurini 1585.

[20] E. Golcich: *Eine Studie über Entdeckung der analytischen Geometrie mit Berücksichtigung eines Werkes des Martino Ghetaldi aus dem Jahre 1630.* „Abhandlungen Geschichte der Mathematik" 1889 oraz H. Wieleitner: „Bibliotheca Mathematica" 13: 1912 s. 242—247.

[21] *Opera.* Lejda 1646 s. 229—239.

całokształcie ta dyscyplina, która dziś nosi nazwę geometrii analitycznej. Jest to gałąź geometrii zajmująca się badaniem utworów geometrycznych za pomocą metod analizy. Utworom geometrycznym, a więc zbiorom punktów, odpowiadają w sposób jednoznaczny pewne zbiory liczbowe i na odwrót. To przyporządkowanie opiera się na metodzie układu współrzędnych. Najdawniejsza metoda to układ Descartesa, którym każdemu punktowi figury płaskiej odpowiadają w prostokątnym układzie osi dwie współrzędne, odcięta i rzędna, tj. dwie odległości od osi, każdemu zaś punktowi utworu przestrzennego odpowiadają odległości od trzech płaszczyzn współrzędnych. Równania $f(xy) = 0$, wyrażające związek między rzędną i odciętą punktu, jest równaniem danego utworu geometrycznego płaskiego (geometria analityczna dwuwymiarowa), zaś związek $f(x,y,z)=0$ — jest równaniem danego utworu przestrzennego (geometria analityczna trójwymiarowa). Stąd badanie utworów geometrycznych sprowadza się do badania ich równań. W tym właśnie połączeniu geometrii i analizy tkwi wielkość odkrycia Descartesa. Zatem cechą charakterystyczną tej gałęzi matematyki nie jest materiał przez nią rozpatrywany, lecz raczej stosowana metoda badania figur geometrycznych. Figury te mogą być rozważane jako twór elementów stałych lub jako miejsce geometryczne elementów zmiennych. Geometria analityczna posługuje się w niektórych zagadnieniach pojęciami empirycznymi punktu, linii, powierzchni. Mogą one być jednak zastąpione przez układy liczb w celu wyznaczenia położenia pewnych elementów lub utworów geometrycznych względem innych tworów zasadniczych i w tym określeniu mieści się główna cecha geometrii analitycznej. W miarę rozwoju tej gałęzi geometrii powstawały także inne układy.

Zanim przystąpimy do omówienia *Géométrie,* zwrócimy uwagę na ważny, wiążący się z jej treścią szczegół, na pokrewne temu tematowi badania Fermata. Uczony ten wyprzedził w pewnych szczegółach odkrycia Descartesa, ale wyników swych badań nie opublikował. Z listu do Robervala (z 22 IX 1636) dowiadujemy się, że zagadnieniami z zakresu geometrii analitycznej zajmował się Fermat już od 1629 r.[22] W spuściźnie naukowej Fermata, opublikowanej w 1679 r., znajdują się rozważania na ten temat, a jego rozprawa *Ad locos planos et solidos isagoge*[23], napisana przed ukazaniem się *Géométrie*[24], odznacza się jasnością ujęcia tematu, ale z zachowaniem, w przeciwieństwie do Descartesa, symboliki algebraicznej Viety. Celem głównym rozprawy — zaznacza Fermat — jest wykazanie, że równanie oznaczone o jednej niewiadomej określa punkt, równanie o dwóch niewiadomych — miejsce geometryczne na płaszczyźnie, a równanie z trzema niewiadomymi — utwór przestrzenny. Równanie stopnia pierwszego o dwóch niewiadomych przedstawia prostą, równanie zaś drugiego stopnia — przecięcie stożkowe[25]. Wyprowadzając równanie prostej nadaje mu Fermat

[22] *Opera varia mathematica Petri de Fermat.* Tolosae 1679 s. 68—73.

[23] Tamże s. 2—11.

[24] Wiadomość z „Journal des Savants" 1665, przedruk w *Oeuvres de Fermat.* Paris 1897—1908: *Une introduction aux lieux plans et solides qui est un traité analytique concernant la solution des problèmes plans et solides qui avait été vue devant que M. Descartes eut rien publié en ce sujet.*

[25] *Opera varia mathematica Petri de Fermat.* Tolosae 1679: *Novus secundarum et ulteriorum ordinis racicum in analysis usus, Appendix,* s. 61 oraz tamże *Ad locos planos...* s. 7.

postać $ax = by$ oraz w formie ogólnej $a\ (c - x) = by$[26]. Fermat rozważa także równanie okręgu, elipsy i hiperboli. Podaje też równanie asymptot hiperboli oraz równania paraboli.

Doceniając w pełni znaczenie badań Fermata, musimy przyznać prawo pierwszeństwa odkrycia Descartesowi, a rok 1637, w którym ukazała się w Lejdzie jego *Géométrie*, przyjąć za rok narodzin geometrii analitycznej.

Géométrie ukazała się w dziele *Essays philosophiques*, zawierającym obok niej jeszcze dwie rozprawy: *Dioptrique* i *Météores*, poprzedzone filozoficznym wstępem *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*. Ten wstęp motodologiczny uważał autor za bardzo ważny. Zawarte tu tezy miały tworzyć podstawy racjonalizacji prawideł kierowania umysłem, a następujące po nim rozprawy miały być przykładami stosowania tych praw w nauce.

Dzieło Descartesa było niewątpliwie wcześniej napisane, ale autor bał się ogłaszać swe odkrycia, zwłaszcza gdy doszła go wiadomość o wyroku w 1633 r. inkwizycji rzymskiej nad Galileuszem. Nie uniknął jednak — jak wiemy — Kartezjusz prześladowań, a jeszcze w trzynaście lat po jego śmierci, w 1663 r., dzieła uczonego zostały umieszczone na *Indeksie ksiąg zakazanych* z adnotacją *donec corrigantur*.

Géométrie składa się z trzech ksiąg: I — *Des Problèmes, qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites;* podane są tu konstrukcje działań arytmetycznych przy przyjęciu dowolnego odcinka za jednostkę. Założenia te prowadziły do równań, za pomocą których rozwiązuje się zadanie geometryczne, i tu wyjaśnia Descartes znaczenie pierwiastków ujemnych. Księga II — *De la nature des lignes courbes* obejmuje to, co dziś odpowiada pojęciu „zasady geometrii analitycznej" (podział krzywych na „geometryczne" i „mechaniczne", czyli wedle dzisiejszej terminologii „algebraiczne" i „przestępne"), przedstawienie krzywych za pomocą równań, podział krzywych wedle stopnia równania, kreślenie normalnych do linij krzywych oraz omówienie własności pewnego rodzaju krzywych, zwanych dziś „owalami Descartesa" (ze względu na ich ważne zastosowanie w optyce). Księga III — jest właściwie traktatem algebraicznym o teorii równań, które Descartes stosuje do rozwiązania „klasycznych zagadnień starożytności" podwojenia kostki i trysekcji kąta.

Tak się przedstawia w ogólnym ujęciu treść *Géométrie*. Przypatrzmy się jej bliżej. Gdyby czytelnik obeznany z dzisiejszą geometrią analityczną wziął to dzieło do ręki, doznałby niewątpliwie w pierwszej chwili rozczarowania; nie znajdzie tam bowiem z góry założonego teoretycznego ujęcia, jakie dziś spotykamy w podręcznikach tej dyscypliny. Descartes zaczyna od rozważania wzajemnego związku między działaniami algebraicznymi a geometrią i stąd wysnuwa wniosek, iż zagadnienia geometryczne można rozważać algebraicznie. Uzasadnia to wykazując, jak można cztery zasadnicze działania, wyciąganie pierwiastków i rozwiązywanie równań drugiego stopnia, przedstawić geometrycznie. Zaznacza przy tym wyraźnie, że w przeciwieństwie do poprzedników (np. Viety) wielkości a, a^2, a^3 mają znaczenie czysto algebraiczne, są pojęciami oderwanymi od pojęcia linii, powierzchni, przestrzeni. Rozważa następnie za-

---

[26] Podaliśmy tu równanie w naszej symbolice. (*Oeuvres de Fermat*, t. 1 s. 92—93: *D in A aequatur B in E* oraz *Bq—Aq aequatur Eq* (symbolika Viety).

gadnienie ujęcia zadań geometrycznych w formę równań przez wprowadzenie niewiadomych. Stwierdza przy tym, że liczba równań przy wyczerpaniu danych założeń może być mniejsza niż ilość niewiadomych; zagadnienie jest wówczas nieoznaczone, wobec czego dla pewnych niewiadomych można przyjąć dowolne wartości i z nich wyznaczyć pozostałe. Nie podaje reguł dla wyboru zmiennych w tych nieoznaczonych zadaniach, lecz przystępuje do omawiania zagadnienia wziętego ze *Zbioru zadań* Pappusa [27], które zajmowało wówczas żywo matematyków [28]. Chodzi tu mianowicie o wyznaczenie miejsca geometrycznego punktów spełniających związki: dla czterech prostych $d_1 d_2 = d_3 d_4$, dla sześciu $d_1 d_2 d_3 = d_4 d_5 d_6$ (gdzie d_i = 1,2,3,4 lub i = 1,2,6, są odległościami punktu od zadanych prostych g_i).

Przy nieparzystej zaś ilości prostych trzeba dołączyć wielkość stałą dowolną, np. dla pięciu prostych $d_1 d_2 d_3 = a d_4 d_5$. To zagadnienie spotykamy jako podstawowe w I i II ks. *Géométrie* i na nim należy się oprzeć przy określaniu, na czym polega metoda Descartesa. Śledząc tok dalszych jego rozważań odnosi się wrażenie, że autor jakby celowo nie wprowadza czytelnika w szczegóły tej budowy logicznej, na której opiera swe odkrycie. Nie ma tu właściwie systematycznej geometrii analitycznej, stwierdzone jest tylko jej istnienie. Równanie np. linii prostej rozważa w sposób następujący: bierze pod uwagę równanie

$$y = \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + Dx - \frac{p}{m}xx}$$ gdzie x jest wielkością nieoznaczoną.

To równanie bada dla różnych możliwości (także gdy wyrażenie pierwiastkowe znika) i wtedy wykazuje, że rozważane miejsce geometryczne jest linią prostą. W innym przykładzie liczbowym objaśnia, że równanie $y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x}$ odnosi się do koła. W wyborze współrzędnych dla zagadnienia Pappusa stwierdzić można u Descartesa wpływ greckiej nauki o przecięciach stożkowych. Przyjmuje za oś jedną z danych prostych g_i jako oś odniesienia badanego miejsca geometrycznego. Z punktu C wykreśla równoległe do kierunku d_i. Odległości spodków tych równoległych od punktu stałego na G_i (punkt przecięcia z G_k) oznacza X, równoległe zaś przez Y; ich wartości odpowiednio zwiększone zestawia w równaniu nieoznaczonym, w którym pary wartości na X i Y wyznaczają punkty C. A więc stwierdza Descartes *Prenant succesivement infinies diverses grandeur pour la ligne X on en trouvera aussi infines pour la ligne y et ainsi on aura une infinité des divertes points tels que celui, qui est marqué C par le moyen desquels on descrivera la ligne courbe demandé* [29]. W tych słowach ujęty jest jasno cel geometrii analitycznej. Zaznacza tu autor, że ta metoda badania może być również rozszerzona na utwory przestrzenne przez zastosowanie rzutów na odpowiednio dobrane płaszczyzny.

Uczniowie i zwolennicy Descartesa rozumiejący znaczenie jego odkrycia starali się uzupełnić tekst *Géométrie* objaśnieniami, które uczy-

---

[27] *Pappi Συναγωγή lib. VII.* Objaśnienia do Κωνικά Apolloniosa. T. 2. Berlin 1876 1878 s. 678.

[28] Por. *Oeuvres de Descartes.* T. 1. Paris 1897 s. 232—235.

[29] *Géométrie* w *Oeuvres de Fermat.* Wyd. A. i P. Tannery, t. 6 s. 386 i n.

niłyby to dzieło przystępniejszym dla czytelnika. Już w 1683 r. ukazał się kursujący w odpisach zwięzły komentarz anonimowy *Calcul de Mons. Des Cartes*[30]. W 1639 r. wydał Debeauene *Notae breves*. Dużą zasługę w upowszechnianiu odkrycia Descartesa ma F. v. Schooten, działający wówczas na Uniwersytecie w Lejdzie. Jeden z jego wykładów wydał E. Bartholinus w 1651 r. w Lejdzie[31]. W 1649 r. wydał v. Schooten łacińskie tłumaczenie *Géométrie* wraz z komentarzem. Następnie ukazały się one w latach 1659—1661 w Amsterdamie wraz z komentarzami Debeaune'a, Bartholinusa, Huddego, v. Neuratha, de Witta. Wydanie z objaśnieniami Huygensa pojawiło się w Amsterdamie w 1683 r., w 1695 r. zaś we Frankfurcie nad Menem z komentarzem Jakuba Bernoulliego I. Niemieckie tłumaczenie wydał L. Schlesinger w 1894 r. w Berlinie. Facsimile z angielskim tłumaczeniem wydali D. E. Smith i L. Latham w Londynie w 1925 r. Wymieniliśmy tu najważniejsze i najwcześniejsze tłumaczenia, pomijając wydania późniejsze typu *Opera omnia*.

Mimo zainteresowania matematyków XVII w. tym nowym odkryciem, jak wynikałoby ze sporej ilości komentarzy, dalsze postępy w tej dziedzinie geometrii nie zaznaczyły się aż do czasów Newtona i Eulera. Dowodem jest choćby fakt pomijania przez matematyków aż do XVIII w. współrzędnych ujemnych, przez co rozważania analityczne były z konieczności ograniczone. Dopiero Newton w *Enumeratio linearum tertii ordini* z 1704 r. bierze pod uwagę cztery ćwiartki układu osi, a więc i współrzędne ujemne[32].

Ważne zmiany w traktowaniu geometrii analitycznej przyniosła druga połowa wieku XVIII dzięki publikacjom typu podręcznikowego podawanym przez matematyków francuskich. Ta właśnie działalność zasługuje na szczególne podkreślenie ze względu na jej wpływ na recepcję geometrii analitycznej w Polsce.

W żadnym z wymienionych dotychczas dzieł poświęconych omawianej dyscyplinie nie spotykamy terminu „geometria analityczna". Wprowadził go na stałe do języka matematycznego S. F. Lacroix w swej słynnej publikacji *Courbes des Mathématiques*[33]. Z nazwą tą wiąże się terminologię określającą położenie utworów geometrycznych w układzie współrzędnych. Zasługę Lacroix podkreśla L. Puissant, cytując jego wypowiedź: *Il existe — dit Lacroix — une manière d'envisager le géométrie, qu'un pourrait appeler „géométrie analytique" et qui consisterait a déduir les proprietés de l'etendu du plus petit nombre possible des principes et par des méthodes vraiment analytiques*[34]. Lacroix pierwszy wprowadził równanie linii prostej w formie $y = ax + b$, oznaczając przez a tangens kąta, jaki tworzy prosta z dodatnim kierunkiem osi x, przez b zaś odcinek wyznaczony przez tę prostą na osi y. On też podaje po raz pierwszy dalsze związki, a więc równanie prostej przechodzącej przez

[30] Być może napisany przez samego Descartesa. Por. *Oeuvres de Fermat*, t. 6 s. 457 oraz t. 10 s. 669—678.

[31] *Francisci a Schooten Principis matheseos universalis seu introductio ad geometriae methodum Renati Descartes*. Lugduni Batavorum 1651.

[32] Dodatek do *Optyki* (1704). Por. *Opuscula Newtoni*. T. 1, Lausanne et Geneve 1744 s. 247 i n.

[33] Jedną częścią tej publikacji jest *Traité elementaire de trigonometrie rectiligne et sphérique et d'application d'algèbre a la géométrie*. Paris 1798—1799 (II wyd. 1799—1800).

[34] L. Puissant: *Recueil de diverses propositions de géométrie resolues par l'analyse algebraique*. Paris 1801. *Avertissement* s. 6.

dwa punkty, odległość dwóch danych w układzie punktów, odległość prostej od danego punktu, kąt między dwiema prostymi, zatem — jak widzimy — podstawowe zagadnienia geometrii analitycznej. Systematycznie omawia też Lacroix równanie koła, paraboli, elipsy, hiperboli. Ten nowy termin spotykamy u J. B. Biota, autora *Essai de géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second degré* (Paris 1802). Dzieło było tłumaczone na inne języki, między innymi i na język polski.

Śledzenie dalszego rozwoju myśli Descartesa przekraczałoby ramy niniejszej rozprawy. Stwierdzimy tylko ogólnie, że późniejsze badania rozszerzyły zakres geometrii analitycznej na utwory przestrzenne. Ważność odkrycia Kartezjusza stwierdziły w pełni metody rachunku nieskończonościowego, rozbudowanie teorii krzywych trzeciego i czwartego stopnia czy teoria funkcji.

GEOMETRIA ANALITYCZNA W POLSCE

Badanie recepcji tej gałęzi geometrii w Polsce wiąże się z dwoma pytaniami: po pierwsze, czy *Géométrie* była u nas znana i doceniana, a po drugie, kiedy dotarła do Polski geometria analityczna w tym ujęciu, jakie jej nadali matematycy francuscy wraz z mianem „elementarnej".

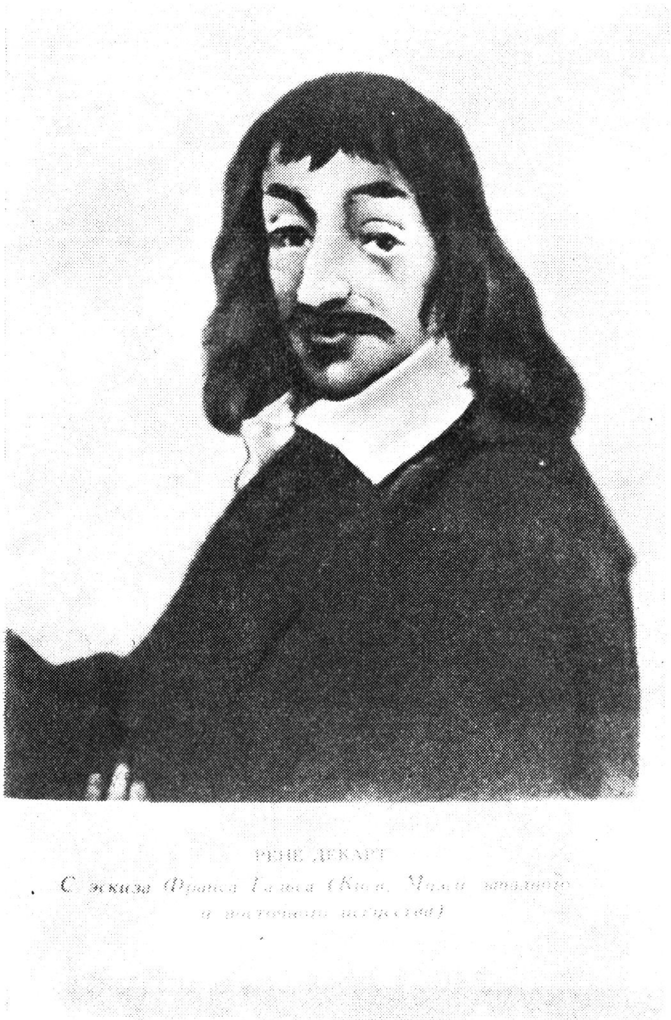
Aby na pierwsze z tych pytań odpowiedzieć możliwie wyczerpująco, trzeba je rozważyć na podłożu ogólnych stosunków kulturalno-oświatowych, poziomu naukowego, łącznie z poszczególnymi fazami wpływu kartezjanizmu w Polsce od XVII w. poczynając. Otóż *Géométrie* była u nas w tym wieku właściwie nie znana, nasi uczeni o niej nie wspominają. Jest to zrozumiałe, gdy zważymy, że w XVII w. nie zajmowano się u nas algebrą, a więc dziedziną będącą podstawowym elementem składowym *Géométrie*. W zbiorach rękopiśmiennych Biblioteki Jagiellońskiej zachowały się tylko nieliczne zapiski „algebry słownej i kosicznej" [35]. Zagadnieniom algebry poświęcony jest jeden z rozdziałów rękopisu Franciszka Zajerskiego (XVII w.) [36]. Rozwiązuje w nim autor zagadnienie geometryczne za pomocą równań ułożonych słowami. W rękopisie Józefa Naronowicza Narońskiego z tego wieku zagadnienia ujęte są w algebrę symboliczną, wzory ustawione schematycznie wraz z ilustracją geometryczną. Ten cenny rękopis znajdował się w zbiorach Biblioteki Krasińskich w Warszawie i uległ zniszczeniu w czasie ostatniej wojny. Treść jego znamy z artykułu E. Stamma w „Wiadomościach Matematycznych" z 1906 r. Badania Naronowicza Narońskiego, nie ogłoszone drukiem, nie mogły wpłynąć na rozwój algebry.

Nawet nasi najwybitniejsi matematycy tego wieku traktowali algebrę raczej marginalnie, choć niewątpliwie doceniali jej znaczenie w zespole nauk matematycznych, jak widać z zachowanych zapisków Brożka i Pud-

---

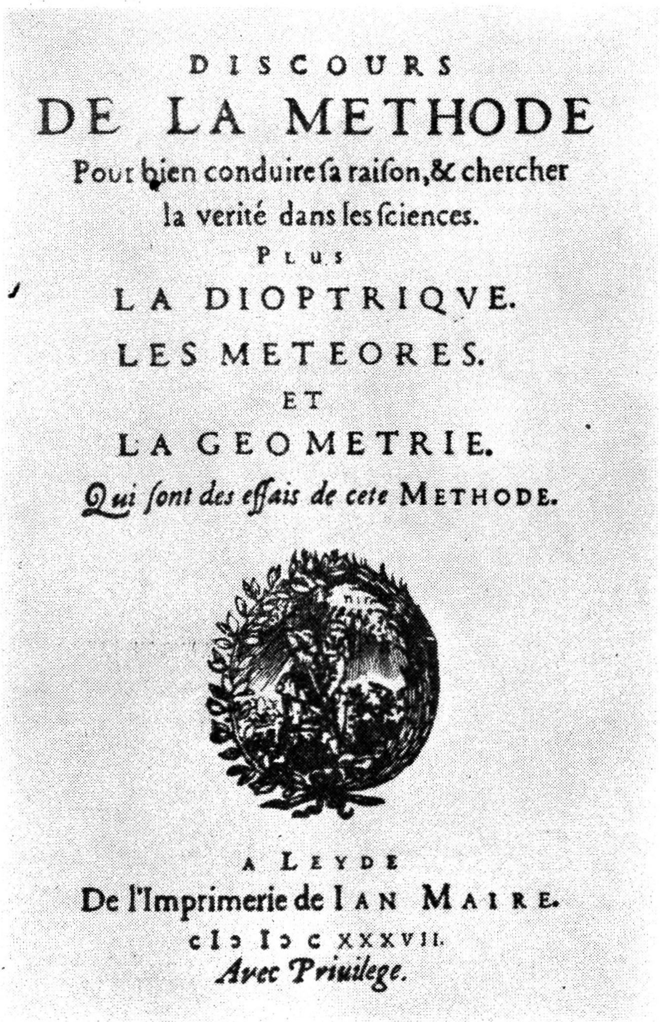
[35] W rkps 1924, który był własnością Miechowity, znajduje się traktat Jordana Nemorariusa *De numeris datis* (VIII w.), będący zbiorem zadań tekstowych rozwiązanych za pomocą równań. W tymże rękopisie znajduje się traktat rozpoczynający się od słów: *Explicit regula falsi apud philosophos aumenti et decrementi appellata... regulis algebre demptis optima.* W rkps. 558 mieści się (odkryty przez L. A. Birkenmajera) traktat *Liber florum Almagesti per Joannem Bianchinum... editum,* podający algebrę zwaną tu *regula coss;* wprowadzone są potęgi ułamkowe, liczby niewymierne *(numeri surdi),* pierwiastki stopni wyższych. W rkps. 601 zawarty jest traktat *Arismetrica algebre* podający nomenklaturę kosistów: *res* $= x$, *census* $= x^2$, *cubus* $= x^3$, *census census* $= x^4$.

[36] Biblioteka Kórnicka, rkps. 690.



Ryc. 1. René Descartes

Рис. 1. Рене Декарт



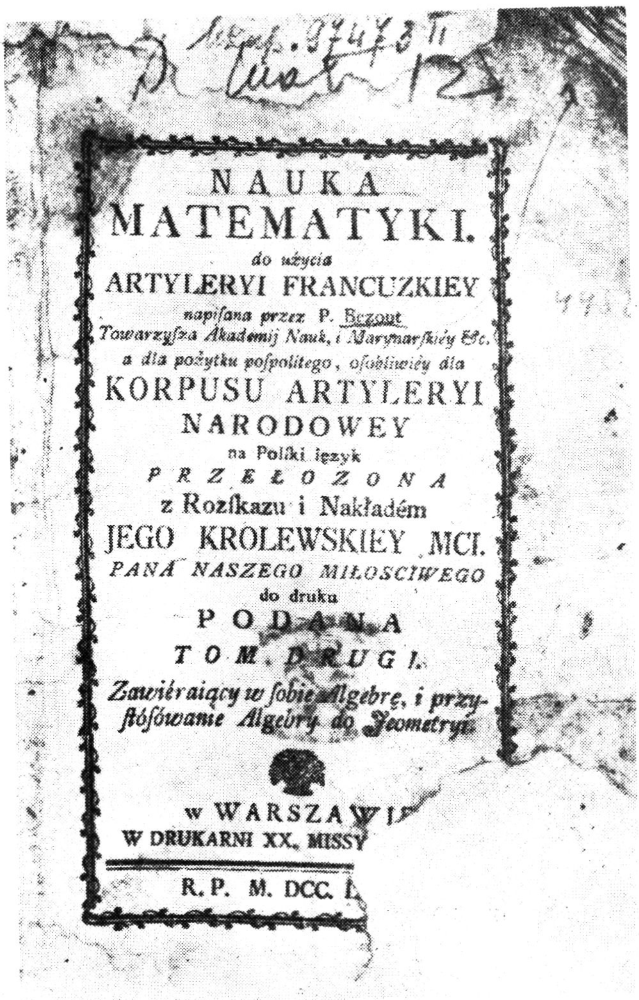
DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
cIↃ IↃ c XXXVII.
Avec Privilege.

Ryc. 2. Karta tytułowa *Discours de la methode* R. Descartesa

Рис. 2. Титульный лист *Discours de la methode* Р. Декарта

Fig. 2. La feuille de titre du *Discours de la methode* de R. Descartes



NAUKA
MATEMATYKI.
do użycia
ARTYLERYI FRANCUZKIEY
napisana przez P. Bezout
Towarzysza Akademij Nauk, i Marynarskiey &c.
a dla pożytku pospolitego, osobliwiey dla
KORPUSU ARTYLERYI
NARODOWEY
na Polski język
PRZEŁOZONA
z Roskazu i Nakładém
JEGO KROLEWSKIEY MCI.
PANA NASZEGO MIŁOSCIWEGO
do druku
PODANA
TOM DRUGI.
Zawieraiący w sobie Algebrę, i przystosowanie Algebry do Geometryi.

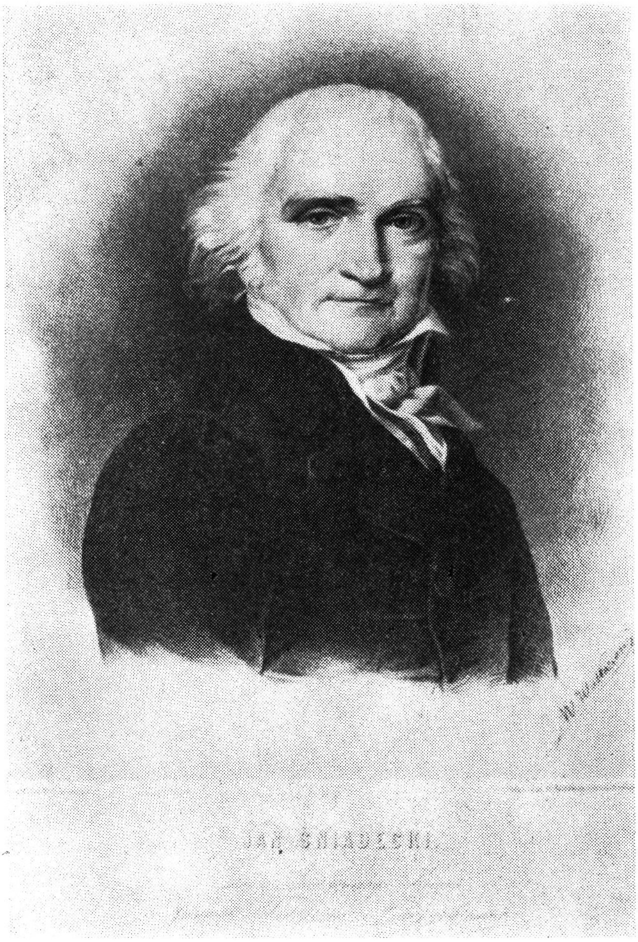
w WARSZAWI[E]
W DRUKARNI XX. MISSY[I]

R. P. M. DCC. L[XXIII]

Ryc. 3. Karta tytułowa dzieła Bezouta, przetłumaczonego przez J. Jakubowskiego

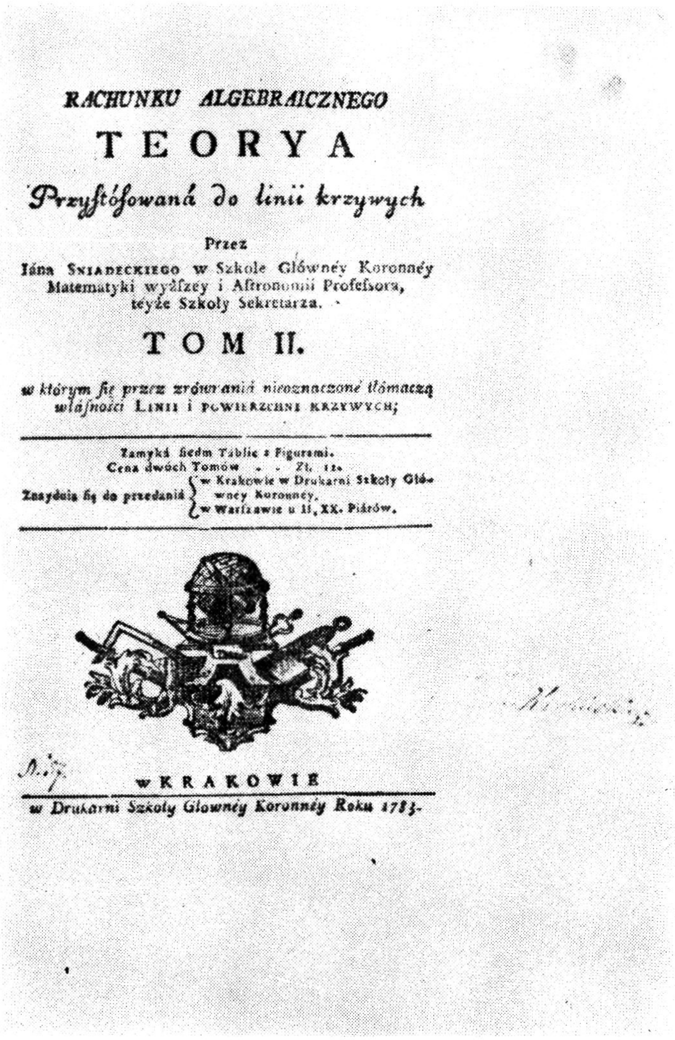
Рис. 3. Титульный лист труда Безу, переведенного Я. Якубовским

Fig. 3. La feuille de titre de l'oeuvre de Bezout traduite par J. Jakubowski



Ryc. 4. Jan Śniadecki

Рис. 4. Ян Сьнядецки



RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO

TEORYA

Przystósowaná do linii krzywych

Przez

Jána Sniadeckiego w Szkole Główney Koronney Matematyki wyższey i Astronomii Professora, teyże Szkoły Sekretarza.

TOM II.

w którym się przez zrównania nieoznaczone tłómaczą własności Linii i powierzchni krzywych;

Zamyká siedm Tablic z Figurami.

Cena dwóch Tomów . . Zł. 12.

Znayduie się do przedaniá { w Krakowie w Drukarni Szkoły Główney Koronney. w Warszawie u II. XX. Piarów.

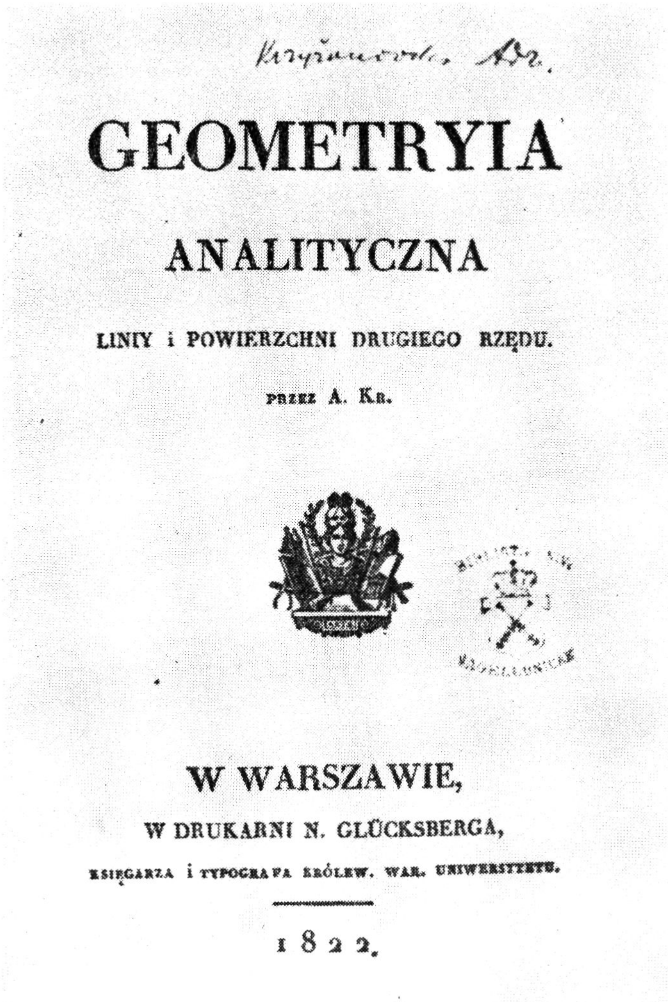
w KRAKOWIE

w Drukarni Szkoły Głowney Koronney Roku 1783.

Ryc. 5. Karta tytułowa dzieła J. Śniadeckiego

Рис. 5. Титульный лист труда Я. Сьнядецкого

Fig. 5. La feuille de titre de l'oeuvre de J. Śniadecki



Krzyżanowski Adr.

GEOMETRYIA

ANALITYCZNA

LINIY i POWIERZCHNI DRUGIEGO RZĘDU.

PRZEZ A. KR.

W WARSZAWIE,

W DRUKARNI N. GLÜCKSBERGA,

KSIĘGARZA i TYPOGRAFA KRÓLEW. WAR. UNIWERSYTETU.

1822.

Ryc. 6. Karta tytułowa *Geometrii analitycznej* A. Krzyżanowskiego

Рис. 6. Титульный лист *Аналитической геометрии* А. Кржижановского

Fig. 6. La feuille de titre de la *Géométrie analytique (Geometria analityczna)* de A. Krzyżanowski

łowskiego[37]. Ale co dziwniejsze, nie wspomina o *Géométrie* Głoskowski w swej *Geometria peregrinans*, mimo że w latach 1639—1641 przebywał w Holandii, studiując geometrię praktyczną i zagadnienia miernictwa w istniejącej od 1600 r. przy Uniwersytecie w Lejdzie Szkole Inżynierii Wojskowej[38]. Ogólnie rzecz biorąc wpływ myśli kartezjańskiej w Polsce XVII w. ograniczał się tylko do różnowierców, a szczególnie do Braci Polskich, których główną siedzibą był Raków. Do studiów nad kartezjanizmem skłaniało arian ich wielkie uznanie dla matematyki i docenianie jej ważności w programie szkolnym. W podręczniku matematycznym I. Stegmana *Institutionum mathematicarum libri duo* (Raków 1630), napisanym dla szkoły w Rakowie, we *Wstępie*, zawierającym pochwałę nauk ścisłych, widoczne jest obok wpływu poglądów Galileusza i Keplera oddziaływanie Descartesa. Ale i w bogatej literaturze ariańskiej tego okresu nie spotykamy rozważań poświęconych *Géométrie*.

O traktacie tym nie wspominają również polscy autorzy pierwszej połowy XVIII w. Ale też w drugiej połowie tego wieku, mimo żywego zainteresowania filozofią Descartesa, niewiele się zajmowano jego poglądami w odniesieniu do nauk ścisłych, a jeżeli brano je pod rozwagę, to ograniczano się właściwie do problemów fizyki, przy czym podkreślano ważność elementu doświadczalnego jako podstawy badań teoretycznych.

Na postawione pytanie w odniesieniu do znajomości *Geometrii* Kartezjusza w Polsce z końcem XVIII w. musimy odpowiedzieć przecząco, zanim zaś przejdziemy do odpowiedzi na drugie pytanie, dotyczące dotarcia do Polski geometrii analitycznej w ujęciu, jakie jej nadali matematycy francuscy, wspomnimy o pewnym dziełku, którego treść wiąże się w pewnym sensie z omawianą przez nas dziedziną. Jest to rozprawa *De sectionibus conicis* Jana Michała Hubego, późniejszego dyrektora Korpusu Kadetów w Warszawie, wydana w czasie jego studiów w Getyndze w 1759 r., a napisana prawdopodobnie jeszcze wcześniej, w 1757 r. w Lipsku, gdy autor miał 20 lat[39]. Dziełko wyszło w języku niemieckim pt. *Versuch einer analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten mit einer Vorrede vom A. G. Kästner*[40]. W przedmowie podkreślił niemiecki uczony samodzielność autora w ujęciu tematu.

---

[37] Zapiska ręką Brożka na okładce egzemplarza *Arytmetyki* Diofantesa, otrzymanego od profesora Akademii Padewskiej Aleksandra Syngaliticusa (Rkps Bibl. Jag. 544). Cytuje tu Brożek słowa wypowiedziane w 1611 r. przez Adriana van Roomen — *Adriani Romani dictus erat: si nescis Euclidem, si ignoras Diophantum, Apollonium, Pappum et alios veteres, magnam partem philosophiae et dialecticae organos nescis.* Na karcie wklejonej w tym egzemplarzu znajduje się zadanie o podziale wojsk Aleksandra Wielkiego, doprowadzające do układu nieoznaczonego o 12 niewiadomych. Brożek ogłosił je oddzielnie bez rozwiązania (por. *Wybór pism Jana Brożka.* T. 1. Warszawa 1956 s. 201, 312). Zapiski algebraiczne znajdują się również na egzemplarzu *Randologii* Nepera z 1617 r. (Sygn. 5851), który był własnością Brożka. W spuściźnie rękopiśmiennej po Stanisławie Pudłowskim (rkps 495, 2645) znajdują się problemy algebraiczne, świadczące o dążności autora do algebraizacji pojęć matematycznych wyrażonych przez matematyków greckich w formie geometrycznej. Te cenne osiągnięcia pozostały bez wpływu, rękopisy bowiem Pudłowskiego nie zostały wydrukowane.

[38] Warto podkreślić, że Głoskowski jest jednym z wczesnych prekursorów „geometrii liniału"; omawia bowiem zagadnienia związane z pomiarami w terenie przez użycie najelementarniejszych narzędzi mierniczych i prowadzenie wyłącznie linii prostych.

[39] J. Łęski: *Krótki rys życia Michała Hubego, dyrektora generalnego nauk w Korpusie Kadetów.* „Archiwum TPN" nr 21.

[40] S. Dickstein: *Michał Hube (1737—1807) jako autor dziełka o przecięciach stożkowych.* „Wiadomości Matematyczne" T. 43: 1937, dodatek.

Z końcem XVIII w. dociera wreszcie do Polski geometria analityczna w ujęciu matematyków francuskich. Fakt ten stoi w związku z wprowadzeniem nauki geometrii do szkół w myśl postulatów Komisji Edukacji Narodowej, która w swych programach tak ważne miejsce wyznaczyła nauczaniu matematyki. Jako podręcznik w Szkole Korpusu Artylerii Narodowej służyła *Nauka matematyki ... napisana przez P. Bezout ...*, a na język polski przełożona przez Józefa Jakubowskiego (Warszawa 1781, t. 1—4). Tom drugi ma tytuł *Nauka matematyki zawierająca w sobie fundamenta ilościów algebraicznych i przystosowanie algebry do arytmetyki i jeometryi;* zawierał teorię analityczną przecięć stożkowych, pierwszą w języku polskim. Omówione są też własności linii prostych oraz krzywych drugiego stopnia, ich równania oraz podana konstrukcja stycznych. Podajemy niektóre terminy tej pierwszej naszej geometrii analitycznej:

końcostyczne w hiperboli	—	asymptoty
międzyległe	—	podnormalne
odcinek	—	odcięta
palirzędna	—	parametr
przecinki stożkowe	—	przecięcia stożkowe
przytyczna	—	normalna
śródpał	—	ognisko

Rok 1783 zaznaczył się ważnym w dziejach naszej nauki faktem, mianowicie opublikowaniem dzieła Jana Śniadeckiego *Rachunku algebraicznego teorya przystosowana do linii krzywych*, wydanym w Krakowie, w dwa lata po objęciu przez autora katedry matematyki w Szkole Głównej. Jest to pierwsze polskie dzieło z dziedziny geometrii analitycznej o dużej wartości naukowej, napisane w duchu analizy nowoczesnej, przy czym podkreślić należy duże walory dydaktyczne książki. Wśród literatury podręcznikowej wieku Oświecenia, która spełniła tak ważną rolę popularyzowania wiedzy matematycznej łącznie z walką o polski język naukowy, dzieło Śniadeckiego wysuwa się na plan pierwszy. A chociaż niewątpliwie korzystał autor z literatury francuskiej, głównie Cousina, o czym sam zresztą pisze w liście do tego matematyka, to jednak książka jego zawiera oryginalne ujęcie tematu i nowe koncepcje metodologiczne, zwłaszcza w interpretacji istoty równania oraz własności linii krzywych. W związku z tym nadmienia autor we wspomnianym liście, że korzystał z teorii Eulera, ale wyłożył ją inaczej, a mianowicie „wykazując cechę asymptot przez granice wielkości wzrastających” [41].

Jednym z pierwszych uczonych, który w pełni ocenił wartość książki Śniadeckiego, był S. Lhuilier [42], ściśle — jak wiemy — związany z naszą kulturą umysłową jako autor podręczników matematyki pisanych na zamówienie Komisji Edukacji Narodowej. O książce Śniadeckiego tak pisze historyk matematyki S. Dickstein: „To dzieło jest najpoważniejszym zabytkiem naszej literatury matematycznej z końca poprzedniego stulecia, zaleca się treścią bogatą i obejmującą ważne działy umiejętności przedtem u nas prawie nieznane, jako też wykładem jasnym, opartym na najlepszych źródłach i pełnym uwag głębokich. Zawiera wiadomości

[41] S. Dürr: *Jan Śniadecki matematyk.* „Studia i Materiały z Dziejów Nauki Polskiej” T. 2: 1954 s. 445.

[42] Rkps Bibl. Czartoryskich 5459. Korespondencja Lhuiliera z Czartoryskimi.

z teorii równań, teorii szeregów, ułamków ciągłych, trygonometrii i geometrii analitycznej" [43].

Dzieło składa się z dwóch tomów. Tom pierwszy ma dwie części: pierwsza *O funkcjach i zrównaniach algebraicznych* obejmuje cztery rozdziały, druga *Natura i własności funkcji przestępnych* zawarta jest w czterech rozdziałach. Tom drugi *Przystosowanie rachunku algebraicznego do linij krzywych* obejmuje sześć rozdziałów. W rozdziale zatytułowanym *Przejście algebry do geometrii* stwierdza autor, że własności utworów geometrycznych można wyrazić przez równania i że „chcąc ułatwić niezmiernie zawaloną drogę dociekań w głębszej geometrii i uczynić sobie najwyższe prawdy dostępniejszymi, trzeba było ... natrafić na szczęśliwą zręczność stosowania rachunku do figur. Tę przysługę winniśmy nieśmiertelnej przenikliwości Descartesa, która stała się zarazem źródłem rozległej sławy dla samego wynalazcy i najszczęśliwszych dociekań dla jego następców" [44].

Rozwijając szczegółowo stwierdzenie, że własności utworów geometrycznych można wyrazić przez równania, omawia Śniadecki ogólne własności linii krzywych i ich podział, po czym przechodzi do przecięć stożkowych, podając kolejno równanie elipsy, paraboli, hiperboli. Z uwagami nad własnościami asymptot hiperboli łączy rozważania odnoszące się do teorii granic i jej stosowania do własności krzywych. Obszernie również jest omówione zagadnienie przecięć linii krzywych liniami prostymi lub innymi krzywymi. Podane są też równania brył obrotowych powstałych z obrotu krzywych drugiego stopnia. Ostatni rozdział poświęcony jest omówieniu własności krzywych przestępnych.

Książka Śniadeckiego nie spotkała się z takim uznaniem, na jakie zasługiwała, mimo że niewątpliwie znana była ówczesnym wykładowcom matematyki, m.in. A. Wyrwiczowi, profesorowi Uniwersytetu Wileńskiego, o czym wspomina S. Dickstein: „Miałem w ręku egzemplarz tej książki, będący niegdyś własnością profesora Uniwersytetu Wileńskiego Antoniego Wyrwicza, z licznymi notatkami na marginesie [45]. W ciągu 40 lat sprzedano jej 1400 egzemplarzy. O dalszych losach książki dowiadujemy się z korespondencji Śniadeckiego z F. Szopowiczem, profesorem Uniwersytetu Krakowskiego [46].

W XIX w. zaczęto szerzej zajmować się matematycznymi osiągnięciami Kartezjusza, a podłoża tych wzmożonych zainteresowań można się dopatrywać w związku kartezjanizmu z pozytywizmem, stanowiącym na naszym gruncie po latach sześćdziesiątych tego stulecia dominujący pogląd na świat. Te dwa kierunki myśli filozoficznej wiązała wspólna im dążność mechanistycznego tłumaczenia zjawisk przyrody, jako też kult dla matematyki. Tworząca się wówczas gałąź wiedzy, mianowicie historia różnych dziedzin nauki, stworzyła możliwości krytycznego badania osiągnięć Descartesa w naukach ścisłych. W związku z tym pojawiły się publikacje z zakresu geometrii analitycznej, przy czym część ich o treści ściśle naukowej obejmuje zagadnienia z tej dziedziny na szerszym tle

---

[43] S. Dickstein, E. Wawrykiewicz: *Bibliografia matematyki polskiej XIX stulecia.* Kraków 1894 s. 20.

[44] J. Śniadecki: *Rachunku algebraicznego teorya...* T. 2. Kraków 1783 s. 2.

[45] S. Dickstein: *Jan Śniadecki jako krzewiciel nauk matematycznych w Polsce.* „Wiadomości Matematyczne" T. 19: 1931.

[46] M. Straszewski: *Jan Śniadecki i jego stanowisko w dziejach oświaty i filozofii w Polsce.* Kraków 1875. W *Dodatkach* korespondencja Śniadeckiego z F. Szopowiczem.

w powiązaniu z innymi dziełami matematyki, co podkreśla doniosłość odkrycia Descartesa; inne mają charakter podręcznikowy, wiążący się z postulatem nauczania geometrii analitycznej w ówczesnych szkołach.

Na Uniwersytecie Wileńskim w zakres wykładów geometrii wchodziła od 1816 r. i geometria analityczna. Objaśniał ją najpierw Tomasz Życki według książki Śniadeckiego, potem Antoni Wyrwicz według podręcznika Biota. Po nim objął wykłady Michał Pełka-Poliński, prowadząc je aż do 1830 r., czyli do zamknięcia Uniwersytetu. W związku z tymi wykładami pojawił się opracowany przez Wyrwicza *Podręcznik geometrii analitycznej z zastosowaniem do linij krzywych i powierzchni drugiego porządku* (Wilno 1819, II wyd. tamże 1825). Jest to tłumaczenie VI wyd. wymienionego wyżej *Essay de géométrie analytique* Biota (1802). Z przedmowy tłumacza dowiadujemy się, że istniało wcześniejsze tłumaczenie z wyd. III, dokonane przez Zachariasza Niemczewskiego, ale nie zostało ogłoszone drukiem i nie zachowało się. Celem podręcznika jest — pisze Wyrwicz — „ułatwienie słuchaczom tej prawie nowej jeszcze wówczas nauki". O Descartesie jest tylko wzmianka. Obszernie uzasadnia tłumacz, dlaczego terminologię Śniadeckiego uważa za najlepszą. Tę terminologię konsekwentnie stosował Wyrwicz w później wydanych podręcznikach *Początki geometrii analitycznej dla szkół gimnazjalnych na kl. II i III* (Wilno 1825—1826, II wyd. 1828—1829). Z podanej tu treści widać, że materiał nauczania był obszerny. Po szczegółowym omówieniu zasad geometrii analitycznej wyprowadzone są wzory określające położenie punktu i prostej na płaszczyźnie i w przestrzeni. W klasie III omawiano przekształcanie układu osi i współrzędne biegunowe, a następnie równania koła, elipsy, paraboli i hiperboli w układzie kartezjańskim i biegunowym. Jako przykłady wprowadzonego tu słownictwa cytujemy: „zrównania" (równanie), „odcinek" — *abscisse* (odcięta), „przystaw" — ordonée (rzędna), „oś odcinków" — *l'axe des abscisses* (oś x), „oś przystaw" — *l'axe des ordonnés* (oś y), *Wx* „współuszykowane" — *coordonnés* (współrzędne). Terminy francuskie wzięte są z książki Biota.

Na Uniwersytecie Warszawskim program ułożony przez Antoniego Dąbrowskiego w 1817 r. wprowadzał wykłady geometrii analitycznej objaśnianej przez autora programu wedle podręczników Biota, Legandre'a, Lacroix. Po śmierci Dąbrowskiego (1826) katedrę objął Kajetan Garbiński i prowadził wykłady do zamknięcia Uniwersytetu. Wykłady tego przedmiotu wznowione w Szkole Głównej Warszawskiej prowadził Władysław Zajączkowski.

W 1822 r. wydano w Warszawie *Geometryję analityczną linij i powierzchni drugiego rzędu* Adriana Krzyżanowskiego. W Przedmowie podany jest dość obszerny rys historyczny rozwoju geometrii od starożytności do powstania geometrii analitycznej. Podkreślona jest zasługa Descartesa, dzięki któremu — zdaniem Krzyżanowskiego — z równań ogólnych drugiego, trzeciego i czwartego stopnia z dwiema wielkościami zmiennymi można wyprowadzić linie krzywe; wśród nich za najważniejsze uważa linie wyrażone równaniami drugiego stopnia. Treści *Géométrie* nie omawia autor dokładnie, nadmienia tylko, że jej układ był trudny, a zrozumienie odkrycia Kartezjusza ułatwiły komentarze uczniów Descartesa i prace późniejszych uczonych. Krzyżanowski zestawia starsze i ówczesne publikacje o pokrewnej treści i omawia je krytycznie. Na pierwszym miejscu wymienia książkę Śniadeckiego twierdząc, że nie tylko jest lepszą od innych publikacyj, ale „wyższą nad stan ówczesny nauk matematycznych"[47]. Trafnie ocenia Krzyżanowski m.in. zasługi Joachima Liveta, pierwszego wykładowcy geometrii wykreślnej w Polsce w Szkole Artylerii i Inżynierii w Warszawie, który odkrył ważne właściwości powierzchni drugiego rzędu i objaśniał formuły odnoszące się do układu współrzędnych trzech wymiarów (w „Correspondance de l'Ecole Polytechnique" T. 2: 1804 s. 120 oraz „Journal de l'Ecole Polytechnique" 13: 1805 s. 270). Zestawiając osiągnięcia tego uczonego, tak ściśle związanego z nauką polską, Krzyżanowski wymienia najważniejsze twierdzenia Liveta. Livet pierwszy dowiódł, że suma kwadratów średnic sprzężonych powierzchni stopnia drugiego jest stała i że objętość równoległościanu zbudowanego na średnicach sprzężonych jest stała. Słownictwo Krzyżanowskiego zbliżone jest do dziesiejszego; użył terminu „układ spółrzędnych", nazw: „odcięta", „rzędna", „asymptoty", „powierzchnie wichrowate" (tu powołuje się na określenie podane przez Sapalskiego).

Podręcznik Krzyżanowskiego uwzględnia podstawowe wiadomości o linii prostej, krzywych drugiego stopnia, czyli krzywych stożkowych oraz powierzchni stopnia drugiego z uwzględnieniem ich własności i podaniem ich równań algebraicznych. Wartość podręcznika podnoszą piękne i precyzyjne rysunki omawianych tworów geometrycznych.

Na Uniwersytecie Jagiellońskim wykłady geometrii analitycznej włączone były w program od 1817 r. Prowadził je najpierw Karol Hube, następnie Jan Steczkowski, z kolei Franciszek Mertens i Stanisław Kępiński. W 1859 r. wyszła drukiem w Krakowie *Geometria analityczna wraz z powierzchniami i liniami drugiego rządu* Jana Steczkowskiego jako trzecia część jego podręcznika *Elementarny wykład matematyki*. We *Wstępie* autor objaśnia jak starożytni Grecy stosowali rachunek do rozwiązywania zadań geometrycznych i jak na drodze geometrycznej rozwiązywali zadania algebraiczne. Następnie omawia znaczenie odkrycia Descartesa, ujmując je w słowa: „Pierwszy Descartes śmiało wyrzekł, że każdego algebraicznego równania jakiegokolwiek stopnia otrzymać można zmysłowy geometryczny obraz w pewnej krzywej dokładny związek dwóch nieznanych, a od siebie zależących ilości przedstawiający. Stąd wynika następujące określenie geometrii analitycznej: ma ona wskazać dokładnie kształt każdej w algebraiczne zrównanie mogącej być ujętej ilości geometrycznej, czyli ciągłej, zbadać wszystkie jej własności tak w samej sobie, jako też i w związku z innymi uważanej, nauczyć, jak za pomocą wykreślenia przedstawić można wszystko, co algebraiczne zrównanie zamyka i tym sposobem wszystkie wykreślenia figur geometrycznych sprowadzić do działań algebraicznych, a na odwrót z tych powrócić do pierwszych".

Podręcznik Steczkowskiego składa się z dwóch części. Pierwsza — *Geometria analityczna w dwóch wymiarach* obejmuje sześć rozdziałów. Każdy z rozdziałów zawiera na końcu *Zagadnienia* jako zastosowanie poznanych w danym rozdziale twierdzeń. Część druga — *Geometria analityczna w przestrzeni, czyli w trzech wymiarach* składa się również z sześciu rozdziałów. Obszerny, dwuczęściowy podręcznik Steczkowskiego, obejmujący tak geometrię płaską, jak i przestrzenną, stanowił znakomitą pomoc w wykładach uniwersyteckich.

Ośrodek naukowy krakowski odegrał w tym wieku ważną rolę,

[47] A. Krzyżanowski: *Geometryja analityczna linij i powierzchni drugiego rzędu.* Warszawa 1822 s. V.

zwłaszcza od chwili powstania w 1873 r. Akademii Umiejętności, która kontynuowała prace Towarzystwa Naukowego Krakowskiego, a o którego owocnej działalności świadczy bogata treść „Roczników”. W dziale matematycznym najcenniejsze rozprawy są pióra Karola Hubego. Z interesującym nas tematem związany jest traktat *O powstaniu geometrii analitycznej* [48] oraz *Dalszy ciąg zadań linni prostej i płaszczyzn tyczący się jako i o tworzeniu się powierzchni krzywych przez linie proste* [49]. Poddaje tu Hube krytycznej analizie tłumaczenie dzieła Biota dokonane — jak wiemy — przez Wyrwicza w 1819 r. Twierdzenie Monge'a odnoszące się do powierzchni drugiego stopnia udowodnił nasz uczony w drodze analitycznej, a mianowicie, że dwie powierzchnie drugiego stopnia przecinają się wzdłuż dwóch krzywych płaskich. Tym dowodem obalił Hube pogląd Monge'a, że twierdzenie to nie da się udowodnić analitycznie [50]. Jak z tego widać Hube samodzielnie ujmował rozważane zagadnienia, a zarazem umiejętnie wykazywał łączność geometrii analitycznej z innymi dziedzinami matematyki. Występuje to zwłaszcza wyraźnie w jego rozprawie *O trygonometrii kulistej rzecz krótka* [51], w której wychodząc z rozważań Delambre'a, Śniadeckiego i Gaussa omawia on analogie Nepera, wykazując w ich układzie związek geometrii analitycznej z trygonometrią. Stwierdza zarazem wyższość metody analitycznej nad syntetycznym dowodzeniem.

Na Uniwersytecie Lwowskim wykłady geometrii analitycznej prowadził od 1818 r. F. Kodesch według własnego podręcznika *Elementa Mathesis purae,* następnie objął je Władysław Zajączkowski, który wykładał ten przemiot początkowo w Szkole Głównej Warszawskiej, od 1872 r. zaś na Politechnice i na Uniwersytecie Lwowskim. Z tym też ośrodkiem naukowym związana jest dalsza jego działalność. Jego podręcznik *Geometria analityczna* wyszedł w 1884 r. Autor zaznacza we wstępie, że treść książki oparta jest na jego wykładach; by zaś przedstawić możliwie dokładnie stan ówczesnych badań, oparł się na najnowszych publikacjach, z których jako najważniejsze wymienia: O. Hessego *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes* (Leipzig 1861) i G. Salmona *A Treatise on Conis Sections* (London 1879). Nie mamy tu jednak naśladownictwa cytowanych źródeł, lecz umiejętne wyzyskanie szczegółów, które — jak autor zaznacza — „na swój sposób przerobił, aby swojej pracy zapewnić jak największą użyteczność”. Wykład poprzedzony jest historycznym rysem rozwoju geometrii analitycznej, opartym na dziele M. Chaslesa [52].

Podręcznik Zajączkowskiego — jeden z najlepszych w XIX w. i na początku XX w. — składa się z dwóch części: *Geometria analityczna płaska* i *Geometria analityczna w przestrzeni.* Układ treści podręcznika jak i forma podanych w nim twierdzeń i zagadnień odbiegają od poprzednich i są dojrzalsze. Opracował w nim Zajączkowski takie zagadnienia, jak: zarys teorii linii krzywych algebraicznych rządu *n-tego*, zarys teorii powierzchni algebraicznych rzędu n-tego, przeprowadził m.in. klasyfikację powierzchni stopnia drugiego.

W związku z działalnością profesorów uczelni lwowskich należy

[48] „Rocznik Towarzystwa Naukowego Krakowskiego” T. 9: 1824 s. 76—130.
[49] Tamże, t. 11: 1826 s. 25—89.
[50] Tamże, t. 14: 1831 s. 189—192.
[51] Tamże, t. 5: 1820 s. 290—331.
[52] M. Chasles: *Apercu historique,* jw. s. X—XVIII.

omówić jeszcze podręcznik Wawrzyńca Żmurki *Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach*, wydany w dwu tomach we Lwowie w 1864 r. Tom drugi zawiera geometrię analityczną na płaszczyźnie i w trzech wymiarach. Autor opiera swe wywody na zasadzie „uczenia matematyki przez zobrazowanie ilości w przestrzeni, co znane już było w odległej starożytności". Zgodnie z tą zasadą stwierdza; „Utwory przestrzenne rozważam w geometrii analitycznej odnoszone do układów osi pod dowolnym kątem do siebie nachylonych ... przez co uzyskałem cechy analityczne dla szczególnych przypadków, do których li tylko na podstawie układu prostokątnego dojść niepodobna".

Uzupełnieniem podręcznika Żmurki jest streszczenie jego wykładów wydane litograficznie we Lwowie w 1875 r. przez Augusta Witkowskiego pt. *Zasady geometrii analitycznej w przestrzeni.* Są w nim krótko omówione podstawy geometrii analitycznej.

Z końcem XIX w. pojawił się jeszcze jeden podręcznik, mianowicie *Zasady geometrii analitycznej*, wydany we Lwowie w latach 1897—1898 przez Placyda Dziwińskiego w ramach jego *Ogólnego wykładu matematyki.*

Działalność Towarzystwa Nauk Ścisłych, założonego w Paryżu w 1870 r. z inicjatywy Jana hr Działyńskiego, zaznaczyła się szeregiem cennych publikacji, napisanych przez polskich uczonych przebywających na emigracji. Wśród prac matematycznych (tych było najwięcej) wydawanych nakładem Biblioteki Kórnickiej, a więc kosztem Działyńskiego, znajduje się wartościowa pozycja *Zasady geometrii analitycznej*, której autorem był jeden z najczynniejszych członków wymienionego Towarzystwa, Adolf Sągajło. Tom pierwszy wyszedł w Paryżu w 1877 r. Całość jest ułożona podług dzieła L. Painvine[53]; miała obejmować trzy tomy, zawierające w tomie I geometrię analityczną płaską, oraz w następnych badania krzywych drugiego rzędu i geometrię trójwymiarową. Drukiem wyszedł tylko tom pierwszy, następne nie ukazały się z powodu śmierci autora.

Jak widać z treści tomu pierwszego, materiał wykładu miał być obszernie ujęty. Podane na początku zestawienie literatury pomocniczej świadczy o dobrej znajomości ówczesnych publikacji i o sumiennym opracowaniu tematu. Rozdział noszący tytuł *Rys historyczny początku i rozwoju geometrii analitycznej* jest pierwszym w naszej historii nauki tak obszernym przedstawieniem rozwoju tej dyscypliny. To, że autor nie wspomina o geometrii analitycznej w Polsce, jest zrozumiałe. Sprawą tą nie zajmowano się bliżej w publikacjach polskich XIX w., ale i nie wszystkie były dostępne naszym matematykom przebywającym w obcym środowisku, jak np. *Geometria analityczna* Krzyżanowskiego. Rys historyczny o geometrii analitycznej w Polsce podał — jak wiemy — dopiero Zajączkowski w swym podręczniku (1884 r.).

W zestawieniu publikacji poświęconych geometrii analitycznej wspomnimy jeszcze o artykułach w *Encyklopedii Orgelbranda* oraz w *Wielkiej encyklopedii powszechnej ilustrowanej*[54]. Znajdujący się w tej ostatniej artykuł S. Dicksteina jest dość obszernym omówieniem treści *Géométrie* i jej znaczenia w dziejach matematyki. W osobnym artykule objaśnione jest „twierdzenie Descartesa" *(folium Cartesii).*

---

[53] L. Painvin: *Principes de Géométrie analytique.* T. 1—2. Paris 1866, 1871.

[54] *Encyklopedia powszechna* Orgelbranda. Warszawa 1899 t. 4 s. 321—322; *Wielka encyklopedia powszechna ilustrowana.* Warszawa 1895 t. 2 s. 415—520.

Wiek XIX przyniósł jeszcze jedno osiągnięcie warte odnotowania: W 1878 r. wyszła drukiem publikacja *Renata Kartezjusza Rozprawa o metodzie, jak dobrze kierować swym rozumem i szukać prawdy w naukach, przy tym list do księdza Picola oraz Reguły kierowania umysłem* [55]. Jest to pierwsze polskie tłumaczenie rozprawy Kartezjusza, dokonane przez Wojciecha Dobrzyckiego. Autor streścił zwięźle bez komentarza pisma przyrodnicze i matematyczne Descartesa.

Jak widzimy z podanego przeglądu zajmowano się żywo geometrią analityczną, podkreślając znaczenie *Géométrie* Descartesa. Ale i w tym wieku żaden historyk nauki nie poświęcił temu dziełu specjalnej uwagi.

Omówienie kartezjanizmu w XX w. nie wchodzi w ramy niniejszej rozprawy. Nadmienimy tylko krótko, że dominujący w tym okresie kartezjanizm krytyczny, idący w kierunku dogłębnego ujmowania problematyki wielkiego filozofa, przyniósł wiele cennych publikacji, zwłaszcza w trzechsetną rocznicę ukazania się *Discours* [56]. Projektowane w związku z tym dokonanie przekładu *Géométrie* na język polski, nad którym rozpoczął pracę Zygmunt Kobierzyński, nie doszło do skutku i tłumaczenie to — o ile nam wiadomo — nie ukazało się. A więc luka w całokształcie badań kartezjańskich w Polsce w odniesieniu do *Géométrie* jest do dziś nie zapełniona. To wiekopomne dzieło nie tylko nie zostało przełożone na język polski, ale nie ma dotychczas w naszej literaturze matematycznej szczegółowego opracowania wraz z niezbędnym dla zrozumienia treści komentarzem. Nie wypełni tego braku oczywiście i niniejsza rozprawa, której — jak wskazuje tytuł — cel i założenia były inne. Może jednak zwrócić ona uwagę naszych historyków nauki na ten tak ważny i godny opracowania temat [57].

Я. Дианни

ВОСПРИЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПОЛЬШЕ (XVII—XIX ВВ)

Тема настоящей работы — достижения Декарта в области математики, а в основном в аналитической геометрии, а также влияние его теории на развитие аналитической геометрии в Польше.

Первые исследования Декарта в математике и их результаты были инспирированы греческой математикой, чему автор уделяет много внимания во вступлении. Здесь также сделан набросок истории некоторых элементов аналитической геометрии с древнейших времен до XVII в. (например, системы координат). В работе учтены труды Ферма, причем подчеркнут факт, что он был предтечей в некоторых исследованиях аналитического представления геометрических точек на плоскости и в трехразмерном пространстве, а также исследований, касающихся конических сечений.

Далее автор раскрывает содержание *Геометрии* Декарта, а также упоминает о многочисленных комментариях, дополняющих текст труда Декарта. Вторая половина XVIII века принесла издание учебников по аналитической геометрии, главным образом французских

[55] „Biblioteka Filozoficzna" T. 1: Lwów 1878.

[56] M.in. opracowanie matematyki Descartesa przez S. Kwietniewskiego w t. 14 *Poradnika dla samouków*. Warszawa 1911 s. 221, 230—234.

[57] Przekładu fragmentu *Geometrii* Descartesa na język polski (księgi I—III) dokonała Autorka niniejszej pracy. Znajduje się on jako nieopublikowany aneks do niniejszego artykułu w archiwum Zakładu Historii Nauki i Techniki PAN (przypis redakcji).

математиков. Эти издания сыграли большую роль в распространении аналитической геометрии в Польше. Описывая развитие аналитической геометрии в Польше автор отвечает на два вопроса: 1) была ли известна *Геометрия* Декарта в Польше и была ли она оценена надлежащим образом, 2) когда появилась аналитическая геометрия в Польше в том виде, какой придали ей французские математики? В основном учтены здесь издания учебников польских авторов — Яна Сьнядецкого, Адриана Кржижановского, Яна Стечковского, Владислава Заенчковского, Вавжиньца Жмурки, Адольфа Сонгайлы, а также переводов лучших учебников на иностранных языках.

J. Dianni

LA RÉCEPTION DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE EN POLOGNE (LES XVII^{e}—XIX^{e} SIÈCLES)

Le sujet du présent ouvrage sont les réalisations de Descartes dans le domaine des mathématiques et surtout dans la géométrie analytique, ainsi que l'influence de sa théorie sur le développement de la géométrie analytique en Pologne.

Dans ses recherches et résultats primaires en mathématiques, Descartes s'est inspiré de la mathématique grecque à laquelle l'auteur du présent ouvrage consacre beaucoup d'attention dans „L'introduction", en présentant en même temps l'histoire de certains éléments de la géométrie analytique depuis l'Antiquité jusqu'au XVII^{e} siècle (p.ex. système de coordonnées).

Dans l'étude, on a pris en considération les réalisations de Fermat, en soulignant le fait qu'il a été précurseur dans certaines recherches concernant la présentation analytique des lieux géométriques des points sur le plan et dans l'espace à trois dimensions et aussi concernant les coupures de cône.

Ensuite, l'auteur présente le contenu de la *Géométrie* de Descartes, ainsi que la note sur de nombreux commentaires qui complètent le texte de l'oeuvre de Descartes.

Pendant la seconde moitié du XVIII^{e} siècle ont paru les manuels de géométrie analytique, écrits spécialement par les mathématiciens français. Ces publications ont joué le rôle important dans la propagation de la géométrie analytique, aussi en Pologne. En présentant le développement de la géométrie analytique en Pologne, l'auteur répond à deux questions: 1° la *Géométrie* de Descartes, était-elle connue et appréciée en Pologne? 2° quand la géométrie analytique — dans le sens que les mathématiciens français lui ont donné — a-t-elle pénétré la Pologne. Ici, on a surtout pris en considération les publications de caractère manuel des auteurs polonais comme: Jan Śniadecki, Adrian Krzyżanowski, Jan Steczkowski, Władysław Zajączkowski, Wawrzyniec Żmurko, Adolf Sągajło ainsi que les traductions des meilleurs manuels étrangers.