Dobrzycki, Stanisław

# O interpretacji geometrycznej logarytmów liczb zespolonych w rozprawie Karstena z roku 1768

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 22/3, 529-534

1977

*Stanisław Dobrzycki*
(Lublin)

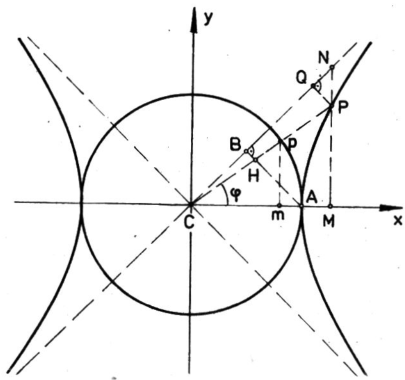
# O INTERPRETACJI GEOMETRYCZNEJ LOGARYTMÓW LICZB ZESPOLONYCH W ROZPRAWIE KARSTENA z 1768 r.

Pierwszym matematykiem, który operował funkcjami zmiennej zespolonej, był Jan Bernoulli, nauczyciel Eulera. W rozprawie o całkowaniu ułamków wymiernych, ogłoszonej w *Pamiętnikach* Akademii Paryskiej w 1702 r. (druk. 1704), a streszczonej w czasopiśmie „Acta Eruditorum" (1703), podał on zależność różniczkową, którą po scałkowaniu piszemy dziś w postaci $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2i} \log \frac{1+xi}{1-xi}$. W ten sposób do analizy weszły logarytmy liczb zespolonych. Praca Leibniza, ogłoszona w r. 1712 w „Acta Eruditorum", dała początek dyskusji, która toczyła się w latach 1712—1713 między Leibnizem a Bernoullim na temat logarytmów liczb ujemnych. Leibniz uważał, że są one „nieprawdziwe" (urojone), natomiast Bernoulli upierał się przy tym, że $\log(-x) = \log x$, wysuwając m.in. argument, że ponieważ $1:(-1) = (-1):1$, musi być $\log 1 - \log(-1) = \log(-1) - \log 1$, a zatem $\log(-1) = \log 1$. Spór, który nie doprowadził do żadnego rezultatu (Leibniz zmarł w 1716 r.), odżył znów w latach 1728—1729 [1]. Przeciwnikami byli Jan Bernoulli i Leonard Euler. Bernoulli nie zmienił swego stanowiska, Euler zaś wykazał w 1728 r., że równość $\log(-1) = \log 1 = 0$ prowadzi do sprzeczności i otrzymał, posługując się metodą samego Bernoulliego, wzór $\log(-1) = \pi\sqrt{-1}$. Po raz trzeci spór o logarytmy liczb ujemnych potoczył się, kiedy Cramer opublikował w 1745 r. korespondencję Leibniza z Janem Bernoullim. W latach 1747—1748 spierali się w tej kwestii Euler i d'Alembert. Ten ostatni przychylał się do poglądu Bernoulliego; Euler zaś w 1747 r. przedstawił Akademii Berlińskiej rozprawę pt. *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* (O logarytmach liczb ujemnych o urojonych), w której wykazał m.in., że $\log(-1) = (2\lambda+1)\pi i$, $\log(a+bi) = \log\sqrt{a^2+b^2} + (\varphi + 2\pi)i$, przy czym $\varphi = \operatorname{arc\,tg} b/a$, $\lambda = 0, +1, +2, \ldots$ Rozprawa ta ukazała się w druku dopiero w 1862 r. W rozprawach Akademii Berlińskiej ukazała się zmieniona jej wersja pt. *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* (*O sporze między panami Leibnizem i Bernoullim o logarytmy liczb ujemnych i urojonych*; „Mém. Ac. Sc. Berl." T. 5:1749, druk. 1751). Idea dowodu Eulera polegała na wyznaczeniu wartości $y = \log x$ z równości $y = n(x^{1/n} - 1)$ dla $n = \infty$, co odpowiada naszemu wzorowi $\log x = \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1)$. W rozprawie pt. *Réflexions sur les quantités imaginaires* (Rozważania o wielkościach urojonych), ogłoszonej w t. I „Miscellanea Taurinensia" (Turyn 1759), Daviet de Foncenex (1734—1799) podał inny dowód, którego

[1] Szczegółowe omówienie sytuacji w matematyce tego okresu patrz *Historia matematyki w trzech tomach* (pod red. A. P. J u s z k i e w i c z a). *Tom 3. Matematyka XVIII stulecia* (przekład z rosyjskiego). Warszawa 1977 (rozdział o sporze w sprawie logarytmów).

pomysł, jak sam powiada, pochodził od Lagrange'a [2]. Dowód ten przytoczę tu z nieznacznymi zmianami (m.in. pisząc i zamiast $\sqrt{-1}$, log zamiast l itd.).

Z równań okręgu $x^2+y^2=r^2$ i hiperboli $x^2-y^2=r^2$ dla danej wartości x otrzymujemy: dla okręgu $y=\sqrt{r^2-x^2}$, dla hiperboli $Y=\sqrt{x^2-r^2}$, zatem $Y=yi$. Niech w kole (rys. 1) $Cm=x=r\cos\varphi$, $mp=y=r\sin\varphi$. Wycinek kołowy CAp, odpowiadający odciętej x ma pole równe $\frac{1}{2}r^2\varphi$. Ponieważ rzędne okręgu i hiperboli, odpowiadające tej odciętej x, są do siebie w stosunku 1:i, pola wycinków, kołowego i hiperbolicznego, odpowiadających temu x, są do siebie w tym samym stosunku; pole wycinka CAp, jako wycinka **hiperbolicznego**, odpowiadającego odciętej $r\cos\varphi$ i rzędnej $ir\sin\varphi$ wynosi więc $\frac{1}{2}r^2\varphi i$.




Biorąc następnie pod uwagę na hiperboli punkt P o odciętej $x>r$, sprawdzamy łatwo, że pole trapezu krzywoliniowego ABQP jest równe polu wycinka hiperbolicznego CAP. Na podstawie własności hiperboli mamy bowiem $CB.AB=CQ.PQ$, zatem $\triangle CAB=\triangle CPQ$, odejmując od obu stron pole $\triangle CHB$ otrzymujemy $\triangle CAH$ $=$czworokąt BHPQ, a dodając z kolei pole AHP mamy wreszcie: wycinek hiperboliczny CAP=pole ABQP. Z drugiej strony pole $ABQP=\frac{1}{2}r^2\log\frac{CQ}{CB}$, zatem wycinek $CAP=\frac{1}{2}r^2\varphi i=\frac{1}{2}r^2\log\frac{CQ}{CB}$, czyli $\log\frac{CQ}{CB}=\varphi i$ (rezultat poprzedni, otrzymany przy założeniu, że $x<r$, autor przenosi tu milcząco na przypadek $x>r$).

Z podobieństwa trójkątów CAB i PQN otrzymujemy dalej, wobec równości $CQ.PQ=CB.AB$,

$$\frac{CQ}{CB}=\frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PN}=\frac{r}{x-y}$$

[2] W rozprawie tej Foncenex przedstawił próbę dowodu twierdzenia zasadniczego algebry. Próbę tę poddał krytyce Gauss w swej pracy doktorskiej z 1799 r. — Przy tej sposobności warto może przypomnieć, że to również Lagrange podsunął Ruffiniemu pomysł dowodu twierdzenia o nierozwiązalności równań stopnia powyżej czwartego. Pisze o tym sam Ruffini we wstępie do swego dzieła, wydanego w tymże roku. Zob. L. Nový: *Origins of modern algebra*. Praha 1973 s. 52.

tj.

$$\log\frac{r}{x-y}=\log\frac{r}{r\cos\varphi-ir\sin\varphi}=\varphi i,$$

skąd wynika znany wzór Cotes'a-Eulera

$$\log(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\varphi i.$$

Podstawiając w nim $\varphi=2\lambda\pi$ wzgl. $\varphi=(2\lambda+1)\pi$ ($\lambda$ całkowite) otrzymuje się stąd $\log(+1)=2\lambda\pi i$, $\log(-1)=(2\lambda+1)\pi i$. Wreszcie, aby znaleźć logarytm liczby zespolonej $a+bi$, Foncenex bierze pod uwagę okrąg o promieniu równym $\sqrt{a^2+b^2}$ (tj. modułowi tej liczby), wyznacza kąt $\varphi$ taki, że $\cos\varphi=a$, $\sin\varphi=b$ (i tu zapomina o module!) i, stwierdzając, że $a+bi$ nie zmieni się, gdy $\varphi$ powiększymy o $2\lambda\pi$ ($\lambda$ całkowite), otrzymuje ostatecznie wzór $\log(a+bi)=(\varphi+2\pi\lambda)$ i (w którym brak jest logarytmu modulu).

Logarytmom liczb ujemnych i zespolonych obszerną pracę poświęcił w 1768 r. W. J. G. Karsten [3]. O pracy tej, noszącej tytuł *Abhandlung von den Logarithmen verneinter Grössen* (Rozprawa o logarytmach wielkości ujemnych; „Abh. Münch. Akad." T. 5: 1768 s. 1—108), znajdujemy krótkie wzmianki w literaturze historyczno-matematycznej. Już Montucla [4] pisał, że jej nie zna, ale wie, że w sporze o logarytmy jej autor stoi po stronie Eulera. W tomie IV Cantora [5] czytamy, że praca Karstena daje dobry obraz historyczny zagadnienia logarytmów liczb ujemnych, a zarazem obszerną krytykę wywodów d'Alemberta, a w sprawie logarytmów autor jej stoi całkowicie po stronie Eulera. Jednak dopiero w 1912 r. F. Cajori [6] zwrócił uwagę na to, że Karsten podał w niej po raz pierwszy prostą interpretację geometryczną logarytmów liczb zespolonych.

W tym celu Karsten wykorzystuje znany już w XVII w. związek między równaniami okręgu i hiperboli równoosiowej $x^2+y^2=1$ i $x^2-y^2=1$ oraz znany fakt, że kwadratura hiperboli prowadzi do logarytmów. Podobnie jak Foncenex, którego zresztą cytuje, traktuje rzędne rzeczywiste okręgu jako rzędne urojone hiperboli, a więc także wycinki rzeczywiste koła jako wycinki urojone hiperboli.

Jeśli M jest punktem hiperboli o odciętej $x>1$ (rys. 2), to łuk złożony z łuku hiperboli MA i z łuku okręgu AG Karsten uważa za jeden łuk MAG, ponieważ mają wspólne równanie i wspólną styczną w punkcie A. Część łuku MA jest przytem rzeczywista, część AG jako łuk hiperboli, jest urojona. Idąc dalej, powiada, że za łuk łączący punkty M i G uważać można każdy z łuków MAG, MAGEBFHAG, ... ogólnie MAG+$\lambda$. GEBFAG ($\lambda=0, \pm1, \pm2, \ldots$). Jeśli przytem M leży na okręgu, to łuk MA+$\lambda$ MEBFAM jest urojony.

Wracając do punktu M na hiperboli, stwierdzamy, że łuk MA wraz z promieniami wodzącymi CA i CM ogranicza wycinek hiperboliczny, którego pole jest, jak wiadomo, równe połowie logarytmu naturalnego liczby $x+y=x+\sqrt{x^2-1}$. Jako łuk hiperboli MA rozumieć należy, jak widzieliśmy, każdy z nieskończenie

[3] Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732—1787), profesor uniwersytetów w Rostocku (Bützow) i w Halle. Jego wielotomowe podręczniki: *Lehrbegriff der gesamten Mathematik* (Gryfia 1767—1777) i *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften* (Rostock 1780) cieszyły się wielkim powodzeniem.

[4] J. Montucla: *Histoire des mathématiques*. T. 3. Paris 1802. Nouveau tirage. Paris 1960 s. 379—380.

[5] M. Cantor: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*. Bd. 4. Leipzig 1908 (autor rozdziału: A. von Braunmühl).

[6] F. Cajori: *Historical note on the graphic representation of imaginaries before the time of Wessel*. „The Amer. Mathem. Monthly" V. 19 Nos 10—11 1912 s. 167—171.

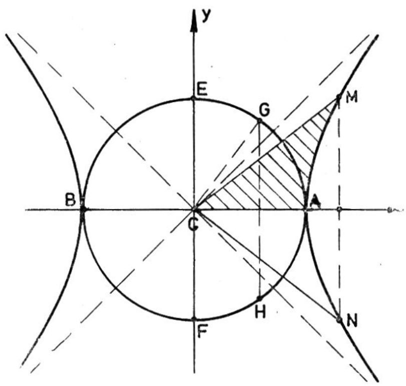
wielu łuków $MA+\lambda$ AEBFA; każdemu z nich odpowiada wycinek, zawarty między promieniami wodzącymi, początkowym CA i końcowym CM. Oznaczając pole tego wycinka przez $S(x)$ mamy więc

$$S(x)=CAM+\lambda AEBFA.i \quad (\lambda=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

gdyż wycinki rzeczywiste koła są wycinkami urojonymi hiperboli. Ponieważ $\log(x+y) = 2S(x)$, mamy ostatecznie dla liczby $A=x+\sqrt{x^2-1}$

$$\log A=\log(x+\sqrt{x^2-1})=2CAM+2\lambda\pi i, \quad (\lambda=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Logarytm liczby dodatniej $A=x+\sqrt{x^2-1}$ ma więc nieskończenie wiele wartości zespolonych: jego część rzeczywista przedstawia podwojony wycinek hiperboliczny CAM, dla którego punkt M ma współrzędne $(x, \sqrt{x^2-1})$, a część urojona jest równa dowolnej parzystej wielokrotności pola koła AEBFA (równego $\pi$). Jeśli przy tym $x \geqslant 1$, to $A \geqslant 1$. Aby otrzymać logarytm liczby dodatniej $A<1$, należy przyjąć $A=x-\sqrt{x^2-1}$ i zamiast punktu M na hiperboli wziąć punkt $N(x, -\sqrt{x^2-1})$. Część rzeczywista $\log A$ jest wtedy ujemna (pole wycinka hiperbolicznego CAN).




Jeśli $x=1$, punkt M pokrywa się z punktem A, pole wycinka CAM jest równe zeru i mamy $\log 1=2\lambda\pi i$ $(\lambda=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, zgodnie z wynikiem Eulera.

Tak więc np. część rzeczywista $\log 2$ jest równa podwojonemu polu wycinka hiperbolicznego CAM, dla którego M ma współrzędne $(5/4, 3/4)$, a część rzeczywista $\log 1/2$ równa podwojonemu polu wycinka hiperbolicznego CAN, dla którego N ma współrzędne $(5/4, -3/4)$. Przy tym pole CAN$=-$pole CAM, co zresztą wynika natychmiast z równości $\log 1/2=-\log 2$. Część urojona obu logarytmów jest równa dowolnej parzystej wielokrotności pola koła AEBFA.

Jeśli $-1<x<1$, liczba $x\pm\sqrt{x^2-1}=x\pm i\sqrt{1-x^2}$ jest zespolona i punkt $M(x, \pm\sqrt{1-x^2})$ leży na okręgu. Karsten przedstawia ją (nie używając jeszcze symbolu i) w postaci $\cos\rho+i\sin\rho$; $\log(\cos\rho+i\sin\rho)$ jest wtedy równy podwojonemu wycinkowi kołowemu (tj. urojonemu wycinkowi hiperbolicznemu) o kącie środkowym $\rho$, powiększonemu o dowolną parzystą wielokrotność pola koła AEBFA. Wynika to zresztą natychmiast z wzoru Cotes'a-Eulera: $\log(\cos\rho+i\sin\rho)= =(\rho+2\lambda\pi)i$. W szczególności, gdy $x=-1$, punkt M pokrywa się z punktem B, $\rho=\pi$ i mamy

$$\log(-1)=(2\lambda+1)\pi, \quad (\lambda=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

zgodnie z wynikiem Eulera. Urojonym wycinkiem hiperbolicznym CAM jest wtedy półkole AEBCA o polu $\pi/2$.

Jeśli moduł liczby zespolonej $x+\sqrt{x^2-1}$, $-1<x<1$, nie jest równy 1, Karsten pisze ją w postaci

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\rho+i\sin\rho),$$

gdzie $\cos\rho=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\rho=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

i otrzymuje

$$\log(a+bi)=\log\sqrt{a^2+b^2}+\log(\cos\rho+i\sin\rho).$$

Następnie przyjmuje, bez bliższych wyjaśnień: $CAM=\log\sqrt{a^2+b^2}$, innymi słowy obiera na hiperboli punkt M o współrzędnych $\left(\frac{(a^2+b^2)^2+1}{2(a^2+b^2)}, \frac{(a^2+b^2)^2-1}{2(a^2+b^2)}.\right)$ Następnie na okręgu obiera punkt G o współrzędnych $(\cos\rho, \sin\rho)$ i wtedy część rzeczywista $\log(a+bi)$ przedstawia podwojone pole wycinka hiperbolicznego CAM, a część urojona podwojone pole wycinka kołowego o kącie środkowym $\rho$, powiększone o parzystą wielokrotność pola koła AEBFA.

Wreszcie, gdy $x<-1$, liczby $x\pm\sqrt{x^2-1}$ są znów rzeczywiste (ujemne), przy czym $-1<x+\sqrt{x^2-1}<0$, $x-\sqrt{x^2-1}<-1$. Znając $\log(-1)$ sprowadzamy rzecz do przypadku gdy $x>1$. Mamy bowiem, gdy $A=x+\sqrt{x^2-1}$,

$$(x+\sqrt{x^2-1})(-x+\sqrt{x^2-1})=-1,$$

więc

$$\log(x+\sqrt{x^2-1})=\log(-1)-\log(-x+\sqrt{x^2-1})=-2CAM+(2\lambda+1)\pi i.$$

przy czym współrzędne punktu M są $(-x, \sqrt{x^2-1})$. Część rzeczywista jest wtedy ujemna. W drugim przypadku, gdy $A=x-\sqrt{x^2-1}$, $(x-\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})=$ $=-1$, więc

$$\log A=\log(x-\sqrt{x^2-1})=\log(-1)-\log(-x-\sqrt{x^2-1})=-2CAN+(2\lambda+1)\pi i$$

przy czym N ma współrzędne $(-x, -\sqrt{x^2-1})$. Część rzeczywista logarytmu jest dodatnia. W obu przypadkach część rzeczywista przedstawia znów podwojone pole wycinka hiperbolicznego, część urojona jest parzystą wielokrotnością pola koła AEBFA.

* *
*

Na str. 90 swej rozprawy Karsten pisze: „O ile wiadomo, nikt jeszcze nie dowiódł, że konstrukcja geometryczna przedstawia również wszystkie te niezliczone logarytmy jakiejś liczby, a także, że na pytanie: jaki jest logarytm pewnej danej wielkości? geometria daje tyleż odpowiedzi, co analiza". I dalej, na str. 104: „Jest to świetny przykład na to, jak dokładnie rozważania geometryczne są w zgodzie z analizą". Istotnie, w literaturze matematycznej przed 1768 r. nie znajdujemy wzmianek o geometrycznej interpretacji logarytmów liczb zespolonych. Interpretacja taka wynikła, jak widzieliśmy, z rozważania analogii między równanami okręgu i hiperboli równoosiowej. Na analogię tę zwrócili uwagę już w XVII w. G. Saint-Vincent, J. Gregory i I. Newton. Znaleziony w 1702 r. przez Jana Bernoulliego wzór $\operatorname{arc tg} x=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}$

wyrażał już związek między rzeczywistymi wycinkami kołowymi a logarytmami urojonymi. Moivre stwierdził, że jeśli wielkości rzeczywiste zastąpi się urojonymi, zadania o okręgu przejdą w zadania o hiperboli równoosiowej. Spór o logarytmy liczb ujemnych i zespolonych rozstrzygnął definitywnie Euler; rezultaty swe — a wśród nich związek między funkcjami trygonometrycznymi i funkcją wykładniczą, który Lagrange uważał za „jedno z najpiękniejszych odkryć analitycznych w obecnym stuleciu" — znalazł na drodze analitycznej. Zapewne geometryczny sens tych odkryć był mu znany, ale o nim nie pisał. Bliższym interpretacji geometrycznej był Foncenex; można przypuszczać, że właśnie jego rezultaty — oparte zresztą na sugestii Lagrange'a — stały się bezpośrednim źródłem pomysłu Karstena.

*С. Добжицки*

## О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЛОГАРИФМОВ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В НАУЧНОЙ СТАТЬЕ КАРСТЕНА С 1768 Г

Немецкий математик В. Я. Г. Карстен (1732—1787) в 1768 году опубликовал в Рефератах Мюнхенской Академии обширную работу о логарифмах отрицательных и мнимых чисел. Используя аналогию между уравнениями окружности и равноосевой гиперболой, представил простую геометрическую интерпретацию логарифмов комплексных чисел как гиперболические отрезки (действительные или мнимые). В большинстве трудов, посвещённых истории математики, отсутствуют малейшие заметки о такой интерпретации.

*S. Dobrzycki*

## L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES LOGARITHMES DES NOMBRES COMPLEXES DANS UN TRAVAIL DE W. J. G. KARSTEN DE 1768

Le mathématicien allemand W. J. G. Karsten (1732—1787) a publié en **1768**, dans les mémoires de l'Académie de Munich, un ample travail sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires; profitant de l'analogie entre les équations du cercle et de l'hyperbole équilatère, il en a déduit une simple interprétation géométrique des logarithmes des nombres complexes comme secteurs hyperboliques (réels ou imaginaires). Dans la plupart des livres consacrés à l'histoire des mathématiques on ne trouve aucune mention de cette interprétation.