Łakoma, Ewa

O narodzinach pojęcia prawdopodobieństwa

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 34/3, 613-632

1989

Ewa Łakoma
(Warszawa)

O NARODZINACH POJĘCIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA *

1. WSTĘP

W większości opracowań z zakresu historii matematyki (por. [16], [21], [20], [10], [17], [32]) za datę narodzin rachunku prawdopodobieństwa przyjmuje się rok 1654, kiedy to pomiędzy Pascalem i Fermatem zawiązała się korespondencja dotycząca rozwiązań problemów wynikłych w związku z uprawianiem gier hazardowych. Takie stanowisko stwarza wrażenie, że wszelkie wcześniejsze próby zajmowania się problematyką probabilistyczną należałoby uznać za epizodyczne i nie mające istotnego wpływu na utworzenie się tej teorii, która w momencie swego pojawienia się przybrała już od razu stosunkowo zaawansowaną matematycznie formę (por. [21], [16], [22]) i odtąd stale była w centrum zainteresowania matematyków. Istniejące na ten temat hipotezy — próbujące wyjaśnić owo nagłe pojawienie się teorii prawdopodobieństwa (por. [20]) — są mgliste i mało przekonujące (por. [12]). Nie wyjaśnia tego nawet szczególnie sprzyjająca rozwojowi nauki atmosfera, jaka panowała w okresie około r. 1660 w Europie. Były to bowiem lata największych odkryć I. Newtona i niezwykłego rozkwitu szkoły Port Royal z jej słynnym zbiorowym dziełem pt. *Logika* (*Ars Cogitandi*) — niełatwo znaleźć w historii matematyki i w ogóle nauk ścisłych okres równie obfitujący w tyle istotnych przemian.

Tymczasem analizy zachowanych do naszych czasów materiałów źródłowych wskazują, iż problematyka o charakterze probabilistycznym podejmowana była w różnorodnych dziedzinach działalności człowieka już od czasów głębokiej Starożytności (problemy związane z grami hazardowymi, sprawy dotyczące zagadnienia przypadkowości i konieczności występujące w rozważaniach filozoficznych, gromadzenie i opracowywanie informacji o charakterze statystycznym itp.).

* Z powodu trudności technicznych Redakcja KHNiT pozostawia układ przypisów wprowadzony przez Autorkę tekstu.

Sugeruje to, że pojęcie prawdopodobieństwa, określone w sposób matematyczny około r. 1660, nie mogło pojawić się nagle i to od razu w stosunkowo dojrzałej formie, lecz musiało kształtować się stopniowo w ciągu stuleci, począwszy od najwcześniejszych, pochodzących z czasów Starożytności, idei o probabilistycznej naturze. Właśnie owe pra-początki, pre-okoliczności i pre-warunki pojawienia się paskalowskiego pojęcia prawdopodobieństwa określiły naturę tego intelektualnego obiektu, jakim posługujemy się od czasów Pascala do dziś. Co więcej, zarysowały one — oczywiście w sposób pośredni — zakres możliwych teorii prawdopodobieństwa, obejmując m.in. dziedziny tak różnorakie, jak statystyka, teoria wnioskowania, logika indukcyjna czy mechanika kwantowa (por. [12], [6], [13], [22]).

W trakcie prób odtworzenia, w jaki sposób w ciągu wieków kształtowały się probabilistyczne obiekty myślowe, bardzo pomocne okazuje się zwrócenie uwagi na specyficzną właściwość, charakteryzującą pojęcie prawdopodobieństwa, z którym mamy do czynienia począwszy od czasów Pascala. Ma ono dwa zasadnicze aspekty (por. [12], [28], [27]). Jeden — epistemologiczny — odnoszący się do stanu naszej wiedzy o rozpatrywanym zjawisku, związany jest ze stopniem wiary, czy zaufania, które powstają w związku z argumentacją odnośnie do tego zjawiska i są przez tę argumentację wzmacniane. Drugi — nazywany aleatorycznym (termin ten wprowadzamy za Hackingiem [12] i Shaferem [28], [27]; por. łac. aleatorius — odnoszący się do gry w kości ([31]), ang. aleatory, franc. aleatoire — dla wyrażenia losowości) — związany jest z fizyczną strukturą rozpatrywanych mechanizmów losowych oraz z ich tendencją do produkowania stabilnych częstości względnych zdarzeń (por. [23]).

Zdaniem Hackinga [12], do czasów Pascala żaden z nich nie docierał dostatecznie do świadomości ludzi zajmujących się zagadnieniami natury losowej. W rozważaniach probabilistycznych pojawiały się one całkiem niezależnie od siebie. Świadome połączenie tych dwóch aspektów i zwerbalizowanie tego nastąpiło dopiero około r. 1660, głównie za sprawą Pascala, powodując nagły zwrot w sposobie myślenia o prawdopodobieństwie. Od tej pory pojęcie to miało charakter dualny, w sensie przedstawionym powyżej.

W niniejszym artykule — stanowiącym skrócony fragment szerszego opracowania — na podstawie informacji o autentycznych lub zrekonstruowanych sposobach rozumowań o probabilistycznej naturze, chcemy — w dużym skrócie — ukazać historyczną drogę rozwoju pojęcia prawdopodobieństwa, zwracając przy tym uwagę na jego dualność. W centrum naszych zainteresowań znajdować się będzie problematyka probabilistyczna okresu poprzedzającego skrystalizowanie się matematycznych podstaw pojęcia prawdopodobieństwa oraz wczesnych etapów tworzenia się rachunku prawdopodobieństwa jako teorii matematycznej.

2. OKRES PRZEDPASKALOWSKI

2.1. Starożytne gry hazardowe a pierwsze idee probabilistyczne. Opinia, iż rachunek prawdopodobieństwa narodził się z hazardu, jest nieomal powszechna. Gry hazardowe stale towarzyszyły człowiekowi, uważa się je nawet za pierwszy wynalazek społeczeństwa (por. [12], [3]). *Talus* (*astragalus*) — to prehistoryczna kostka do gry. Była to pochodząca z pięty zwierzęcia (kozy lub owcy) kość o takim kształcie, że po podrzuceniu upadała na jedną z czterech różniących się między sobą „ścianek". Takich kostek używano do gier w starożytnej Grecji i Rzymie, w starożytnym Egipcie, a także jeszcze wcześniej — w starożytnej Asyrii i Sumerze (por. [12], [3]). Oczywiście dysponujemy obecnie jedynie wyrywkowymi informacjami o używanych w Starożytności przedmiotach — ówczesnych „mechanizmach losowych", lecz choćby na tej podstawie można oczekiwać, iż takie idee probabilistyczne, jak częstości doświadczalne, czy średnie wyników, powinny — w naiwnym ujęciu — być równie wczesne.

W wielu pracach sugeruje się, że w Starożytności nie dostrzegano, istnienia zdarzeń jednakowo prawdopodobnych — m.in. nie zauważano, że w rzucie kostką sześcienną dowolna ściana wypada tak samo często, jak każda z pozostałych (por. [21], [3]). Używanego do gier „talusa" rzeczywiście nie można było opisać modelem czterech równych szans. Co więcej, rozkład szans dla każdego „talusa" był inny — w zależności od jego indywidualnej budowy, rozkładu masy itp. Mimo to w Starożytnej Grecji i Rzymie rozpowszechniona była gra, uważana z pewnością za sprawiedliwą, polegająca na rzucaniu czterema „talusami" (por. [21], [26]). Za najlepszy wynik rzutu uznawano w niej wypadnięcie czterech różnych ścian kości. Taki rezultat nazywano „Wenerą". Majstrow [21] twierdzi, na podstawie wyników wielokrotnych rzutów „talusami", które zachowały się do naszych czasów, że częstości wypadania poszczególnych ścian „talusów" były stałe i wynosiły: dla ścianki z wgłębieniem 0,39, dla „przeciwległej" ściany 0,37, a dla każdej z obu pozostałych ścian 0,12. „Wenera" nie była zatem zdarzeniem najmniej prawdopodobnym. Majstrow [21] uważa więc, iż fakt wyróżnienia w grze zdarzenia nie pojawiającego się najrzadziej może sugerować, że w Starożytności opierano swoje rozumowania na innych, niż obserwacja częstości czy też model równych szans, podstawach — w tym przypadku najprawdopodobniej na fakcie, że wszystkie ściany kości różniły się między sobą. Zdaniem Majstrowa [21], nie dostrzegano też możliwości otrzymywania danego wyniku gry różnymi sposobami. Mogło to być spowodowane tym, że grający w trakcie gry często zamieniali się rolami, stąd niejednakowe częstości pojawiania się wyników nie miały, przynajmniej na pierwszy rzut oka, większego znaczenia, a nawet mogły być dla nich w zależności od sytuacji wygodne. Takie podejście do gry sprzyjało utrzymywaniu się przekonania o tym, że jest ona sprawiedliwa, co może również tłumaczyć brak zainteresowania wynikami, które byłyby jednakowo prawdopodobne. Podkreślmy przy tym, że termin „sprawiedliwy" w kontekście gry rozumiany był raczej w innym niż obecnie znaczeniu — interpretowano go jako „zgodny z przyjętymi regułami, prawidłami". Potrzeba rozpatrywania różnych sposobów uzyskiwania wyników wynikła dopiero wówczas, gdy w grze pojawiły się dwie strony: organizator gry, zainteresowany tym, aby w grze byli zarówno wygrywający, jak i przegrywający i aby miał on z tego dochód, oraz gracze, którzy oczywiście chcieli wygrywać.

Z kolei Hacking [12], podając przykłady innych niż „talusy" starożytnych kostek do gry, które zachowały się do naszych czasów, stwierdza, iż niektóre z nich zostały prawdopodobnie celowo wykonane z kości słoniowej lub innych jednolitych materiałów, aby miało to wpływ na ich regularność. Na przykład, znajdujące się w Muzeum Starożytności w Kairze eksponaty są zadziwiająco starannie wyważone — chociaż ich kształt nie jest foremny, widać, że narożniki zostały specjalnie tak spiłowane, aby wylosowanie każdej ze ścian można było uznać za jednakowo prawdopodobne. Co więcej, przykład ten nie jest jedynym świadczącym o tym, że trudno zgodzić się z hipotezą, iż w Starożytności zdarzenia jednakowo prawdopodobne nie były zauważane.

2.2. Poglądy starożytnych filozofów dotyczące przypadkowości. Drugim obok gier hazardowych źródłem informacji o starożytnych ideach i rozumowaniach natury probabilistycznej są poglądy filozoficzne dotyczące zagadnień przypadkowości i konieczności. W filozofii starożytnej Grecji, gdzie można napotkać prawie wszystkie związane z tymi zagadnieniami nurty, które następnie rozwinęły się w wiekach późniejszych, problemy przypadkowości i konieczności znajdowały się w kręgu zainteresowań zarówno przedstawicieli materializmu — Leucypa, Demokryta i in., jak i ich przeciwników — zwolenników idealizmu z Platonem na czele. Wielu filozofów greckich, m.in. Demokryt i Arystoteles, traktowało przypadkowość jako pojęcie subiektywne, przykrywające ludzki brak znajomości rzeczy. Poglądy te są bardzo bliskie poglądom wielu filozofów i zarazem probabilistów XVIII i XIX w. (por. [29], [12]), którzy również uważali, że przypadek jest miarą naszej nieznajomości, a przypadkowe — to to, czego nie znamy.

Mimo iż zagadnienia przypadkowości nurtowały starożytnych filozofów, nie rozpatrywano jeszcze zdarzeń losowych jako takich, ani też nie wyodrębniano pojęcia prawdopodobieństwa. W niektórych wywodach filozoficznych można dopatrzeć się obecności zaczątków pojęcia „równoprawdopodobieństwa" przedstawionego oczywiście bez użycia tego terminu, a rozważanego podobnie, jak możliwe jest rozważanie ciał o jednakowej wadze, nie mając pojęcia, co to jest waga. Taki charakter nosi m.in. „zasada niedostatecznej podstawy" — wynikająca z używanej przez Demokryta zasady „izonomii" — stosowana przez Arystotelesa i innych filozofów greckich jako metoda wywodu (por. [21], [29]). Oto przykład rozumowania tego typu przeprowadzonego przez Arystotelesa: „Prawdziwość zjawisk powstaje, zdaniem niektórych, z wyobrażeń subiektywnych: bowiem myślą oni, że sądzić o tym, co prawdziwe, należy nie na podstawie większości czy mniejszości sądów: jedno i to samo może wydawać się jednym słodkie, a innym — gorzkie... tak i każdemu oddzielnie nie zawsze wydaje się jednakowym jedno i to samo. Niejasne jest więc, które z tych wyobrażeń jest prawdziwe, a które — fałszywe: ponieważ nie bardziej prawdziwe są te czy inne, ale wszystkie jednakowo". [21] (por. [22]). Zatem mówi on, że jeśli nie mamy dostatecznej liczby danych o niektórych zjawiskach, to uznajemy je za „jednakowo prawdopodobne". Analogiczne rozważania występowały w końcu XVII w. oraz w w. XVIII i XIX (por. poglądy Leibniza, J. Bernoulliego, Lamberta, Laplace'a i in.) i często opierano je podobnie, jak czynił to Demokryt i inni uczeni starożytnej Grecji, na szeroko pojętej symetrii (por. [5], [33]).

2.3. Rozumowania probabilistyczne na Dalekim Wschodzie. Problemy natury probabilistycznej rozważane były w Starożytności również na Dalekim Wschodzie — w Chinach i Indiach. B. W. Gniedenko [11] podaje przykład wnioskowania o liczebności chłopców na podstawie danych czerpanych z przeprowadzanych spisów ludności, o czym świadczą dokumenty pochodzące ze starożytnych Chin z 2238 r. p.n.e. Niewiele dziś wiemy na temat rozumowań probabilistycznych pochodzących z Indii. Istniejące nieliczne i bardzo interesujące przykłady świadczą o tym, że hinduskie pojęcie prawdopodobieństwa wyrosło z transformacji całkiem różnych od tych występujących w historii europejskiej (por. [12], [22], [32]). M.in. Hacking [12] twierdzi na podstawie analizy fragmentów starożytnego dzieła Mahábarata, że hinduska „wiedza o kościach" ma rodowód znacznie starszy niż europejska oraz że od dawna dostrzegano jej związek z estymacją liczebności zbioru w oparciu o znajomość liczebności próbki. Dla porównania — nawet w Europie po r. 1660 zauważenie takich analogii przez ludzi interesujących się tą problematyką wciąż jeszcze należało do rzadkości.

2.4. Średniowieczne pojęcie prawdopodobieństwa — „probabilitas". Prawdopodobieństwo jako pojęcie matematyczne, w sensie obecnie przez nas rozumianym, narodziło się, jak już wspomnieliśmy, około r. 1660, ale sam termin „prawdopodobieństwo" ma rodowód znacznie starszy. Związek tego pojęcia z numerycznymi ideami przypadkowości po raz pierwszy wystąpił w tekstach drukowanych w r. 1662 w *Logice* Port Royal. Przedtem miało ono głównie sens oceniający, można powiedzieć, że było pojęciem o charakterze epistemologicznym.

Łacińskie słowo „probabilis" oznaczało „warty aprobaty", także — „moralnie prawy". (Do dziś mamy ślady tego znaczenia w słowach anglosaskich: „approve", „proof", również w języku polskim: „prawo", „Henryk Probus"). Zatem analizując prace pochodzące z czasów przedpaskalowskich, należy oczekiwać, że gdy autor używał terminu „prawdopodobne" (probable, probabilis) dla oceny pewnego twierdzenia, to miał on na myśli, że twierdzenie to jest „warte aprobaty" — godne aprobaty rozumu. Takie właśnie znaczenie terminu „prawdopodobieństwo" — „probabilitas" dominowało w okresie Średniowiecza. Pojęcie prawdopodobieństwa wywodzi się z tzw. nauk „niższych" (por. [12] — medycyny, astrologii, czy alchemii. Wszelkie rozważania w obrębie tych dyscyplin pozostawały w okresie Renesansu wyłącznie na „poziomie" opinii, podczas gdy nauki „wyższe" — astronomia, geometria, optyka, czy mechanika zajmowały się wiedzą i jej wywodzeniem.

Zatem pojęcie prawdopodobieństwa — „probabilitas" — było w okresie Średniowiecza ściśle związane z pojęciem opinii (por. [12]). W doktrynie scholastycznej opinia odnosiła się do wiary powstałej w wyniku zastanawiania się nad danym zagadnieniem — argumentowania i była obciążona prawdopodobieństwem, przy czym granicą wzrostu prawdopodobieństwa opinii była wiara pewna, nie zaś wiedza, która mogła być otrzymana wyłącznie poprzez dowód (w sensie wywodu). Prawdopodobieństwo oznaczało poparcie przez autorytety szanowanych ludzi, znawców. Dane twierdzenie uznawano za prawdopodobne, gdy były na to dowody dostarczane „przez ludzi", „poprzez świadectwo". Powyższy sens prawdopodobieństwa przetrwał aż do początku XVIII w., o czym świadczą m.in. następujące przykłady (por. [12]). E. Gibbon, ustosunkowując się do treści kronik dwóch starożytnych historyków opisujących wyprawy Hannibala, stwierdził, że relacja jednego z nich zawiera więcej prawdopodobieństwa zaś druga — więcej prawdy. W innym miejscu swojej pracy zapisał na marginesie jeszcze bardziej zadziwiającą dziś uwagę: „Taki fakt jest prawdopodobny, ale niewątpliwie fałszywy" ([13]). Jednakże analiza tego fragmentu uwzględniająca średniowieczny sens prawdopodobieństwa, pozwala nam zrozumieć, co autor rzeczywiście miał na myśli. W powyższym cytacie stwierdził on, że coś, co ma atrybut „prawdopodobne", jest fałszywe, miał zatem na myśli, że opinia zalecana przez autorytety odnośnie tego zagadnienia jest faktycznie fałszywa. Podobnie stwierdzenie, że relacja jednego z kronikarzy zawierała więcej prawdopodobieństwa, a drugiego — więcej prawdy, oznaczało, że dawni i współcześni Gibbonowi krytycy akceptowali relację pierwszego kronikarza, lecz okazało się to błędem. Dopiero po tym wyjaśnieniu zdania Gibbona przestają być dla nas paradoksem (por. [12]).

Inne, już nie tak późne przykłady rozumowania probabilistycznego, w których można odnaleźć „probabilitas", zawierają prace F. Bacona (1561—1626) i Galileusza (1564—1642) (por. [12]). Galileusz miał z pewnością właściwe intuicje związane z istotą gier losowych, uważa się go za prekursora teorii błędów. Jednakże pojęcie prawdopodobieństwa, jakim się posługiwał, miało przeważnie średniowieczny sens. Tak na przykład uznał on opinię Kopernika za „nieprawdopodobną" nie tylko z powodu licznych „dowodów" przeczących ruchowi rocznemu Ziemi, ale także z powodu siły autorytetów Ptolemeusza i Arystotelesa. „Nieprawdopodobną", ale prawdziwą. Warto w tym miejscu, dla kontrastu, zwrócić uwagę na to, że prawie sto lat później G. Leibniz (1646—1716) wygłosił na ten sam temat diametralnie odmienny (na pozór) pogląd, uważając hipotezę Kopernika, która w momencie jej ogłoszenia była całkowicie przeciwna powszechnej opinii, jako „nieporównywalnie najbardziej prawdopodobną". Dla Leibniza prawdopodobieństwo było już tym, co jest określone przez dowody dostarczone „przez rzeczy" i rozsądek, podczas gdy dla Galilelusza miało ono więcej wspólnego z aprobatą. Drugim obok opinii podstawowym pojęciem nauk „niższych" było pojęcie znaku (por. [12]), które rozwinęło się m.in. w związku z badaniami nad rozprzestrzenianiem się chorób (por. prace G. Fracastora (1478—1553) — prekursora teorii epidemii — [12]). Znak różnił się zasadniczo od przyczyny; na przykład w medycynie przyczyną choroby nazywano wszystko to, co powoduje, że osoba jest chora, natomiast znak był czymś, dzięki czemu można dokonać prognozy — np. na temat wyzdrowienia (por. „znaki na niebie i na ziemi"). H. von Braunsweig (1574) podaje przykład dość trafnie oddający istotę znaku: „Jeżeli człowiek jest bardzo chory, albo bardzo słaby i jest oblany zimnym potem, to jest to bardzo śmiertelny znak". [12]. Pojęcie znaku, choć dziś może nam się wydawać dziwaczne, odegrało w nauce Renesansu znaczącą rolę (por. [12]). Obserwacja znaków była pojmowana jako odczytywanie świadectwa. Jedne znaki były mniej, inne bardziej godne zaufania. Tak więc z jednej strony znaki czyniły daną opinię prawdopodobną — w sensie „probabilitas" — ponieważ dostarczały świadectwa, z drugiej zaś strony mogły być szacowane przez częstości, były więc znakami przyrody, nie zaś słowa pisanego. Tę sprzeczność zlikwidowano, uznając z czasem również przyrodę za słowo pisane — nakaz Twórcy Przyrody. Od tej chwili sama przyroda mogła dostarczać dowodu — poprzez cytowanie autorytetu. Ale autorytet ten opierał się na znakach przyrody, zatem prawdopodobieństwo łączyło się z czymś, co teraz nazywamy regularnościami i częstościami. Związek prawdopodobieństwa ze stabilnymi częstościami jest więc rezultatem przetransformowania pojęcia znaku w nowy rodzaj dowodu — dostarczanego nie przez ludzi, lecz „przez rzeczy”. Nastąpiło to dopiero w r. 1662, kiedy to w dziele *Logika* autorzy uznali dowód poprzez świadectwo za zewnętrzny (świadectwo pochodzi z zewnątrz), a dowód rzeczowy za wewnętrzny i przy tym podstawowy.

Dowód wewnętrzny nadał więc rangę prawdopodobieństwa pewnym hipotezom, a także twierdzeniom — uczynił je wartymi aprobaty. Podkreślmy jeszcze raz, iż odbyło się to poprzez obserwację, na podstawie której dokonywano trafnych przepowiedni, co tłumaczy taki a nie inny dualizm prawdopodobieństwa po r. 1660 (por. [12]).

2.5. Zagadnienie rzutu kostkami. W okresie Średniowiecza zajmowano się także rozwiązywaniem konkretnych problemów natury probabilistycznej, w których dominowało wnioskowanie na podstawie prostych rachunków arytmetycznych. Tematyka tych problemów skupiała się przeważnie wokół gier hazardowych, a w szczególności dwóch zasadniczych zagadnień — gry w kości i znalezienia liczby możliwych sposobów otrzymania wszystkich jej wyników oraz podziału stawki pomiędzy zawodników w sytuacji, gdy pewna gra została przerwana.

Jednym z pierwszych zadań tego typu było zagadnienie określenia liczby możliwych wyników w rzucie kilkoma, najczęściej trzema, kostkami do gry. Najdawniejsze znane rozwiązania tego zadania pochodzą z X—XI w. (por. [12], [21]. W okresie Średniowiecza tworzono poematy, w których każdemu wynikowi rzutu trzema kostkami poświęcano osobną zwrotkę. Zawierały one 56 zwrotek, co wskazuje, iż 56 przyjmowano jako liczbę wszystkich możliwych wyników rzutu. Odpowiada ona ilości wszystkich wyników, jednak bez uwzględnienia możliwości otrzymywania ich różnymi sposobami.

Jedno z najwcześniejszych poprawnych rozwiązań tego problemu zawarte jest w poemacie R. de Fournivala (1200—1250) *De Vetula*. Autor przeprowadza w nim następujące rozumowanie (por. [21]). Jednakową liczbę oczek na trzech kostkach można otrzymać sześcioma sposobami: jeśli liczby oczek na dwóch kostkach są jednakowe, a liczba oczek na trzeciej — inna, to otrzymamy 30 sposobów; jeśli liczby oczek na wszystkich kostkach są różne, to otrzymamy 20 sposobów. Mamy więc 56 możliwych wyników $(6 + 30 + 20)$. Jednakową liczbę oczek możemy uzyskać tylko w jeden sposób, dwie jednakowe liczby oczek, a trzecią różną od nich, możemy otrzymać trzema sposobami, zaś trzy różne liczby — sześcioma. Wynika z tego, że ogólna liczba wyników dla rzutu trzema kostkami wynosi $6 \times 1 + 30 \times 3 + 20 \times 6 = 216$, chociaż wprost tej liczby nie podano.

Analogiczne rozwiązanie podał G. Cardano (1501—1576) w swym dziele *De ludo aleae* (*O grze w kości* ok. 1550). Chociaż praca ta nie została wydrukowana przed rokiem 1663, to jednak była w owych czasach tak popularna, że uważa się ją za pierwszą książkę o prawdopodobieństwie (por. [12], [21], [20]).

W części XI tego dzieła dotyczącej rzutu dwiema kostkami autor rozpatruje m.in. liczbę możliwych przypadków pojawienia się danej liczby oczek na co najmniej jednej z kostek (jak wiadomo, wynosi ona 11): „liczba ta jest mniejsza od ilości przypadków braku danej liczby oczek. W stosunku do ogólnej liczby przypadków w rzucie dwiema kostkami jest ona większa od 1/6 i mniejsza od 1/4". [21]. Cardano, podając mylnie ułamek 1/4, miał z pewnością na myśli 1/3 ($1/6 < 11/36 < 1/3$, podczas gdy $11/36 > 1/4$). Zauważmy, że w rozumowaniu tym, typowym dla Cardana, występuje określenie liczby interesujących wyników za pomocą ułamka — części, z jednoczesnym potraktowaniem liczby wszystkich wyników jako całości.

Za najbardziej kompletne rozwiązanie zagadnienia rzutu trzema kostkami można uznać (por. [21], [10]) rozwiązanie Galileusza zamieszczone w jego pracy *O wypadaniu oczek w grze w kości*, zawierającej m.in. tablicę możliwych sum w rzucie 3 kostkami wraz z wykazem wszystkich wyników, obliczonych sposobem „6^3" (por. [11]).

2.6. Problem podziału stawki. Zagadnieniem sprawiedliwego podziału stawki (nagrody) pomiędzy graczy w sytuacji, gdy gra została przerwana, zajmował się m.in. L. Pacioli (ok. 1445—1515). W pracy *Suma wiadomości o arytmetyce, geometrii, proporcjach i proporcjonalności* (1494) poświęcił tematyce tej rozdział pt. *Niezwykłe zadania*, gdzie umieścił szereg zadań, z których każde rozwiązał według następującej zasady: Jeśli dwóch graczy przerwało grę w momencie, gdy wygrali odpowiednio m i n partii, to stawka była dzielona w stosunku m : n niezależnie od tego, ile partii pozostało do rozegrania (por. [21], [20], [16], [24]). Problemem stawek interesowano się jeszcze przed Paciolim. Ore [24] (por. [12]) znalazł tego rodzaju problem we włoskim rękopisie z r. 1380 i uważa, że jest on pochodzenia arabskiego. Jednakże przez długi okres nie potrafiono sobie z nim poradzić — rozwiązanie Pacioliego przez długi czas wydawało się dobre. Błędność tego rozumowania zauważył m.in. N. Tartaglia (1499—1559) w pracy *Traktat ogólny o liczbach i miarach* (1560): „Ta jego [Pacioliego] reguła nie wydaje mi się ani ładna ani dobra, ponieważ gdyby na przykład jedna ze stron miała 10 punktów, a druga — nie miała żadnego, to zgodnie z tą regułą ta pierwsza powinna wziąć wszystko, a ta druga nic — a to byłoby zupełnie pozbawione sensu". ([24], [12], [21]). Tartaglia rozwiązał problem stawki postępując zgodnie z zasadą, że odchylenie od połowy stawki powinno być proporcjonalne do różnicy wygranych partii.

Pierwsze znane nam poprawne rozumowanie pochodzi od G. F. Peverone (1588) (por. [12]), zaś Cardano wyraził je w ogólniejszej formie: „Jest to jedna ogólna zasada: trzeba obliczyć ogólną liczbę możliwych wyników i liczbę sposobów, w jakie mogą pojawić się dane wyniki, a więc znaleźć stosunek ostatniej liczby do liczby pozostałych możliwych wyników. W przybliżeniu w takiej proporcji określa się odpowiednie rozmiary stawek po to, żeby gra przebiegała na równych warunkach". ([21]).

Oznacza to, że jeśli ogólna liczba możliwych wyników wynosi n, zaś liczba sprzyjających m, to stawki powinny być podzielone w stosunku m : (n — m). Zatem można by dziś powiedzieć, że podział stawek zaproponowany przez Cardana powinien odbywać się proporcjonalnie do jednakowo możliwych przypadków, czyli do prawdopodobieństwa wygranej, rozumianego w sensie aleatorycznym, chociaż oczywiście słowo to nie było przez autora stosowane.

2.7. Pojęcia łatwości, tendencji i częstości w rozumowaniach probabilistycznych. Jak widać choćby na podstawie powyższych przykładów, w rozumowaniach probabilistycznych okresu przedpaskalowego, związanych z grami hazardowymi, nie używano terminu „prawdopodobieństwo", lecz posługiwano się takimi obiektami myślowymi, które z czasem „stopiły się" i uformowały obszar pojęciowy, w jakim w następnym wieku powstało pojęcie prawdopodobieństwa w jego dualnej postaci. Przyjrzyjmy się niektórym z nich.

W jednej ze swych prac Galileusz omawia sprzeczność, jaką zauważono w przypadku rzutu trzema kostkami — twierdząc, że sumy 9 i 12 można otrzymać na tyle samo sposobów co 10 i 11 — gdy tymczasem „wiadomo z długich obserwacji, że gracze uważają 10 i 11 za sumy korzystniejsze, dające przewagę w grze nad 9 i 12" ([12]). Galileusz rozstrzygnął ten problem poprzez „bardzo proste wyjaśnienie — że pewne liczby są łatwiejsze i częstsze od uzyskania niż inne; to zależy od tego, czy można je uzyskać z większej różnorodności liczb" ([12]).

Trudno dziś stwierdzić, czy tego typu problemy probabilistyczne rzeczywiście wyrastały z praktyki — z obserwacji danych empirycznych, czy też mają raczej genezę arytmetyczną. Wiadomo bowiem, że zainteresowanie wiedzą empiryczną było raczej obce nauce owych czasów — aż do momentu, gdy sam Galileusz zajął się tym zagadnieniem. Wydaje się, że podłoże empiryczne mają także niektóre argumentacje Cardana, m.in. następująca: „W sprawiedliwej grze hazardowej — rzut trzema kostkami — wynik „tylko trzy kropki" jest zdarzeniem zwyczajnym, naturalnym, nawet jeżeli pojawi się on po raz drugi, gdy rzut zostanie powtórzony. Jeżeli wynik trzeciego i czwartego rzutu jest taki sam, to dla rozważnego człowieka jest to na pewno powód do podejrzeń". ([15]).

Zdaniem Hackinga [12], w tekstach Cardana można również dopatrzyć się tzw. „skłonnościowej" interpretacji prawdopodobieństwa. W jego rozumowaniach dotyczących zagadnienia rzutu kostką prawdopodobieństwo wiąże się z „tendencją", „skłonnością" (propensity) kostki do produkowania pewnych stabilnych częstości w powtarzających się próbach. Także zdanie Galileusza o wynikach „łatwiej i częściej występujących" odnosi się do owej „skłonności" kostki.

W pracach Cardana występuje także inne niż częstościowe uzasadnienie „zdolności" kostki do lądowania na każdej z jej sześciu ścian. Wiąże się ono z idealizacją zagadnienia rzutu kostką, bazującą na symetrii tej kostki: „Mogę równie dobrze wyrzucić 1, 3 lub 5, 2, 4 lub 6. Dlatego można dokonywać zakładów zgodnie z tą równością — jeśli kostka jest uczciwa, a jeśli nie — robi się je bardziej lub mniej proporcjonalne do odchylenia od prawdziwej równości". ([3]).

3. CZASY PASCALA, FERMATA I LEIBNIZA

3.1. Problemy kawalera de Méré. Problemy kawalera de Méré wraz z legendą związaną z ich rozwiązaniem — to jeden z najbardziej znanych epizodów w historii nie tylko rachunku prawdopodobieństwa, ale całej matematyki. Były one przedmiotem zainteresowania wielu matematyków owych czasów: B. Pascala (1623—1662), do którego de Méré zwrócił się z prośbą o ich rozstrzygnięcie, a także Fermata, Leibniza, Huygensa i innych uczonych, którzy znajdowali się w kręgu ówczesnego mecenasa nauki francuskiej, księcia Roannez (por. [16], [11], [21], [20], [24], [4], [30], [8], [7], [10], [12], [14], [26]). Pierwszy problem kawalera de Méré — to tzw. problem kości:

Ile razy trzeba by rzucić dwiema kostkami, aby szansa pojawienia się szóstek jednocześnie na obu kostkach była co najmniej równa szansie niewystąpienia tego wyniku?

W swoim rozumowaniu, przedstawionym w liście do Pascala, kawaler de Méré posłużył się „regułą trzech": skoro przy rzucaniu 4 razy jedną kostką liczba wyników sprzyjających wypadnięciu szóstki przewyższa liczbę wyników sprzyjających niepojawieniu się jej, to w przypadku dwóch kostek przewaga ta powinna wystąpić przy 24 rzutach ($4 : 6 = 24 : 36$). Rozumowanie to, jak łatwo zauważyć, jest błędne: przy 24 rzutach dwiema kostkami szansa interesującego wyniku wynosi $1 - (35/36)^{24} = 0{,}491$, zaś jest ona większa od 1/2 przy co najmniej 25 rzutach: $1 - (35/36)^{25} = 0{,}5055$.

Trudno dziś jednoznacznie stwierdzić, czy nieadekwatność modelu liniowego została zauważona przez kawalera de Méré — doświadczonego hazardzistę — na podstawie długotrwałych obserwacji (por. [8], [7]). Różnica pomiędzy szansami wystąpienia interesującego zdarzenia jest w przypadku 24 i 25 rzutów tak znikoma (49 : 509), że wydaje się, iż źródłem problemu mógł być raczej konflikt nie pomiędzy teorią a praktyką, lecz pomiędzy zastosowanymi teoriami matematycznymi. Potwierdza to cytat pochodzący z jednego z listów Pascala do Fermata (1654), w którym zreformował on rozumowanie de Méré i zwrócił uwagę na występującą w nim sprzeczność pomiędzy wynikiem uzyskanym na podstawie „reguły trzech" a wynikiem, jaki najprawdopodobniej mógł być znany kawalerowi de Méré z obliczenia stosunku analogicznie do rachunków przeprowadzonych dla jednej kostki $(1 - (5/6)^4 = 671/1296)$ (por. [25])

Drugi ze słynnych problemów — to zagadnienie podziału stawki: Gra dwuosobowa polega na rozgrywaniu kolejnych partii, przy czym w każdej z nich obaj zawodnicy mają jednakowe szanse zwycięstwa. Ostatecznie zwycięzcą zostanie ten, kto pierwszy wygra 5 partii. Rozgrywki zostały przerwane w momencie, gdy gracz A miał na swoim koncie 4 wygrane partie, a gracz B: 3. Jak należy podzielić stawkę? Kawalerowi de Méré przypisuje się dwa rozwiązania — podzielić stawkę w stosunku 4 : 3 albo w stosunku (5 — 3) : (5 — 4) — zaznaczając przy tym, że autor nie potrafił stwierdzić, które z nich jest prawidłowe. Pascal rozstrzygnął tę wątpliwość poprzez podanie właściwego wyniku: stawka powinna być podzielona w stosunku 3 : 1 (por. [8], [9]). Bogatym źródłem informacji o rozumowaniach dotyczących podziału stawki są listy Pascala i P. Fermata (1601—1665) napisane w r. 1654. Oto rozwiązanie tego problemu przez Pascala: Stawka w grze wynosi 64 pistole i otrzyma ją ten, kto pierwszy wygra 3 partie. „Załóżmy, że jeden gracz wygrał 2 partie, a drugi jedną. Rozgrywają oni jeszcze jedną partię i jeśli wygra gracz pierwszy, to otrzyma całą stawkę, jeśli natomiast partię tę wygra gracz drugi, to każdy z graczy będzie miał dwie wygrane partie i jeśli następnie będą oni chcieli dokonać podziału stawki, to każdy powinien otrzymać swój wkład: 32 pistole. Proszę jednak zauważyć, że jeśli tę partię wygra gracz pierwszy, to otrzyma 64, a jeśli przegra, to otrzyma 32. Jeśli gracze zechcą rozdzielić stawkę przed rozegraniem tej partii, to pierwszy powinien powiedzieć: „Mam na pewno 32 pistole, bowiem w przypadku przegranej i tak bym je otrzymał, ale pozostałe 32 może otrzymać albo mój przeciwnik albo ja — szanse są równe. Rozdzielmy więc tę sumę po połowie, a ja otrzymam do tego bezsporną sumę 32 pistoli". (por. [11], [21]). Zatem pierwszy gracz powinien otrzymać 48, a drugi — 16 pistoli.

Fermat rozwiązał problem stawki dla gry składającej się z 3 partii, w sytuacji, gdy gracz pierwszy miał na swoim koncie jedną wygraną partię, zaś gracz drugi — żadnej. Wszystkie możliwe wyniki — 16 — rozgrywek pozostałych do zakończenia gry umieścił w tabelce, z której wynikło, iż 11 z nich sprzyja zwycięstwu gracza A, zaś 5 — wygranej gracza B. Zatem pierwszy z nich powinien otrzymać 11/16, a drugi 5/16 stawki (por. [12]).

Chociaż zamieszczone w korespondencji rozważania Pascala i Fermata są poprawne, to jednak w żadnym z nich nie znajdujemy śladu podjęcia próby uogólnienia metody rozwiązania, która mogłaby znaleźć zastosowanie dla szerszej klasy tego typu problemów. Ogólniejszą metodę rozwiązania problemu stawki, opartą na wykorzystaniu trójkąta arytmetycznego, znajdujemy natomiast u Pascala w jego *Traktacie o trójkącie arytmetycznym* napisanym w r. 1654, lecz opublikowanym dopiero po r. 1665 (por. [21], [24]). Główny wkład Pascala w rozwój rachunku prawdopodobieństwa polega nie tyle na opracowaniu trójkąta arytmetycznego, którego pierwowzór można znaleźć u Cardana, a nawet znacznie wcześniej w matematyce chińskiej (por. [12]), czy też na stworzeniu, głównie dzięki korespondencji z Fermatem, nowego stylu w podejściu do zagadnień probabilistycznych, lecz przede wszystkim na bezpośrednim przyczynieniu się do pojawienia się już w pełnej, dualnej formie pojęcia prawdopodobieństwa i w związku z tym na ukazaniu możliwości wykorzystywania modeli gier losowych do rozważania zagadnień pozbawionych podłoża statystycznego.

3.2. Zakład Pascala (1658?). Wydaje się, że pierwszym przykładem zastosowania wiedzy probabilistycznej związanej z grami losowymi do rozstrzygania problemów natury decyzyjnej w sytuacji, gdy niemożliwe jest uzyskanie danych empirycznych, jest słynny dowód istnienia Boga znany pod nazwą „zakładu Pascala" („le pari de Pascal"), zamieszczony w jego dziele *Myśli* (*Pensées*) wydrukowanym przez Port Royal dopiero w r. 1670 (por. [25], [12], [24], [29]). Został on zredagowany w formie dialogu Pascala z kawalerem de Méré. W dowodzie tym Pascal nie próbuje dowieść, że istnienie Boga jest pewne, natomiast chce obliczyć, na ile uznanie Go jest dla człowieka korzystniejsze. W tym celu wprowadza model gry losowej i rozumując w tym modelu stara się uzyskać wnioski odnośnie postawionego problemu: Jeśli szanse orła i reszki są równe i każdy wynik przynosi jednakową nagrodę, to nie ma różnicy, na co stawiamy. Ale jeśli za orła zyskuje się dwa razy więcej niż za reszkę, to jest oczywiste, że lepiej stawiać na orła. W przypadku, gdy nie ma Boga, optymalną nagrodą jest życie ziemskie, zaś w przypadku gdy Bóg jest, zyskiem jest nagroda nieskończenie korzystniejsza — zbawienie. Założenie, że szanse istnienia i nieistnienia Boga są jednakowe, nie jest przekonujące. Choć nie mamy pojęcia, ile wynosi szansa, że Bóg jest, to jednak mamy pewność, że nie jest ona równa zeru. W przypadku istnienia Boga wartość nagrody jest nieskończona, zatem bez względu na to, jak mała jest szansa jej uzyskania, wybór strategii pobożnej przewyższa wybór z nagrodą w postaci życia ziemskiego. Dlatego należy stawiać na istnienie Boga.

Jak widać, rozumowanie to odbywa się z użyciem prostych modeli gier losowych i pojęć z nimi związanych. Występuje tu taka sytuacja epistemologiczna, jak w przypadku rozważania gry polegającej na rzucie monetą, której aleatoryczne właściwości nie są znane. Wówczas osąd opiera się na przypuszczalnym izomorfizmie pomiędzy strukturą problemu decyzyjnego, w którym „obiektywne"—„fizykalne" szanse są znane, a problemem decyzyjnym, w którym takich „obiektywnych" szans nie można określić (por. [12]).

3.3. Prawdopodobieństwo w *Ars Cogitandi* (1662). Podobnie, jak w przytoczonym powyżej rozumowaniu, także i w innych rozważaniach Pascala występujące implicite prawdopodobieństwo o epistemologicznym charakterze nie było określane w sposób ilościowy. Kiedy więc i w którym opracowaniu wystąpiło ono po raz pierwszy jawnie, już w sensie dualnym; kiedy zostało ono określone ilościowo? Hacking [12] uważa, że tym pierwszym historycznie miejscem jest słynne zbiorowe (A. Arnauld, P. Nicole i in.) dzieło szkoły Port Royal, wydane w r. 1662: *Logika* (*Ars Cogitandi* — *Sztuka myślenia*), poświęcone studiom nad różnymi sposobami rozumowań, w którym, jak pamiętamy, dokonano odróżnienia pojęcia dowodu rzeczowego od „starego" dowodu poprzez świadectwo. W końcowej części tego dzieła zawarte zostały uwagi dotyczące wnioskowania nie-dedukcyjnego i tam właśnie po raz pierwszy (w druku) wprowadzono dla prawdopodobieństwa miarę liczbową („stopnie prawdopodobieństwa"), wiążąc ją nie tylko z tym pojęciem, ale także z nazwą „prawdopodobieństwo" występującą do tego momentu jedynie w średniowiecznym znaczeniu „probabilitas". Podkreślmy jednak, że akt ten stał się możliwy przede wszystkim dzięki dziełu Pascala, stąd właśnie jego uważa się za twórcę dualnego pojęcia prawdopodobieństwa.

3.4. Prawdopodobieństwo u Leibniza (1665). Przedstawione powyżej przykłady zagadnień znajdujących się w kręgu zainteresowań Pascala, a także autorów *Logiki*, mogą sugerować, iż jedynym sposobem wprowadzenia miary dla prawdopodobieństwa epistemologicznego było użycie modeli gier losowych i pojęć obmyślonych dla rozwiązywania problemów związanych z hazardem. Tymczasem okres tuż po r. 1660 obfitował w studia nad ideami probabilistycznymi prowadzone przez ówczesnych wybitnych matematyków zupełnie niezależnie od siebie i okazało się, że teoria prawdopodobieństwa rozwinięta w tym czasie przez Leibniza ma zupełnie odmienny od „hazardowego" rodowód, wyrosła bowiem z zainteresowania naukami prawniczymi (por. [12]). G. Leibniz w swej pracy *De conditionibus* (1665), zawierającej studia dotyczące praw warunkowych, wprowadził liczby dla określenia stopni prawdopodobieństwa, wyróżniając trzy rodzaje warunków: warunek absolutny (jus purum), któremu nadał wartość 1, warunek niemożliwy (jus nullum), mający wartość 0 oraz warunek niepewny z wartością wyrażoną ułamkiem (większym od 0, mniejszym od 1). Mimo, iż wartość warunku niepewnego, tj. prawdopodobieństwo zdarzenia niepewnego — została wyrażona w postaci ułamka, Leibniz nie dokonywał porównań poszczególnych ułamkowych stopni prawdopodobieństwa, ograniczając się jedynie do wspomnianej klasyfikacji trzystopniowej.

Prawdopodobieństwo w jego pracach jest przede wszystkim prawdopodobieństwem epistemologicznym, a stopnie prawdopodobieństwa są stopniami pewności (por. [12]).

3.5. Teoria prawdopodobieństwa Huygensa (1657). Przyglądając się rozwiązaniom problemów probabilistycznych, zamieszczonym w niniejszym artykule, można niejednokrotnie zauważyć występowanie w nich, w sposób niejawny, pojęcia wartości oczekiwanej. Mogłoby się wydawać, że pojęcie to powinno być łatwiejsze do uchwycenia niż samo pojęcie prawdopodobieństwa, zwłaszcza w rozważaniach dotyczących gier losowych, gdzie można dzięki wartości oczekiwanej „zobaczyć" korzyści i straty wynikające z systematycznego uprawiania hazardu. Wartość oczekiwana jest w tym przypadku średnią wypłatą uzyskaną z długiej serii powtarzających się gier, z pewnością chętniej „obserwowaną" przez zainteresowanych niż prawdopodobieństwo pojawiania się poszczególnych wyników. Jednakże samo pojęcie uśredniania nie tkwiło raczej w powszechnej świadomości ludzi przed rokiem 1657 — nie ma dowodów na to, aby liczono średnie (por. [12]), tym bardziej więc trudno sądzić, że dokonywano ich obserwacji w trakcie przeprowadzania rozgrywek. Oczywiście uprawiający hazard prawdopodobnie notowali, które ze stosowanych przez nich strategii wydają się być „korzystniejsze" — używając słów Galileusza, ale pomiędzy takim podejściem a dojrzałym pojęciem wartości oczekiwanej istnieje jednak duża luka (por. [12], [21]).

Pojęcia Cardana: „równości szans" oraz „serii" używane przez niego podczas analizowania gier z kostkami można, zdaniem Hackinga [12], uznać za pewnego rodzaju antycypację pojęcia wartości oczekiwanej, ale raczej należy sądzić, że do czasów korespondencji Pascala i Fermata wartość oczekiwana, nie była chyba jeszcze dobrze rozumiana. Dojrzałym już przykładem użycia wartości oczekiwanej jest rozumowanie

Pascala zaprezentowane w jego „zakładzie". Tuż przedtem pojawiły się rozumowania zawierające bardzo jasne idee pojęcia wartości oczekiwanej. Mamy tu na myśli pracę Ch. Huygensa (1629—1695), pochodzącą z r. 1657 — *De ratiociniis in aleae ludo* (*O rachubach w grach z szansami*), wydaną jako aneks do książki F. van Schootena *Etiudy matematyczne*. W pracy tej Huygens zamieścił własne rozwiązania problemów stanowiących przedmiot zainteresowań Pascala, Fermata i innych członków koła Roannez. Zestaw ten do czasów J. Bernoulliego stanowił obowiązkową lekturę wszystkich zainteresowanych tą tematyką.

Praca ta składa się z wprowadzenia oraz 14 twierdzeń, z których pierwsze trzy są podstawowe dla metody, zastosowanej w poszczególnych rozwiązaniach. Twierdzenia IV—IX poświęcone są problemowi podziału stawki, zaś X—XIV zawierają różnorodne zadania związane z grami w kości. Na końcu pracy autor zamieścił pięć zadań do samodzielnego rozwiązania przez czytelnika (por. [12], [11], [21], [20], [15], [24], [10], [8], [1], [30], [18]).

Na wstępie Huygens wprowadził pojęcie szansy: „Chociaż w przypadku gier opartych na czystym przypadku rezultaty nie są znane, to jednak szansa gracza na wygraną lub przegraną ma określoną wartość. Na przykład, gdy czyni on zakład, że uzyska w pierwszym rzucie kością 6 oczek, to nie wiadomo, czy wygra, czy też przegra, ale można obliczyć, na ile jego szanse przegranej przewyższają jego szanse na wygranie postawionego zakładu". ([12]).

W rozważaniach dotyczących gier losowych Huygensa interesowała przede wszystkim cena danej gry: jeśli zaproszono nas do udziału w grze z danym schematem nagród zależnie od poszczególnych wyników, to chcielibyśmy, aby cena za udział w niej była uczciwa, sprawiedliwa — tzn. taka, za jaką gracz byłby gotów odstąpić swoje prawo do zwycięstwa w tej grze. Gra może stracić swą uczciwość w dwóch przypadkach: gdy nagrody możliwe do uzyskania nie będą jednakowej wartości, albo gdy losy mogą nie być wyciągane jednakowo łatwo. Pierwszy przypadek został omówiony w twierdzeniu I, a drugi w twierdzeniu III omawianej pracy. Oto trzy podstawowe twierdzenia:

Tw. I: „Jeśli mam równe szanse otrzymać a lub b lub c, to kosztuje mnie to $(a + b)/2$".

Tw. II: „Jeśli mam równe szanse na otrzymanie a lub b lub c, to kosztuje mnie to tyle, jakbym miał $(a + b + c)/3$".

Tw. III: „Jeśli liczba przypadków, w których mogę otrzymać sumę a, wynosi p, a liczba przypadków, w których mogę otrzymać sumę b, wynosi q, to koszt (wartość) mojego oczekiwania wynosi $(ap + bq) / (p + q)$". ([21]).

Przyjrzyjmy się dla przykładu rozwiązaniu problemu podziału stawki, stanowiącego treść tw. IV omawianej pracy: „Załóżmy, że gram z moim przeciwnikiem w grę — kto pierwszy wygra 3 partie — i załóżmy, że wygrałem już 2 partie, a on jedną. Chcę wiedzieć, jaka część stawki przypadłaby mnie, gdybyśmy chcieli przerwać grę w tym momencie i sprawiedliwie rozdzielić stawkę. (...) Trzeba od razu zauważyć, że wystarczy wziąć pod uwagę liczbę partii brakujących jednej i drugiej stronie do zwycięstwa. (...) Prawdą jest także, że wygrawszy partię, otrzymałbym całą stawkę, którą oznaczam przez a. Ale jeśli pierwszą partię wygra mój przeciwnik, to nasze szanse staną się równe, biorąc pod uwagę, że każdemu z nas będzie brakować po jednej partii, tzn. każdy z nas miałby prawo otrzymać a/2. Niewątpliwe jest, że mam równe szanse otrzymać a i a/2, co zgodnie z tw. I jest równoważne sumie ich połówek, tj. (3/4)a, tak więc mojemu przeciwnikowi pozostaje a/4". ([21], por. [11]).

Jak widać, rozumowanie Huygensa ma charakter ogólny, paradygmatyczny: dotyczy sumy a — wielkości do podziału — i zawiera wyraźne sformułowanie, że należy brać pod uwagę tylko liczbę partii brakujących do zwycięstwa, a przede wszystkim, zachowując swą ogólność, odwołuje się do pojęcia wartości oczekiwanej — występującego pod nazwą „ceny" oraz do pojęcia szansy (szanse są jednakowe). Pojęcie uczciwej ceny (nazwane w tłumaczeniu łacińskim van Schootena jako „expectatio") zajmuje w podejściu Huygensa miejsce centralne, można nawet powiedzieć, że jest bardziej podstawowe niż pojęcie szansy. Czy jednak jest ono rzeczywiście tym właśnie, co można określić mianem wartości oczekiwanej w sensie aktualnie przez nas rozumianym?

Hacking [12] uważa, że pojęcie wartości oczekiwanej nie było jeszcze u Huygensa w pełni dopracowane. Opinia ta została poparta przez Freudenthala [9], który wyjaśnił, że termin „expectatio" odnosi się do zbioru możliwych w grze wyników, tymczasem nasze współczesne pojęcie wartości oczekiwanej występowało u Huygensa pod nazwami „wartość szansy" lub „wartość oczekiwania". Znacznie właściwsze wydaje się zatem przyglądanie się temu pojęciu w konkretnym kontekście rozwiązywanych przez Huygensa problemów.

4. UWAGI KOŃCOWE

Omawiając — nawet w tak wielkim skrócie — pra-początki rachunku prawdopodobieństwa, nie sposób nie wspomnieć o jeszcze jednym ważnym nurcie, który miał istotne znaczenie dla konceptualizacji pojęcia prawdopodobieństwa — o rozumowaniach probabilistycznych, jakie występowały w drugiej połowie XVII wieku w Anglii w związku z zainteresowaniem zagadnieniami demograficznymi.

W tym samym roku, kiedy w Paryżu opublikowano *Logikę*, w Londynie wydano pracę J. Graunta (1620—1674) *Spostrzeżenia przyrodnicze i polityczne nad biuletynami śmiertelności* stanowiącą zbiór wnioskowań statystycznych dotyczących demografii, opartych na analizie obszernej ilości danych o ludności — głównie Londynu. Opracowanie danych statystycznych o tematyce demograficznej nie było około r. 1662 nowością. Problematyką tą interesowano się, jak już wspominaliśmy, od czasów Starożytności. Zainteresowania te miały konkretny charakter, wnioskowanie odbywało się na ogół na podstawie stosunkowo niewielkiej liczby danych, nie gromadzonych systematycznie i nie wymagało opracowywania ogólnej metody postępowania. Od początku XVI w. w Anglii, w związku z epidemiami dżumy, w miastach coraz częściej zaczęły ukazywać się biuletyny, w których notowano liczbę pogrzebów, jakie miały miejsce w dawnym okresie. Począwszy od r. 1603 w Londynie prowadzono systematyczny rejestr chrzcin i pogrzebów. Poszukiwanie metod szczegółowego opracowywania tych danych dało początek statystyce (por. [12], [21], [20], [28], [10], [16]).

Za prekursorów wnioskowania statystycznego uważa się Graunta i M. Petty'ęgo (1623—1687). Zagadnienia, którymi zajmowali się oni, dotyczyły, zasadniczo trzech problemów: liczebności urodzeń, umieralności ludności oraz odpowiedniego określenia wysokości rent społecznych, których system właśnie powstawał. W rozumowaniach swych obaj autorzy posługiwali się pojęciem średniej, a także — implicite — prawdopodobieństwem w jego aleatorycznym aspekcie, chociaż żaden z nich nie znał tego pojęcia (por. [12]).

Jak więc widać z tych przykładów, w okresie około r. 1662 analogiczne idee natury probabilistycznej pojawiały się zupełnie niezależnie od siebie (por. [12]). Podkreślmy przy tym, iż bez względu na drogi, jakie wiodły do wykrystalizowania się dualnego pojęcia prawdopodobieństwa, równocześnie z nim pojawiło się w rozumowaniach probabilistycznych pojęcie wartości oczekiwanej. Wydaje się, iż wyodrębnienie i rozróżnienie obu tych pojęć także w istotny sposób przyczyniło się do rozwoju rachunku prawdopodobieństwa.

Recenzent: Jerzy Dobrzycki
Artykuł napłynął do Redakcji w kwietniu 1989 r.

Przypisy:

1. H. J. Bentz: *Zum Wahrscheinlichkeitsbegriff von Ch. Huygens.* „Didaktik der Mathematik" 1983, 1, s. 76—83.
2. N. Bourbaki: *Elementy historii matematyki.* Warszawa 1980.
3. F. N. David: *Games, Gods and Gambling.* London 1962.
4. A. Edwards: *Pascal and the Problem of Points.* „International Statistical Review" 1982, 50 s. 259—266.
5. M. Eigen, R. Winkler: *Gra.* Warszawa 1983.
6. T. L. Fine: *Theories of Probability. An Examination of Foundations.* New York 1973.
7. H. Freudenthal: *The Aims of Teaching Probability.* L. Rode (ed.): *The Teaching Probability and Statistics, Proceedings of the First CSMP International Conference.* Stockholm 1970 s. 151—168.
8. H. Freudenthal: *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht 1973.
9. H. Freudenthal: *Huygens' Foundations of Probability.* „Historia Mathematica" 1980 7, s. 113—117.
10. H. Freudenthal, G. Steiner: *Aus der Geschichte der Mathematik.* H. Behnke, G. Bertram, R. Sauer (ed.): *Grundzüge der Mathematik.* Göttingen 1966 s. 149—195.
11. B. W. Gniedenko: *Iz istorii nauki o słuczajnom.* Moskwa 1981.
12. I. Hacking: *The Emergence of Probability.* London 1975.
13. W. L. Harper, C. A. Hooker (ed.): *Foundations of Probability Theory, Statistical Inference and Statistical Theories of Science.* Dordrecht 1976.
14. G. von Harten, H. Steinbring: *Stochastik in der Sekundarstufe I. Untersuchungen zum Mathematikunterricht.* Bd. 8. Institut für Didaktik der Mathematik. Bielefeld 1984.
15. J. Høyrup: *Six-Century Intuitive Probability: the Statistical Significance of a Miracle.* „Historia Mathematica" 1983, 10, s. 80—84.
16. A. P. Juszkiewicz (red.): *Historia matematyki.* Warszawa 1976.
17. A. N. Kołmogorow: *O matematyce.* Warszawa 1955.
18. F. C. Kost: *Two Solutions to a Problem of Huygens.* „Mathematics Teacher" 1985, February, s. 144—145.
19. B. Kuzniecow: *Historia filozofii dla fizyków i matematyków.* Warszawa 1980.
20. L. E. Majstrow: *Teoria wierojatnostiej — istoriczeskij ocziersk.* Moskwa 1967.
21. L. E. Majstrow: *Razwitije poniatija wierojatnosti.* Moskwa 1980.
22. V. V. Nalimov: *Faces of Science.* 1981.
23. J. Neyman: *Narodziny statystyki matematycznej.* „Wiadomości Matematyczne" 1979 t. 22 s. 91—106.
24. Ø. Ore: *Pascal and the Intuition of Probability Theory.* „American Mathematical Monthly" 1960, 67, s. 409—419.
25. B. Pascal: *Myśli.* Warszawa 1977.
26. A. Renyi: *Letters on Probability.* Budapest 1977.
27. G. Shafer: *A Theory of Statistical Evidence.* [13]. Vol. 2 s. 365—436.
28. G. Shafer: *Non-Additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert.* „Archive for History of Exact Science" 1979, vol. 19 4.
29. W. Tatarkiewicz: *Historia filozofii.* Warszawa 1981.

30. I. Todhunter: *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. New York 1965.
31. J. Tokarski (red.): *Słownik wyrazów obcych*. Warszawa 1978.
32. K. Urbanik: *Idee H. Steinhausa w teorii prawdopodobieństwa*. „Wiadomości Matematyczne" 1973 t. 17 s. 39—50.
33. H. Weyl: *Symetria*. Warszawa 1960.