Rosińska, Grażyna

Algebra w kręgu astronomów krakowskich XV wieku : traktat z Flores almagesti Jana Bianchiniego

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 39/2, 3-20

1994

A R T Y K U Ł Y

Grażyna Rosińska
(Warszawa)

ALGEBRA W ŚRODOWISKU ASTRONOMÓW KRAKOWSKICH W XV WIEKU TRAKTAT Z *FLORES ALMAGESTI* JANA BIANCHINIEGO*

Algebra w XV stuleciu była przede wszystkim sprawą kupców i bankierów, a nie środowiska uniwersyteckiego. Nauczano jej w szkołach zwanych „scuole d'abaco" gdzie, w przeciwieństwie do uniwersytetów, posługujących się w dydaktyce łaciną, wykłady odbywały się w językach narodowych. Absolwenci szkół abaku byli specjalistami w zakresie spraw finansowych, związanych z podziałem majątku, spółkami rzemieślniczymi i handlowymi, udziałami, oprocentowaniem.

Zdarzało się, że gdy ma czele szkoły abaku stał wybitny matematyk, powstawało wokół niego środowisko zainteresowane także rozwijaniem algebry. Starano się więc rozwiązywać równania wyższych stopni niż kwadratowe i osiągnięto częściowy sukces, mianowicie przy rozwiązywaniu równań sześciennych typu $ax^3+bx^2+cx=d$ dla $a, b, c, d, \in N$, oraz $a=1$, gdy $b^2/3a=c/a$, t.j. gdy kwadrat współczynnika niewiadomej w drugiej potędze podzielony przez 3 równy jest współczynnikowi niewiadomej w pierwszej potędze[1]. Interesowano się ponadto równaniami typu $ax^{2n}+bx^n+c=0$. W szkołach nie unikano działań na liczbach ujemnych i niewymiernych traktując je arytmetycznie, stąd zasługi abacystów także dla teorii liczb rzeczywistych – opracowanej kilka wieków później.

Dynamizm nauczania matematyki dla potrzeb rodzącej się nowożytnej ekonomii doprowadził z biegiem czasu do paradoksalnej sytuacji: to nie nauka uniwersytecka była popularyzowana, a popularne szkoły abaku stymulowały rozwój algebry teoretycznej i odcisnęły na nim swe piętno. Stało się to jednakże dopiero w XVI wieku. Do rzadkości natomiast należą egzemplarze podręczników abaku pochodzące z wcześniejszego okresu zachowane w zbiorach uniwersyteckich z XV stulecia. Biblioteka Jagiellońska na przykład posiada wśród rękopisów, które służyły studentom w Krakowie na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych XV wieku, jeden taki traktacik, *Arithmetica mercatorum*. Jest to łaciński wykład „arytmetyki handlowej" (BJ 2729, f.76r-77v), najprawdopodobniej przełożony z toskańskiego, czy innej *lingua volgare*.

Z reguły w XV wieku szkołami abaku, poza profesjonalistami biznesu, bardziej niż uniwersytety, zainteresowani byli artyści. Wśród nich Piero della Francesca, malarz i teoretyk perspektywy, jest także autorem podręcznika algebry zatytułowanego *Trattato d'abaco*[2]. Ze szkół abaku zapewne czerpali wiedzę matematyczną Filippo Brunelleschi, Paolo Toscanelli i Leon Battista Alberti. Z tych samych źródeł pochodziła kultura matematyczna Leonarda, ucznia wybitnego kontynuatora tradycji szkół abaku, Luca Pacioli.

W pierwszych dziesięcioleciach XV wieku możliwość zastosowania algebry do obliczeń astronomicznych odkrył Giovanni Bianchini, a około dwadzieścia lat po nim Jahannes Regiomontanus. Bianchini wiedzę matematyczną w zakresie algebry zawdzięczał najprawdopodobniej jednej ze szkół abaku działających w Wenecji, tam bowiem spędził młodość zajmując się handlem[3].

Najznakomitsze jednak centra szkolenia znajdowały się we Florencji oraz na południu Francji.

Z florenckiej tradycji pochodzą setki rękopisów w języku toskańskim dotąd zachowanych głównie we Florencji, w Biblioteca Medicea Laurenziana, ale również w Sienie, w Biblioteca degli Intronati i w Rzymie, w Bibliotece Watykańskiej. Repertorium tych kodeksów, które opublikował Warren van Egmond[4] oraz prace realizowane przez zespół historii matematyki działający przy uniwersytecie w Sienie ukazują ogrom tego jedynego w swoim rodzaju na przestrzeni dziejów przedsięwzięcia w zakresie nauczania „matematyki stosowanej"[5]. W ten sposób opinie o znaczeniu XV wiecznych abacystów dla rozwoju algebry we Włoszech w XVI stuleciu, który dokonał się w wyniku prac Scipione dal Ferro, Cardana, Ferrero i Rafaela Bombelli wydają się udokumentowane[6].

Drugi silny nurt „matematyki handlowej" rozwinął się na południu Francji. Źródła tego nurtu sięgają wprawdzie Włoch, ale dokonania bywały niekiedy oryginalne. Świadczą o tym opracowywane ostatnio traktaty w języku *oc*[7] a nade wszystko odkryte w XIX w. wybitne dzieło matematyczne liończyka, Nicolas Chuquet *Triparty en la science des nombres* (1484)[8].

O ile oryginalna twórczość renesansowych algebraików miała niewiele wspólnego z uniwersytetami, to kilka wieków wcześniejsze p o c z ą t k i europejskiej algebry w kulturze łacińskiej łączą się ze środowiskami uniwersyteckimi: już od połowy XII wieku znano tam algebrę w zakresie teorii i praktyki rozwiązywania równań liniowych oraz równań drugiego stopnia ze współczynnikami dodatnimi i o wyróżniku równym zero lub większym od zera[9]. Inna sprawa, że nie dostrzega się algebry w regularnym nauczaniu uniwersyteckim. Sytuacja ta wydaje się trwać aż do wieku XVI. Dowodem tego jest zarówno brak algebry w spisach wykładów uniwersyteckich, jak niemal całkowity brak zachowanych traktatów łacińskich z tej dziedziny. Wspomniana wyżej „krakowska" *Arithmetica mercatorum* należy do wyjątków.

Zupełnie szczególne miejsce w literaturze algebraicznej zajmuje wykład algebry Giovani'ego Bianchiniego (ca. 1400 – ca. 1470), napisany po łacinie i pomyślany jako wstęp matematyczny do dzieła astronomicznego zatytułowanego *Flores Almagesti*. Wykład ten, będący drugim w kolejności rozdziałem *Flores*, poprzedzony jest arytmetyką i wraz z arytmetyką wprowadza w naukę o proporcjach oraz elementy trygonometrii płaskiej i sferycznej[10]. Nawiązując do zasygnalizowanej wyżej roli „matematyki handlowej" w rozwoju nauk matematycznych zauważmy, że w jakimś sensie sytuacja ta dotyczy także twórczości Bianchiniego: *Flores Almagesti*, zawierające najbardziej kompletny wykład matematyki, jaki ukazał się przed *Summą* Luca Pacioli (1492), są dziełem człowieka nauki, który przez całe życie zawodowo trudnił się administrowaniem majątku rodziny d'Este w Ferrarze, pobieraniem podatków i dyplomacją[11]. Bianchini napisał *Flores* dla środowiska uniwersyteckiego chociaż całe życie przebywał poza nim.

1. ZNACZENIE ZBIORÓW KRAKOWSKICH W ODKRYCIU *FLORES ALMAGESTI*

Flores Almagesti, dzieło przez dłuższy czas uważane w historiografii włoskiego Renesansu za zaginione[12], odkrył ponad osiemdziesiąt lat temu Ludwik Antoni Birkenmajer w zbiorach rękopiśmiennych uniwersytetu w Krakowie (Biblioteka Jagiellońska, rękopis BJ 558). W opublikowanym w języku niemieckim komunikacie Birkenmajer podał opis manuskryptu, poinformował o treści dzieła Bianchiniego i przytoczył zeń kilka niewielkich fragmentów[13]. Uwagi na temat *Algebry* Bianchiniego zajmują nie więcej niż pół strony tego jedenastostronicowego komunikatu, ale informacja w nich zawarta sygnalizuje rangę odkrycia[14]. Komunikat Birkenmajera został rozpowszechniony w kręgu europejskich historyków nauki, wśród których pewni, jak Antonio Favaro, pozostawali od dawna w przyjaźni i współpracy z autorem. O tym, do jakiego stopnia to niewielkie studium weszło do historii nauki świadczy fakt, iż dotąd jest cytowane w niemal każdej poważniejszej publikacji na temat piśmiennictwa matematycznego i astronomicznego w XV wieku – i to pomimo, iż od czasów Birkenmajera odkryto w bibliotekach Europy jeszcze pięć innych kopii *Flores Almagesti*[15]. O tym natomiast do jakiego stopnia pewne ważne odkrycia pozostają nie wykorzystane, nie opracowane bowiem do końca i nie wcielone do kolejno powstających ujęć syntetycznych dziejów poszczególnych dyscyplin, świadczy inny fakt, mianowicie iż przez ponad osiemdziesiąt lat ta krótka i z konieczności fragmentaryczna prezentacja zawartości części algebraicznej *Flores* nie została ani rozwinięta ani poparta edycją tekstu, pozostającego dotąd, mimo swojej szczególnej pozycji, na marginesie zaiteresowań historyków matematyki[16]. Obecne studium powstało już w oparciu o pełną znajomość tekstu *Algebry*, przygotowanego do edycji krytycznej, i w związku z większą pracą, mającą na celu wprowadzenie *Algebry* Bianchiniego do toczącej się od lat dyskusji na temat europejskiej algebry w XV wieku.

Flores Bianchiniego znane są dziś w sześciu kopiach zachowanych, poza rękopisem krakowskim, we Francji, Włoszech i w Watykanie. Wszystkie te kopie zostały sporządzone we Włoszech i w każdej z nich *Algebra* stanowi *Traktat drugi* i jest poprzedzona, jak wspomniano, wykładem arytmetyki. Istnieje ponadto siódma kopia *Algebry*, wykonana niezależnie od całości dzieła. Kraków posiada dwa odpisy, ten ze wspomnianego wyżej, najwcześniej odkrytego rękopisu *Flores*, sygnowanego BJ 558, oraz, wspomniany jako siódmy, odpis znajdujący się w rękopisie BJ 601[17]. Także *Algebra* z BJ 601 jest proweniencji włoskiej. *Algebra* z rękopisu BJ 558 wydaje się być tym egzemplarzem, o którym wiadomo z korespondencji Bianchiniego z Regiomontanem, iż od lutego 1464 należał do Regiomontana[18], a w każdym razie mógł on kodeksem swobodnie dysponować, skoro na marginesie wpisywał uwagi towarzyszące lekturze dzieła Bianchiniego. Glosy te, z których dwie przytacza L.A. Birkenmajer, zostały zidentyfikowane jako ręka Regiomontana dopiero w 1938 roku, przez E. Zinnera[19]. Chociaż brak jakichkolwiek danych o drogach, jakimi ten kodeks dotarł do Krakowa, jego obecność właśnie tutaj nie budzi zdziwienia wobec znanej przyjaźni i współpracy w dziedzinie matematyki i astromonii, łączącej Regiomontana z krakowskim astronomem Marcinem Bylicą z Olkusza i wobec znanej troski Marcina Bylicy o rozwój „zaplecza bibliotecznego" krakowskiego wydziału *artium*. Do dziś zachowały się w Bibliotece Jagiellońskiej darowane uniwersytetowi przez Bylicę, przesyłane do Krakowa „na bieżąco" dzieła Regiomontana, tak jak kolejno powstawały[20], a wreszcie przekazana testamentem własna biblioteka oraz kolekcja instrumentów astronomicznych[21]. Zarówno taka droga podstawowego dla obecnych badań kodeksu BJ 558 do Krakowa, jak i fakt istniejących w nim glos Regiomontana nie były dotąd brane pod uwagę w polskich opracowaniach[22]. Jest to zapewne skutek niedopatrzenia. Z całą pewnością jednak, nie należy dłużej przemilczać faktu posiadania w Krakowie tak cennego źródła, także w sensie bibliofilskim. Porównanie marginaliów z BJ 558, przypisywanych przez E. Zinnera Regiomontanowi, z łacińskimi autografami Regiomontana z lat sześćdziesiątych XV wieku pozwala mi stwierdzić iż nie ma powodu do kwestionowania atrybucji dokonanej przez E. Zinnera[23].

Następny przechowany w Krakowie egzemplarz *Algebry* (ten skopiowany niezależnie od całości *Flores*, chociaż w kontekście kilku matematycznych fragmentów stamtąd pochodzących), istnieje w rękopisie BJ 601[24]. Z kodeksem związane są nazwiska dwu krakowskich wykładowców: Marcina Biema z Olkusza, i Mikołaja Młodszego z Wieliczki zwanego Mleczko. Od Marcina Biema pochodzą tytuły niektórych dzieł, zachowanych w kodeksie, nadpisane na górnych marginesach oraz glossy. Tak też jest w przypadku dzieła Bianchiniego, zatytułowanego przez Marcina *Arismetrica algebre*[25]. Mikołaj Mleczko z Wieliczki natomiast, poza notatkami marginalnymi, podpisał się na f.181v[26]. Analiza kodeksu, w tym filigranów świadczy, iż powstał on po roku 1474, zatem w przeciwieństwie do datowanego na przełom lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych kodeksu BJ 558, kodeks BJ 601 powstał już po śmierci Bianchiniego.

2. PRZEGLĄD TREŚCI *ALGEBRY* BIANCHINIEGO

a. Zagadnienia wstępne: terminologia

Algebra Bianchiniego zaczyna się w sposób „klasyczny", co tutaj oznacza: sięgający al-Chorezmiego (wiek IX) i, począwszy od łacińskich tłumaczeń al-Chorezmiego w XII wieku, a także dzieła Leonarda Fibonacciego w wieku XIII, reprezentowany w całej tradycji europejskiej. Mianowicie, podobnie jak u tych wielkich poprzedników, wykład rozpoczyna się od wprowadzenia terminów: *res*, *census*, *cubus*, *census de censu* – to znaczy niewiadoma w potędze pierwszej, niewiadoma podniesiona do kwadratu, do sześcianu i do potęgi czwartej. Sam Bianchini posługuje się w ciągu wykładu językiem opisowym i nie wprowadza oznaczeń symbolicznych. Jest to jego następne uzależnienie od tradycji średniowiecznej. Natomiast, jak zobaczymy niżej, jeden ze współczesnych mu użytkowników dzieła, wprowadził takie oznaczenia w komentarzu marginalnym. W poszukiwaniach zależności Bianchiniego od wcześniejszej tradycji z pewnością należy zwrócić uwagę na treść kryjącą się za terminologią, użytą przez niego już we wstępnej części, z której wynika traktowanie liczb jako odcinków i konsekwentnie ich kwadratu jako pola. Jest to tradycja „algebry matematycznej", sięgająca Euklidesa, w której dowodzenie działań arytmetycznych, zostaje przeprowadzone na odcinkach i płaszczyznach[27]. Stąd Bianchini określa termin, *res* jako linię prostą ale także jako pierwiastek (bok kwadratu), *census* natomiast oznacza kwadrat liczby, powierzchnię kwadratową, a *cubus* bryłę (bez sprecyzowania, że chodzi tu o sześcian). Ponieważ zabrakło tworu fizycznego dla oznaczenia potęgi czwartej, Bianchini poprzestaje na stwierdzeniu: *census de censu* jest kwadratem podniesionym to potęgi drugiej. I kończy: a wszystko to bierze początek od pierwiastka, to znaczy *res*[28].

W historii algebry do XVI wieku rzadkim zjawiskiem było traktowanie tej nauki arytmetycznie. Uczynił to Diofant w III wieku i miało to później pewien wpływ na matematykę krajów islamu. W tejże tradycji mieszczą się niektóre z propozycji rozwiązań zawarte w *De numeris datis* Jordana Nemorariusa, XIII wiek, oraz w Jana z Murs *Quadripartitum numerorum*, XIV wiek. W XV wieku, jak to wydają się potwierdzać ostatnie badania, powrócono do Euklidesa i tradycji geometrycznej w algebrze. W większej jeszcze mierze niż Bianchiniego wydaje się to dotyczyć Regiomontana, mimo iż ten ostatni z entuzjazmem wypowiadał się o dorobku Diofanta, na nowo wówczas odkrytym dla myśli Zachodu[29].

b. Podstawowe działania na wyrażeniach algebraicznych

Jak wspomniano Bianchini poprzedził algebrę wykładem arytmetyki – księga pierwsza *Flores Almagesti*, w którym omówił cztery podstawowe działania oraz potęgowanie i pierwiastkowanie. W tymże wykładzie podał reguły działań na liczbach ujemnych (mówi na przykład o „dodawaniu odejmującym")[30], oraz potraktował arytmetycznie liczby „absurdalne" (czyli „głuche" – *quantitates surdae*), to znaczy niewymierne i uczył obliczania ich wartości przybliżonej.

Po takim przygotowaniu wykład algebry może rozpocząć się definicjami działań na wyrażeniach algebraicznych. Chodzi tu o proste działania na wielomianach (przy czym, w przypadku dzielenia Bianchini zwraca uwagę na możliwość znajdywania się wyrażeń algebraicznych w mianowniku i powtarza wyrażoną już przedtem regułę dzielenia ułamka przez ułamek poprzez mnożenie dzielnej przez odwrotność dzielnika). Oto podane we współczesnym nam zapisie przykłady, na których Bianchini objaśnia działania na wielomianach – mnożenie, dzielenie oraz redukowanie wyrażeń podobnych:

$$(4+2x)(9+3x); \quad (5+3x)(8-2x^2); \quad (6-3x)(4-8x);$$

$$(4-5x+2x^2)(7+5x^2); \quad (8+7x):3/2x; \quad 8x^2:4x.$$

Bianchini podaje kolejność wykonywania działań oraz wskazuje na sposoby dokonywania uproszczeń, a omawiając mnożenie posługuje się wykreślonym na marginesie tekstu znanym powszechnie schematem mnożenia „na krzyż":

4 plus *2res*

9 plus *3res*

W rękopisie BJ 601, przy objaśnianiu przez kopistę tego schematu, na prawym marginesie tekstu, użyte są oznaczenia symboliczne: zero przekreślone pionową kreską, nad którym kopista napisał *caracter numeri*, i słowo *res* zastąpione literą r zakończoną pętlą. Jest to, pośród siedmiu kopii *Algebry*, jedyna, w której posłużono się symbolami.

c. Reguły algebry dla równań prostych (*simplicia*)

Od al-Chorezmiego pochodzi wyróżnienie sześciu typów kanonicznych równań algebraicznych, trzech prostych i trzech złożonych. Proste przedstawiają się następująco:

$$ax^2=bx; \quad ax^2=c; \quad bx=c$$

w łacińskim zapisie słownym Bianchiniego: *census aequantur radicibus*; *census aequantur numero*; *radices aequantur numero.*

Wszystkie problemy arytmetyczne rozwiązywane algebraicznie miały być sprowadzone uprzednio do jednej z postaci kanonicznych, w których $a=1$; $b, c>0$. Postać kanoniczną otrzymywano dzięki przekształceniom tożsamościowym, w tym przez zastosowanie reguł: *al-dżabr* – przenoszenia ze zmienionym znakiem na drugą stronę równania i *al-muquabala* – redukowania wyrazów podobnych.

W dołączonych do wykładu algebry dziesięciu zadaniach z przykładami równań prostych[31] Bianchini podaje sposoby ich rozwiązywania. Rozwiązania te są ilustracją postępowania udowodnionego geometrycznie w rozdziale zatytułowanym *Regulae conclusionum ad practicam algebrae im simplicibus*. Każde z równań prostych jest wariantem w ramach trzech grup wyróżnionych przez al-Chorezmiego[32].

d. Reguły algebry dla równań złożonych (*composita*)

Ten dział traktatu Bianchiniego, zatytułowany *Regulae conclusionum algebrae in compositis cum demonstrationibus in superficie plana*, jest trzonem wykładu algebry. Autor podaje w nim, zgodnie z zapowiedzią, reguły rozwiązań wraz z ich dowodami geometrycznymi. W podtytule jest dodane, że mowa tu będzie o regułach podstawowych (*regulae fundamentales*), w przeciwieństwie do umieszczonych dalej reguł określonych jako „przylegające" (*adhaerentes*) do reguł podstawowych. Według al-Chorezmiego postaci kanoniczne równań kwadratowych, określonych jako *composita* przedstawiają się następująco:

$$(IV)\ ax^2+bx=c; \quad (V)\ ax^2+c=bx; \quad (VI)\ bx+c=ax^2.$$

Bianchini zachowuje w wykładzie tę kolejność i posługuje się następującymi przykładami liczbowymi:

$$(IV)\ x^2+16x=36; \quad (V)\ x^2+24=14x; \quad (VI)\ 8x+20=x^2.$$

Chodzi przy tym bardziej o zilustrowanie i udowodnienie geometryczne reguł, niż o znalezienie wartości liczbowych pierwiastków – chociaż dla każdego z równań zostaje podane rozwiązanie liczbowe.

Równania klasy (IV) i (VI) mają zawsze jeden i tylko jeden pierwiastek dodatni (pierwiastek ujemny, nie jest brany przez Bianchiniego pod uwagę, mimo iż jak była o tym mowa, w pozostałych działaniach posługuje się on liczbami ujemnymi)[33].

Dla równań klasy (V) Bianchini podaje wszystkie trzy możliwości, a mianowicie: brak rozwiązania [w liczbach rzeczywistych], rozwiązanie gdy istnieje tylko jeden pierwiastek [rzeczywisty, podwójny], oraz gdy istnieją dwa pierwiastki dodatnie[34].

Wspomniane wyżej *regulae adhaerentes* są próbą, nieudaną, chociaż pojawiającą się w dziełach abacystów, rozszerzenia reguł rozwiązywania równań kwadratowych na równania trzeciego stopnia[36]. Ponadto Bianchini rozwiązuje tu równania dające się sprowadzić do równań kwadratowych: $ax^3+bx^2=cx$ oraz $ax^4+bx^3=cx^2$.

f. Zastosowanie praktyczne algebry: zadania

Spośród siedmiu odpisów *Algebry* dwa, w tym odpis zachowany w BJ 601, kończą się zestawem zadań po dziesięć dla *simplicia* i *composita* (por. przypis 31). Zadania na zastosowanie równań złożonych dotyczą głównie problemów rodem ze *scuole d'abaco* (wyjątek stanowią poszukiwania liczb pozostających w określonej proporcji do siebie, przy czym nie jest zasygnalizowane zastosowanie praktyczne otrzymanego wyniku). Bianchini demonstruje rozwiązanie każdego z równań. Oto przykładowo zadanie nr. 2 (oznaczenia symboliczne wprowadzone w polskim tłumaczeniu nie istnieją w oryginale).

„Pewien kupiec zakupił pewien towar za pewną cenę. Później towar sprzedał i zyskał na tym 20 dukatów. Zainwestował je następnie w inny towar, który także sprzedał z zyskiem w takiej proporcji, w jakiej pozostawał zysk z drugiego kapitału w stosunku do pierwszego. I spostrzegł, że w sumie posiada 125 dukatów. Poszukuję wielkości pierwszego kapitału.

[Rozwiązanie:] Wyrażam kapitał przez jeden x. Przy jego pomocy zyskał za pierwszym razem 20 dukatów, miał więc x plus 20 dukatów, które znów zainwestował i zyskał według tej samej proporcji [co za pierwszym razem].

Jeśli za pierwszym razem z x otrzymał x+20, należy więc to pomnożyć przez siebie: $(x+20)(x+20)$ iloczyn wyniesie $x^2+40x+400$, co należy podzielić przez x, i to powinno się równać 125.

Mnożę więc, zgodnie z drugą [regułą] tego [rozdziału] 125 przez x i otrzymuję 125x równe $x^2+40x+400$. Odejmij więc od obu stron 40x i pozostanie:

$$x^2+400=85x$$

Zgodnie z drugą regułą tego [rozdziału, tzn. dotyczącą przypadku V], przepołowię [współczynnik] x, czego połowa jest 42 1/2, co podniesione do kwadratu da iloczyn 1806 1/4, czego pierwiastek wynosi 37 1/2.

Dwojako mogę odpowiedzieć, ponieważ mogę powiedzieć: x równa się [ów] pierwiastek 37 1/2 odjęty od połowy współczynnika x który jest 42 1/2. Taki był pierwszy kapitał, to znaczy 5 dukatów. [A także druga możliwość] pierwiastek [37 1/2] dodany do połowy itd. [37 1/2 + 42 1/2] będzie owym pierwszym kapitałem, to znaczy [otrzymam] 60 dukatów.

To samo okaże się w ostatecznej konkluzji, to znaczy w rezultacie otrzyma się 125 dukatów między zyskiem a kapitałem.

I to jest właśnie to co w związku z tym udowodniłem."

3. CZY RĘKOPISY *ALGEBRY* BIANCHINIEGO ŚWIADCZĄ O NAUCZANIU UNIWERSYTECKIM TEGO PRZEDMIOTU W XV WIEKU?

Istnieje dotąd nie rozwiązana kwestia nauczania uniwersyteckiego algebry w XV wieku. Brane były pod uwagę w najnowszych badaniach uniwersytety środkowoeuropejskie: Lipsk, Wiedeń, Erfurt[36]. Wcześniej tymczasem L.A. Birkenmajer postawił pytanie o algebrę w Krakowie, sygnalizując rękopisy matematyczne, które pojawiły się w uniwersytecie krakowskim z końcem XV wieku w związku z zapisem testamentowym Marcina Bylicy z Olkusza[37]. Pytanie to, postawione sto lat temu, nadal sytuuje się w kontekście utrzymujących się domniemań dotyczących nauczania matematyki w uniwersytetach europejskich XV wieku.

Znane dotychczas egzemplarze *Algebry* Bianchiniego, które, jak wspomnieliśmy wyżej, wszystkie znajdują się w kodeksach pochodzących z Włoch, zostały skopiowane w trzydziestoleciu zawartym między rokiem *ca.* 1460 a 1490[38]. Nie wszystkie one jednak związane były ze środowiskami uniwersyteckimi. Wydaje się, że poza dwoma kodeksami krakowskimi ze środowiskiem uniwersyteckim mógł być związany także kodeks z biblioteki uniwersyteckiej w Bolonii, sygnowany 19(293), oraz kodeks zachowany w Bibliotece Palatina Augusta w Perugii, sygn. 1004. Brak natomiast śladów wskazujących na związki z nauczaniem uniwersyteckim rękopisu watykańskiego, Vat Lat 2228. najpiękniejszego z kodeksów, iluminowanego i starannie skopiowanego, wydaje się dla celów głównie bibliofilskich. Kopista podpisał się na końcu: Johannes Carpensis civis Ferrarie, stawiając datę 4 XII 1470. Podobnie nie ma śladu by służyła w nauczaniu uniwersyteckim *Algebra* paryska, z Bibliothèque Nationale, sygn. ms lat 10253, która została skopiowana w Neapolu w roku 1481 przez bibliofila i wydawcę Arnolda z Brukseli, zainteresowanego kolekcjonowaniem we Włoszech dzieł, głównie naukowych, z przeznaczeniem bądź do jego prywatnej kolekcji bądź dla celów wydawniczych. W tej samej linii sytuuje się *Algebra* watykańska z kolekcji Królowej Krystyny, sygnatura Vat. Reg. Lat. 1904, również nie nosząca śladów glos czy not proweniencyjnych, które wskazywałyby na jej funkcjonowanie w nauczaniu. Ponadto, ten ostatni kodeks, wprawdzie został napisany staranną łaciną, ale posiada wiele istotnych opuszczeń, niejednokrotnie uniemożliwiających zrozumienie wykładu, pozostawionych bez korekty.

ZAKOŃCZENIE

Rękopisy BJ 558 i BJ 601 sygnalizują, że z końcem XV wieku najpóźniej na przełomie XV i XVI stulecia, środowisko uczonych Uniwersytetu Krakowskiego (być może jako jedyne środowisko uniwersyteckie w Europie) dysponowało co najmniej dwoma odpisami *Algebry* Bianchiniego. Już począwszy od lat pięćdziesiątych XV wieku scholarzy krakowscy kopiowali dzieła Bianchiniego, można powiedzieć „na pniu". Na przykład *Tablice planetarne* Bianchiniego z roku 1452 w roku 1453 przepisał w Perugii Jan Zmora z Leśnicy[39]. Podobna sytuacja trwała w ciągu całego stulecia[40]. W tym kontekście istnienie w Krakowie wcześniejszych odpisów *Flores* niż te, które rozproszone po Europie zostały zachowane do naszych dni także w Krakowie, nie byłoby niczym dziwnym. Ponadto wydaje się nieprawdopodobne, by nie znał *Flores* już w latach sześćdziesiątych XV wieku Marcin Bylica z Olkusza. Wykładał on w roku 1462 astronomię na pozostającym w kontaktach z Ferrarą uniwersytecie Bolońskim. Ponadto, w tym samym okresie współpracował z Regiomontanem nad wyliczeniem tablic astronomicznych, znanych jako *Tabulae directionum*, które pozostawały w znacznej zależności od podobnego zespołu tablic astronomicznych, wyliczonych około dwadzieścia lat wcześniej przez Bianchiniego. Trudno tu także wykluczać możliwość, iż egzemplarz *Flores* z Biblioteki Jagiellońskiej, adnotowany przez Regiomontana, był własnością Marcina Bylicy już w okresie jego pracy ze studentami w Bolonii.

W jakim stosunku do nauczania w Krakowie, czy do umiejętności matematycznych krakowskich scholarów w XV wieku, pozostaje przedstawiony tu traktat Bianchiniego? Wydaje się, że na to pytanie jeszcze nie sposób odpowiedzieć w sposób kategoryczny. Przede wszystkim należałoby przebadać teksty wykładów matematyki krakowskich mistrzów, zachowane w Krakowie, ale także w Wiedniu, Lipsku, Mediolanie, Paryżu, by zweryfikować do jakiego stopnia uwzględniane w nich były treści wychodzące poza trzynasto- i czternastowieczne *algorismi*. Dotychczas badania takie objęły tylko matematyczne traktaty Marcina Króla z Żurawicy, (połowa lat czterdziestych XV wieku)[41]. Nie zajęto się natomiast treścią matematyczną w jego dziele astronomicznym, *Summa super tabulas*[42]. Pozostaje ponadto do zbadania treść dzieł matematycznych astronomów końca XV wieku, przede wszystkim Wojciecha z Brudzewa i Jana z Głogowa. Ten ostatni wykładał matematykę w Krakowie i Wiedniu. Ponadto z kilkudziesięciu znajdujących się w krakowskich rękopisach traktatów, fragmentów i not matematycznych z drugiej połowy XV wieku, które zarejestrowałam[43], tylko kilka było dotąd wzmiankowanych w opracowaniach.

Jakkolwiek *Flores Almagesti* powstawały w ciagu około dwudziestu lat, to musiały być gotowe, w części poświęconej arytmetyce, algebrze i trygonometrii, około roku 1440, bowiem do zawartych tam treści odwołuje się Bianchini w pierwszej wersji swoich *Tabulae primi mobilis*, zachowanej we Florencji (Ashb. 216), które są być może jeszcze wcześniejsze niż tablice planetarne dedykowane Leonello d'Este w roku 1442. Na dobrą zresztą sprawę Bianchini musiał być biegły w algebrze, w szerokim zakresie wymaganym przez *scuole d'abaco*, jeszcze przed rokiem 1427 – data powołania go przez markiza Leonella d'Este na stanowisko związane z prowadzeniem finansów dworu w Ferrarze. Trudno natomiast ustalić, dysponując dotychczas zgromadzonymi danymi, od którego dziesięciolecia XV wieku treści matematyczne zawarte we *Flores* były znane mistrzom krakowskim.

Przypisy

* Składam podziękowanie The Harvard University Center for the Italian Renaissance Studies. Villa I Tatti, Florencja, znaczna bowiem część źródeł do tej publikacji została zgromadzona podczas odbytego tam rocznego stażu. Ponadto, w późniejszej fazie pracy, Centro Studi e Incontri Europei w Rzymie umożliwiło mi zweryfikowanie przygotowanej edycji *Algebry* Bianchiniego w oparciu o kodeksy zachowane w Rzymie, Perugii i Bolonii, stąd moja wdzięczność dla Pani Wandy Gawrońskiej. Wreszcie dziękuję The Sidney M. Edelstein Center for the History and Philosophy of Science, Technology and Medicine przy Uniwersytecie Hebrajskim w Jerozolimie, którego znakomita biblioteka pozwoliła mi skompletować publikacje dotyczące przedmiotu.

Treść *Algebry* Bianchiniego przedstawiłam w listopadzie 1992 roku na seminarium prowadzonym przez Dr Annę Slomczyńską w Zakładzie Badań Kopernikańskich Instytutu Historii Nauki. Ukazałam wówczas *Algebrę* jako możliwe wspólne źródło dla traktatów algebraicznych Pierro della Francesca i Luca Pacioli. Prof. Jerzemu Dobrzyckiemu wdzięczna jestem za przeczytanie maszynopisu i propozycje ulepszenia tekstu. Za wszystko jednak, co zostałoby uznane jako niedociągnięcie, ja sama oczywiście jestem odpowiedzialna.

1 Jak o tym świadczą badania podjęte we Włoszech przez zespół historyków matematyki średniowiecznej przy Uniwersytecie w Sienie, por. R. Franci and L. Toti Rigatelli: *Fourteenth-century Italian algebra*. W: *Mathematics from Manuscripts to Print 1300–1600*. Wyd. C. Hay Oxford 1988 s. 11–29, szczególnie s. 1, 19–25.

2 Równania kwadratowe zostały zastosowane przez niego zarówno przy rozwiązywaniu problemów bankowo-handlowych jak do wyliczania proporcji metali w stopach i do rozwiązywania figur i brył regularnych. Por. Piero della Francesca: *Trattato d'abaco.* Wydał i opatrzył wstępem G. Arrighi. Pisa, Domus Galilaeana 1970. Por. także M. Daly Davis: *Piero della Francesca's Mathematical Treatises. „The Trattato d'abaco" and „Libellus de quinque corporibus regularibus"*. Ravenna [1977]. S.A. Jaywardene: *The „Trattato d'abaco" of Piero della Francesca*. W: *Cultural Aspects of the Italian Renaissance. Essays in Honour of Paul O. Kristeller*. Wyd. Cecil H. Clough, Manchester University Press 1976 s. 229–243.

Termin „abacus" jest wieloznaczny. W starożytności oznaczał technikę rachowania, później także obliczanie przy pomocy liczydeł. Natomiast renesansowe „scuole d'abaco" wprowadziły ten termin na oznaczenie algebry i stosowanych przez nią „regole della cosa". Od „regole della cosa" pochodzi nazwa pierwszych algebraików – „kosiści". W literaturze anglojęzycznej niekiedy termin *abacus* pozostawia się dla określenia techniki rachowania, natomiast dla algebry nauczanej w celach praktycznych w XIV i XV wiecznych Włoszech używa się terminu *abbacus.*

[3] Oto jego własne stwierdzenie w liście z 5 lutego 1464 roku adresowanym do Regiomontana: Quantum ad regulas algebrae, de quibus comprehendo, vos doctissimum esse, ego quidem in iuventute, dum operationem mercantium operarem, aliquantulum in hoc me delectavi [...] Wyd. M. Curtze, por. przypis 12, s. 238. Zachował się zapis o korespondencji z 1396 roku, w której Masolo z Perugii, nauczyciel w szkole abaku w Wenecji, objaśniał sposoby rozwiązywania niektórych typów równań trzeciego stopnia. Por. R. Franci, L. Toti Rigatelli, dz.cyt. s. 22. Pozostaje natomiast aktualne pytanie, w myśl pracy W. Kaunznera, gdzie nauczył się algebry Regiomontan i współcześni mu matematycy niemieccy: Offen bleibt die Frage, wo Johannes Regiomontanus, Aquinas Dacus und Fridericus Gerhart Algebra gelernt hatten. Por. W. Kaunzner: *Ueber das eindringen algebraischer Kenntnisse nach Deutschland.* W: *Rechenpfennige. Kurt Vogel zum 80. Geburstag* [...] *gewidmet von Mitarbeitern und Schulern. Aufsätze zur Wissenschaftsgeschichte.* Forschungsinstituts des Deutschen Museums in Muenchen. Muenchen 1968 s. 115. Wpływy włoskie na traktaty algebraiczne napisane w języku niemieckim z końcem XV wieku, omawiane są tamże na s. 99nn.

[4] W. van Egmond: *Practical Mathematics in the Italian Renaissance: A Catalog of Italian Abbacus Manuscripts and Printed Books to 1600.* Supplemento agli Annali dell'Istituto di Storia delle Scienze di Firenze. Firenze 1980 fasc. 1.

[5] R. Franci, L. Toti Rigatelli: *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento.* Urbino, Quattro venti 1982 oraz L. Toti Rigatelli: *Matematici fiorentini del tre-quattrocento.* W: *Symposia Mathematica,* T. XXVII, 1968 s. 3–67, Wyd. Istituto Nazionale di Alta Matematica.

[6] Por. na przykład S.A. Jaywardene: *The Influence of Practical Arithmetics on the Algebra of Rafael Bombelli.* „Isis" T. 64, 1973 s. 510–523.

[7] J. Sesiano: *On an algorithm for the approximation of surds from a Provencal treatise.* W: *Mathematics from Manuscript to Print 1300–1600.* Wyd. C. Hay. Oxford 1988 Clarendon Press s. 30–55 oraz tenże, *Une arithmètique médièvale en langue provençale* „Centaurus" T. 27, 1984 s. 26–75.

[8] Najnowsze publikacje na powyższy temat: W. Van Egmond: *How algebra came to France.* W: *Mathematics from Manuscript to Print,* dz.cyt. s. 127–144; G. Flegg: *Nicolas Chuquet – an introduction.* Tamże s. 59–72 oraz P. Benoit: *The commercial arithmetic of Nicolas Chuquet.* Tamże s. 96–116.

[9] Stało się to bądź w wyniku zwrócenia się uczonych europejskich bezpośrednio do tradycji starożytnej reprezentowanej przez dzieła Euklidesa, Diofanta i Pappusa, bądź za pośrednictwem matematyki arabskiej. Algebra krajów islamu począwszy od VIII wieku systematyzowała i rozwijała grecką spuściznę wzbogacając ją elementami matematyki Indii i Chin. Około połowy XIII wieku w rozwoju myśli europejskiej już współistnieją oba wspomniane nurty recepcji. Chronologicznie pierwsze było przyswajanie matematyce Europy zachodniej osiągnięć algebry Arabów, wraz z bogactwem wcielonych w nią tradycji, w tym z hinduskim dziesiętnym systemem pozycyjnym. Recepcja ta dokonywała się w trzech fazach: tłumaczenia, kompilacje, synteza. Cały proces zaś dopełnił się w ciągu kilku dziesięcioleci.

W roku 1145 Robert z Chester, Anglik działający w Hiszpanii, tłumaczy algebrę al-Chorezmiego (Al-Khwarizmi, Alcharizmi), *Al-kitab al-muchtasar fi hisab al-dżabr wa'l-mukabala,* dzieło z ok. 850 roku. Ponownego przekładu algebry dokonuje Gerard z Kremony. Natomiast pierwszym autorem „przeróbki" algebry al-Chorezmiego jest Jan z Sewilli w drugiej połowie XII wieku. W *Liber algorismi de practica arithmeticae* zajmuje się on, poza podstawami arytmetyki, rozwiązywaniem trzech typów równań kwadratowych (spośród sześciu typów wyróżnionych przez al-Chorezmiego). W pierwszych dziesięcioleciach XIII wieku powstaje, w oparciu o dorobek al-Chorezmiego, traktat algebraiczny Leonarda Fibonacciego z Pizy (ok. 1379 – po 1240), zatytułowany *Liber abaci*. W zasygnalizowanym nurcie rozwoju algebry europejskiej, który, wydaje się, budował bezpośrednio na osiągnięciach greckiej starożytności z pominięciem dorobku matematyków świata islamu, sytuuje się dzieło Jordana Nemorariusa (tworzył 1230–1260), autora wielu pism z zakresu matematyki i mechaniki, w tym traktatu algebraicznego *De numeris datis*. Według B.B. Hughes, wydawcy tego dzieła, jest ono pierwszym znaczącym wykładem algebry stworzonym w Europie po *Arytmetyce* Diofanta (III wiek). T e n ż e : *Jordanus de Nemore, De numeris datis*. Berkeley 1981. Arabowie natomiast (al-Karadżi i al-Samwal) konstruowali autonomiczną algebrę w XI wieku, por. R. R a s h e d : *L'Arithmétisation de l'algèbre au 11ème siècle* W: *Proceedings of XIII*[th] *International Congress of the History of Sciences*. T. III-IV Moskwa 1974 s. 63–69.

[10] Analiza innych dzieł Bianchiniego, poza jego *Flores*, pozwoliła mi już ukazać znaczenie Bianchiniego dla matematyki i astronomii XV wieku. I tak zespół jego tablic astronomicznych, poświęconych tzw. „ósmej sferze", czyli zespół tablic gwiazdowych, który, jak wynikło z analizy porównawczej, służył następnie Regiomontanowi przy opracowaniu *Tabulae directionum profectionumque*, został zaopatrzony przez Bianchiniego w pomocnicze tablice funkcji trygonometrycznych. Są to, datowane na połowę XV wieku, pierwsze w Europie dziesiętne tablice funkcji sinus i cosecans. Por. G. R o s i ń s k a : *Tables trigonometriques de Giovanni Bianchini*. „Historia Mathematica" T. 8, 1981 s. 46–55. Tablice planetarne Bianchiniego (tablice ruchu planet w szerokości) znane były Kopernikowi i zostały przezeń skopiowane w czasie studiów krakowskich, t a ż, *Identyfikacja szkolnych tablic astronomicznych Kopernika*. „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" T. XXIX, 1984. s. 637–644; t a ż : *Giovanni Bianchini – matematyk i astronom XV wieku*, „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" T. XXVI, 1981 s. 565–577.

[11] G. F e d e r i c i V e s c o v i n i : *Bianchini Giovanni (Iohannes Bianchinus. Iohannes de Bianchinis)* W: *Dizionario Biografico degli Italiani*. T. 10, 1968 s. 194–196.

[12] O tym, że tak zatytułowane dzieło wyszło spod pióra Bianchiniego wiedzieli zarówno historycy i bibliografowie włoscy XIX wieku, Giammaria Mazzuchelli, Pietro Riccardi, Girolamo Tiraboschi, jak historycy nauki z kręgu niemieckiego z przełomu XIX i XX wieku, Moritz Kantor i Maximilian Curtze. W wielu bowiem źródłach, w tym w pismach astronomicznych samego Bianchiniego oraz w jego korespondencji z Regiomontanem, trwającej w latach 1463–1464, zawierają się liczne odesłania do *Flores*. Por. M. C u r t z e : *Der Briefwechsel Regiomontans mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder*. W: *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. 1 Theil Leipzig 1902 s. 192–291. Pierwsza edycja korespondencji ukazała się w osiemnastym wieku, Th. M u r r : *Memorabilia Bibliothecarum Publicarum Norimbergensium et Universitatis Altdorfinae*. Pars 1: *Epistolae autographae Johannis Bianchini...*. Norimbergae 1786.

[13] L.A. B i r k e n m a j e r : *Flores Almagesti. Ein angeblich verloren gegangener Traktat Giovanni Bianchini's, Mathematikers und Astronomen von Ferrara aus dem XV Jahrhundert*. Extrait du „Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie" Cracovie 1911. Dzieło Bianchiniego wypełnia kodeks, zajmując folia 1r-116r. Informacja Birkenmajera o treści *Flores Almagesti* zatrzymuje się na f.49v tego kodeksu.

[14] Oto informacja L.A. Birkenmajera dotycząca „Traktatu drugiego" (*Algebra*) *Flores Almagesti* (por. dz.cyt. s. 275–276 i tamże nota 1): „fol. 12 *recto*: Tractatus secundus Johannis de Bianchinis de demonstratinibus cum Regulis aggregatis. De practica regularum Argebre (sic!) capitulum primum, In tota practica regularum argebre (sic!) quatuor demonstrationibus seu numerorum vocabulis communiter utuntur, scil. Rei, Censui, Cubui et Censui de censu. Res enim idem sonat quantum radix. Census autem quadratum sonat... Es folgt hier die vollstandige Lehre von der Transformation und Auflosung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades; fol. 12 *verso*: De practica multiplicandi opportuna (sic!) in regulis argebre (sic!), capitulum 2-um; fol. 13 *recto*: De practica dividendi opportuna in regulis argebre (sic!), capit. 3-tium; fol. 13 *verso* – 14 *recto*: Tractatus secundus incipit. Regule conclusionum

ad practicam argebre (sic!) in simplicibus liber secundus... ...Nunc volo te cautum reddere et revelare secretum, quod per alios non revelitur (sic!) ut propter defectum doctrine decipiaris...". L.A. Birkenmajer sygnalizuje w przypisie, iż to ostatnie zdanie jest skomentowane na marginesie interesującą notą: preter Mahumetum de algebra et almuchabala nec non Johannem de Muris in Quadripartito numerorum et ceteros moderniores. E. Zinner w publikacji z 1938 roku zidentyfikował autora tej noty, Jana Regiomontana, por. przypis 19.

15 W latach pięćdziesiątych naszego stulecia Lynn Thorndike, prowadzący rozległe badania rękopiśmienne w bibliotekach Europy, odkrył pięć kopii *Flores* w bibliotekach Rzymu: Biblioteca Vaticana ms Vat. Lat. 2228 i ms Vat. Reg. Lat. 1904, Bolonii: Biblioteca Universitaria ms nr 19(293), Perugii: Biblioteca Palatina ms 1004, i Paryża: Bibliotheque Nationale ms lat 10253. Por. L. Thorndike: *Giovanni Bianchini in Paris Manuscripts.* „Scripta Mathematica" T. 16, 1950 s. 5–12 i 176–180; tenże, *Giovanni Bianchini in Italian Manuscripts.* „Scripta Mathematica" T. 19, 1953 s. 5–17; por. także opis kodeksu paryskiego E. Poulle: *La bibliothèque scientifique d'un imprimeur humaniste au XVe sièle. Catalogue des manuscrits d'Arnauld de Bruxelles à la Bibliotheque Nationale de Paris* Seria Travaux d'Humanisme et Renaissance. T. LVII Génève 1963 s. 38–44.

16 Najnowsza publikacja dotycząca twórczości Bianchiniego, A. Gel: *Trigonometrisch-astronomisches Rechnen kurz vor Copernicus. Der Briefwechsel Regiomontanus-Bianchini.* Stuttgart 1989. Boethius, Bd. XXI, sygnalizuje sposób zastosowany przez Bianchiniego w celu uniknięcia równań trzeciego stopnia (por. s. 267). A. Gerl nie nawiązuje przy tym do Bianchiniego traktatu o algebrze, chociaż sięga do innych traktatów, współtworzących *Flores.*

17 Rkp. BJ 601, f. 62r-68v, algebra została skopiowana oddzielnie, w kontekście kilku fragmentów arytmetycznych i trygonometrycznych, także pochodzących z *Flores* i znajdujących się na foliach 65r-68r. Por. *Catalogus codicum manuscriptorum medii aevi Latinorum qui in Bibliotheca Jagellonica Cracoviae asservantur.* Vol. IV Wratislaviae 1986 s. 180n.

18 Po raz pierwszy wspomina Bianchini Regiomontanowi o *Flores* w liście wysłanym do niego w dniu 21 listopada 1463 roku, por. M. Curtze, dz.cyt. s. 206; następnie w liście z 5 lutego 1464 roku, tamże s. 241. W odpowiedzi na ten ostatni list, danej jeszcze w lutym 1464, jak wynika z pierwszego zdania odpowiedzi: *Accepi undecima mensis* huius Februari litteras vestras expectatissimas... Regiomontan pisze dalej: *Grandem ingeritis mihi libidinem videndi flores almagesti, quos compilastis, et alia opera vestra*; tamże s. 242 i 259.

19 E. Zinner, *Leben und Wirken des Johannes Mueller aus Koenigsberg, genant Regiomontanus.* Wyd. 1 . Monachium 1938 s. nn.

20 G. Rosińska: *L'audience de Regiomontanus à Cracovie au XVe et au début du XVIe siècle.* Regiomontanus-Studien. Wyd. G. Hamann Wien 1980. Oesterreichiche Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse Sitzungsberichte. Band 364 s. 317–326.

21 L.A. Birkenmajer: *Marcin Bylica z Olkusza oraz narzędzia astronomiczne, które zapisał Uniwersytetowi Jagiellońskiemu w r. 1493* „Rozprawy Akademii Umiejętności. Wydział Matem-przyrod." Seria II vol V Kraków 1893 s. 1–164.

22 Pisząca te słowa, w artykule *Giovanni Bianchini – matematyk i astronom XV wieku* przytacza te noty jako anonimowe. Ostatnia pozycja dotycząca kodeksu, jego opis katalogowy w *Catalogus codicum manuscriptorum medii aevi Latinorum qui in Bibliotheca Jagellonica Cracoviae asservantur.* Vol. III Wratislaviae 1984 s. 384–385, wykonany przez M. Zwiercana, również nie wymienia ręki Regiomontana jako autora glos i nie wymienia w bibliografii wspomnianej publikacji E. Zinnera. Ważne natomiast ustalenie M. Zwiercana, dotyczące papieru oraz oprawy kodeksu, określa Ferrarę jako miejsce, w którym najprawdopodobniej powstał kodeks BJ 558.

23 Por. fotokopia tekstu i obliczeń Regiomontana w odpowiedzi na „problem trzeci" postawiony Regiomontanowi przez Bianchiniego w liście z dnia 21 listopada 1463: *Quero duos numeros proportionales ut 5 ad 8, quorum ad invicem productus equatur aggregationi ipsorum.* Regiomontan przytacza własnoręcznie ten tekst (rkp Stadtbibliothek Nuernberg, Cent 5 app 56^c, f.23r), tamże, również ręką Regiomontana następujący tekst: *Quartum in-*

terrogatum. Divisi 10 in duos quorum maiorem per minorem divisi iterum... Jest to wersja robocza listu wysłanego przez Regiomontana Bianchiniemu najpóźniej na przełomie 1463 i 1464 roku. Odpowiedź Bianchiniego na ten list została wysłana 5 lutego 1464 roku. Dwie karty, 23r i 26r, z rękopisu Cent 5 app 56^c zostały opublikowane w Regiomontanus-Studien, w artykule W. Kaunznera: *Ueber Regiomontanus als Mathematiker*. Tamże s. 125–145 ilustracje nr 5 i 6.

[24] Por. *Catalogus*... dz.cyt. Vol. IV. Wratislaviae 1985 s. 176–192. Fragmentów *Flores*, w tym *Algebry*, dotyczą strony 180–181; tamże dokonano identyfikacji traktatu jako dzieła Bianchiniego. Ustalenie proweniencji włoskiej rękopisu i jego datowanie na lata po 1474 por. s. 190–191. Opis sygnowany *E.J.*.

[25] Marcin Biem z Olkusza został magistrem Uniwersytetu Krakowskiego w roku 1491, a więc na krótko przed rozpoczęciem studiów przez Mikołaja Kopernika. Por. L.A. Birkenmajer: *Martini Biem de Olkusz Poloni Nova Calendarii Romani Reformatio* (Wstęp). Cracoviae 1918. A. Birkenmajer: *Biem Marcin* W: *Polski Słownik Biograficzny*. T. II Kraków 1936 s. 68–69.

[26] Mikołaj Młodszy z Wieliczki, Mleczko, bakałarz Uniwersytetu Krakowskiego w roku 1508 i magister w 1513. Studiował medycynę w Bolonii w latach 1514–1516 i uzyskał tam doktorat 16 VIII 1516 roku. Profesor medycyny w Uniwersytecie Krakowskim od roku 1518. Zmarł w 1559 roku. Por. H. Barycz: *Historia Uniwersytetu Jagiellońskiego w epoce humanizmu*. Kraków 1935 s. 231–232.

[27] I.G. Baszmakowa wiąże powstanie algebry geometrycznej z próbą wyjścia z kryzysu matematyki (V w. przed Chr.) po odkryciu istnienia odcinków niewspółmiernych, a mianowicie widzi tu próbę budowania matematyki „nie na podstawie arytmetyki liczb wymiernych lecz na podstawie geometrii, po zdefiniowaniu, bezpośrednio dla wielkości geometrycznych, wszystkich operacji algebry". Por. *Historia matematyki* Pod. red. A. Juszkiewicza Tom I *Od czasów najdawniejszych do początków czasów nowożytnych*. Tłum. S. Dobrzycki. Warszawa 1975, rozdz. IV; I.G. Baszmakowa: *Grecja starożytna*, s. 86.

[28] Bianchini, *Algebra*. In tota practica regularum algebrae quatuor denominationes seu quatuor vocabula cummuniter utuntur, scilicet res, census, cubus et census de censu. Res enim idem sonat quantum radix, census autem quadratum sonat seu superficiem quadratam, cubus vero corpus solidum. Census de censu est quadratus quadrati; que omnia a radice seu a re oriuntur. Cytowane teksty *Algebry* pochodzą z przygotowanej edycji krytycznej.

[29] G. l'Huiller porównała algebrę Jana z Murs, matematyka i astronoma z XIV wieku, zachowaną w jego *Quadripartitum numerorum*, z notami Regiomontana, które jej towarzyszą (Regiomontan miał zamiar wydać to dzieło). Oto uwagi autorki: „...les notes de Regiomontanus sont teintées d'une forte culture euclidienne [...] Regiomontanus rejette souvent la solution purement algébrique des équations que Jean de Murs tiré du *Liber abaci* de Leonard de Pise. Quand Jean de Murs utilise les méthodes algebriques pures ou teintées de geometrie, aux paragraphs 6, 8, 9, et 11, Regiomontanus préfère des solutions soit entierement géometriques, soit géometriques et arithmetiques à la fois. Elles le mettent beaucoup plus à l'aise que Jean de Murs". G.I. l'Huillier: *Regiomontanus et le Quadripartitum numerorum de Jean de Murs*. „Revue d'Histoire des Sciences" T. XXXIII, 1980 s. 197.

[30] Oto sformułowane przez Bianchiniego „reguły znaków" (cytat z przygotowanej do druku edycji krytycznej, G. Rosińska: *Arytmetyka Bianchiniego*, publikacja przewidziana w serii Studia Copernicana): Quando plus multiplicatur per plus productus erit plus et hoc clarum est. Quando plus multiplicatur per minus aut minus per plus productum erit minus et hoc patet, quia quantum minus augetur aut plus minuetur tantum productum fiet minus. Quando minus multiplicatur per minus productus erit plus, quia quantum minus minuetur tantum plus augetur. Dotychczas przyjmowano, że „reguły znaków" zostały wprowadzone w matematyce europejskiej dopiero w XVI wieku. Por. J. Sesiano: *The appearance of negative solutions in medieval mathematics*. „Archive for the History of Exact Sciences" T. 32, 1985 s. 105–150 oraz literatura tam cytowana.

[31] Zachowane tylko w dwóch spośród siedmiu kodeksów zawierających *Algebrę* Bianchiniego, a mianowicie w BJ 601, f.63v-64r i BNl, f.29r-30v.

[32] Oto one we współczesnej nam notacji: 1. $ax=c$, $x=c/a$,
2. $ax^2=c$, $x=\sqrt{c/a}$. 3. $ax^3=c$, $x=\sqrt[3]{c/a}$. 4. $ax^4=c$, $x=\sqrt[4]{c/a}$.
5. $ax^2=bx$, $x=b/a$. 6. $ax^3=bx$, $x=\sqrt{b/a}$. 7. $ax^4=bx$, $x=\sqrt[3]{b/a}$.
8. $ax^3=bx^2$, $x=b/a$. 9. $ax^4=bx^3$, $x=b/a$. 10. $ax^4=bx^3$, $x=b/a$.

[33] Bianchini dokonuje działań na liczbach ujemnych, ale nie zawsze przyjmuje rozwiązania ujemne. Na temat wprowadzenia rozwiązań ujemnych w matematyce europejskiej por. J. Sesiano, dz.cyt. s. 116–149.

[34] *Nunc volo te cautum reddere et revelare secreta que per alios non revelantur, ne propter defectum doctrinae ab aliis decipiaris. Quare nota bene et memoriae commenda quod quando quadratum medietatis rerum non excederet numerum cum censu datum, positio erit impossibilis, nec super ipsam oportet laborare. Si vero erit aequalis numero dato, tunc medietas rerum absque alia diminutione seu additione valet rem* [$x=b/2$].

Saepenumero etiam contingit quod duplici modo respondere possumus, puta in propositione suprascripta [przypadek V] *Videlicet dato quod unus census et 24 numeri aequantur 14 rebus* [$x^2+24=14x$] *dico quod debemus, ut supra, mediare res et medietatem in se multiplicare et de producto subtrahere numerum; cuius radix addita medietati rerum valet res* [$x=b/2+\sqrt{(b/2)^2-c}$]. *Et hoc quia possum ponere censum maiorem quadrati medietatis radicum [...]*

Dico etiam quod ex industria et subtilitate proponere potes quaestiones terminantes ad istam regulam quod census et numerus aequantur rebus, quibus sola responsio danda erit: aliquando res valet medietatem rerum dempta radice numeri et aliquando res valet medietatem rerum addita radice numeri, solummodo non convertuntur [$x=b/2 \pm \sqrt{(b/a)^2-c}$].

Quando census aequantur rebus et numeris, [przypadek VI] *ut supra, debemus partes reducere an unum censum et mediare res quarum medietatem in se multiplicare et productum addere numero, et radix aggregati addita medietati rerum valet rem* [$x=b/2+\sqrt{(b/2)^2+c}$].

[35] *De regulis adhaerentibus primae regulae de compositis. Capitulum secundum. Quando res aequantur censibus et cubis debemus partes reducere ad unum cubum, id est dividere per cubos, deinde mediare census et medietatem in se multiplicare et productum addere rebus, cuius aggregati radix diminuta medietate census valet rem. Quando census aequantur cubis et censibus de censu debemus partes, ut supra, reducere ad unum censum de censu, deinde mediare cubos et aggregati radix diminuta medietate cuborum valet rem.*

[36] Opracowania dotyczące algebry w Niemczech, jak W. Kaunzner: *Ueber das eindringen algebraischer Kenntnisse* dz.cyt. s. 91–122, oraz opracowania związane z jubileuszem Regiomontana w 1976 roku, por. np. W. Kaunzner: *Ueber Regiomontanus*, dz.cyt., s. 125–145 czy M. Folkerts: *Die mathematischen Studien Regiomontans in seiner Wiener Zeit*. W. j.w. s. 175–209, tylko częściowo dały tu odpowiedź.

[37] L.A. Birkenmajer: *Marcin Bylica z Olkusza*, dz.cyt. s. 57, 144, przyp. 238, 241.

[38] Rękopis BJ 558 znajdował się w rękach Regiomontana począwszy, najpóźniej, od lutego 1464. Kopiowanie kodeksu Vat. Lat. 2228 zostało zakończone w Ferrarze 4 grudnia 1470 roku. Rkp BJ 601 powstał nie wcześniej niż z roku 1474. Rękopis z Paryża, Nat. Lat. 10253 skończył kopiować Arnold z Brukseli w Neapolu w roku 1481, 21 stycznia (pierwsze pięć traktatów *Flores*) oraz (następne trzy traktaty), przed 8 marca 1487. Analiza pisma trzech niedatowanych kodeksów: Bolonia BU 19(293), Perugia B. Palatina nr 1004 i Watykan Vat. Reg. Lat. 1904 wskazuje ostatnie ćwierćwiecze XV wieku jako możliwy czas ich powstania.

[39] Por. opis rkps BJ 558, w *Catalogus...* ut supra, T. III s. 376.

[40] Przytaczam numery odsyłaczy do dzieł Bianchiniego lub ich przeróbek wyodrębnione w repertorium traktatów i tablic astronomicznych znanych w Krakowie w XV wieku, por. G. Rosińska: *Scientific Writings and Astronomical Tables in Cracow. A Census of manuscript Sources (XIVth-XVIth Centuries)*, Wrocław 1984, nr 44, 28, 63, 123, 218, 298, 425, 429, 446, 485, 708, 709, 1128, 1129, 1131–1134, 1220, 1451, 1598, 1659, 1660, 1867, 2136,

2202, 2383. Poza pełnymi traktatami (np. *Canones tabularum* do pełnego zestawu tablic astronomicznych Bianchiniego, od tablic *primum mobile* do tablic planetarnych, tablic zaćmień i pomocniczych tablic matematycznych) zestawione wyżej odsyłacze wskazują na dokonywane w Krakowie ekscerpty z dzieł Bianchiniego, uwagi o nich oraz przeróbki. Więcej na ten temat w cytowanych wyżej publikacjach, por. wyżej, przypis 10.

[41] J. Dianni: *Pierwszy znany traktat rękopiśmienny w literaturze matematycznej w Polsce. Algorismus minutiarum Martini Regis de Premislia.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" T. 12, 1967 s. 269–280.

[42] Zachowana w Bibliotece Jagiellońskiej, rękopis BJ 1927, f.250r-318r oraz w Bodleian Library w Oxfordzie, rękopis Can. misc. 499, f.212r-249r.

[43] G. Rosińska: *Scientific Writtings*, dz.cyt. s. 548.

Grażyna Rosińska

THE *ALGEBRA* OF GIOVANNI BIANCHINI IN THE MILIEU OF THE CRACOW ASTRONOMERS (XVth century)

Giovanni Bianchini's *Algebra* is one of the very few treatises on this subject written in the fifteenth century in Latin, and the unique incorporated into an astronomical work. It forms the „second treatise" of the *Flores Almagesti*, a *summa* of astronomy divided into eight, nine or ten „treatises" following various manuscript traditions. In the *Flores* the *Algebra* is preceded by a treatise on arithmetic and followed by the one on trigonometry. The first three treatises taken together form a mathematical introduction in Bianchini's exposition of astronomy.

Bianchini, (ca 1400 – ca. 1470), according to his own testimony, learned the algebra very early in his life and he did it for two reasons. The first was his job, the second his enthusiasm for mathematical astronomy [see note 3]. He spent almost all his life in business, till 1427 in commerce in Venice, then in Ferrara as an administrator of the estate of the marquess d'Este. While in Ferrara, where he spent some forty years of his life, Bianchini divided his time between his duties at the court and astronomy. He calculated astronomical tables and tables of trigonometric functions [see note 11], wrote the *Canones tabularum* and made astronomical observations with an instrument he invented himself. All this is known through various extant documents, including his correspondence with Regiomontanus in the years 1463–1464 [see note 12].

Bianchini composed the core of the *Flores* over a period of about fifteen years, between 1440 and 1454. After that he continued completing the work, probably till 1460, joining some details and remaking some chapters. Bianchini's way of working on different astronomical treatises simultaneously (e.g. on the *Canones tabulatum eclypsium* and on the *Flores Almagesti*) makes it difficult to establish the exact chronology of his writings. Till now many questions on this subject remain unanswered.

The dating of the mathematical part of the *Flores*, however, particularly of the *Algebra*, is less complicated. Bianchini had all reasons to compose it at the beginning of his work on the *Flores*, which means in the early forties, and it was probably the first time that he explained on paper his mathematical knowledge acquired some twenty years earlier in one of the numerous *scuole d'abaco*.

As for the reception of the *Flores* it seems that it began at about the time Bianchini and Regiomontanus started their correspondence. In the letter of January 12 1463 Bianchini informs Regiomontanus of a copy of the *Flores* circulating in Venice. By the beginning of 1464 Regiomontanus communicates to Bianchini that he is still in possesions of the *Flores*. The copy of the *Flores* annotated by Regiomontanus enriches, from the end of the fifteenth century on, the Library of Cracow University (Biblioteka Jagiellońska, now the ms. 558). Also

about the end of the fifteenth century came to Cracow the fragments of the *Flores* (that include however the complete texte of the *Algebra*). They were annotated by Martin Biem of Olkusz, professor at the time of Copernicus' studies at Cracow University (ms BJ 601).

The extant seven copies of the *Algebra*, the Cracow copies included, were done in Italy, in the period between *ca.* 1460 and *ca.* 1490 [see notes 14–15, 17–19, 36].

*

The *Algebra* of Giovanni Bianchini precedes the *trattati d'abaco* of Benedetto da Firenze (1463) and of Piero della Francesca (1476), both of which, contrary to Bianchini's work, were written in Italian. It also precedes for more than thirty years the Luca Pacioli's treatise on algebra included in his *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalita* (1494). It seems plausible that Bianchini's work, or the work of this sort, was a common source for both, delle Francesca's and Pacioli's treatises on algebra. It seems that in discussions about the dependence of the Pacioli's *Summa* on the della Francesca's *Trattato d'abaco* this possibility has not been taken in consideration till now.

The fact that astronomical problems are absent in the algebraic part of the *Flores* increases the resemblance of Bianchini's *Algebra* to the standard *libri d'abaco*. This resemblance is even more striking in the case of two manuscript copies of the *Algebra* that finish, like all Italian *libri d'abaco*, with a set of problems of commercial calculus [see note 30–33]. As some of the *trattati d'abaco* Bianchini's treatise presents geometrical proofs of the rules of algebra. Even if Bianchini's knowledge of algebra, expressed in the *Flores*, not seems to overpass the level attained by commonly the fifteenth-century teachers of the *scuole d'abaco*, it certainly overpass the competency in mathematics of the university professors of the first half of the fifteenth century.

*

The paper was prapared on the basis of the critical edition of Bianchini's *Algebra* forthcomming in the Studia Copernicana.