Wójcik, Wiesław

Zastosowanie metody dowodów i kontrprzykładów w analizach z zakresu historii filozofii i matematyki

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 40/1, 21-40

1995

Wiesław Wójcik
(Sosnowiec)

ZASTOSOWANIE METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW W ANALIZACH Z ZAKRESU HISTORII I FILOZOFII MATEMATYKI

WPROWADZENIE

Imre Lakatos – jeden z wybitniejszych współczesnych filozofów nauk – budował swoją filozofię w opozycji do tendencji neopozytywistycznych. Tendencje te święciły swój triumf w latach trzydziestych XX wieku oraz w pierwszych latach po drugiej wojnie światowej. Załamanie się neopozytywizmu nastąpiło na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych. Jedną z postaci, która przyczyniła się do przezwyciężenia neopozytywizmu, był na pewno Imre Lakatos. Na początku swojej działalności na polu filozoficznym zajął się Lakatos filozofią matematyki. Później rozpoczął badania w zakresie filozofii nauki rozumianej bardziej ogólnie, a rozważania z zakresu filozofii matematyki pozostawił w dużym stopniu niedokończone i niedopracowane [11], [12].

Jednak pewne odkrycia i spostrzeżenia, mimo swojej niepełności,mają duże znaczenie w przełamaniu stereotypu patrzenia na matematykę, jak na formalny, logiczny układ struktur budowanych na niezbitych podstawach (w dużym stopniu został dowartościowany przez Lakatosa proces twórczy). Występował więc ostro przeciwko logicystom i formalistom (por. *Wstęp* do [11]). Uznawał, że filozofia matematyki jest nierozdzielnie związana z historią matematyki i jedna bez drugiej nie ma większego sensu.

W celu ukazania tego związku poddał analizie filozoficzno-historycznej hipotezę Eulera-Descartesa oraz hipotezę Leibniza [15]. Na przykładzie ewolucji tych hipotez ukazał narodziny nowej metody badań matematycznych. Metoda ta została odkryta w XIX wieku, a do jej odkrycia przyczynili się Cauchy, Abel i Seidel.

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R.40:1995 nr 1 s. 21 – 39.

Lakatos poddaje analizie tę metodę patrząc na jej rodzenie się w kontekście historycznym. Nie analizuje natomiast tego, w jaki sposób metoda ta stała się częścią matematyki, wytwarzając nowy nurt badawczy (dzięki niej powstało wiele nowych działów matematyki). Metoda ta została nazwana przez Lakatosa metodą „dowodów i kontrprzykładów" (proofs and refutations).

W pracy tej chciałbym ukazać znaczenie wykorzystanej przez Lakatosa metody dowodów i kontrprzykładów dla badań w zakresie historii i filozofii matematyki. Wykorzystam tę metodę przy analizie powstania matematycznych pojęć miary i wymiaru oraz wnikając w filozoficzne aspekty tych pojęć. Analiza ta da zarazem pełniejsze zrozumienie metody dowodów i kontrprzykładów i pozwoli na sprecyzowanie istoty nowych badań, które dokonywały i dokonują się w matematyce w ramach przedstawionej metody.

ANALIZA METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW

POWSTANIE METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW

Zanim przejdę do przedstawienia metody dowodów i kontrprzykładów, chciałbym zwrócić uwagę na pewien specyficzny i istotny dla naświetlenia dalszych rozważań fakt związany z historią matematyki XIX wieku. Fakt ten wiąże się z próbą uściślenia podstaw analizy matematycznej. Próba ta wystąpiła z pełną siłą w pierwszej połowie XIX wieku.

Wiek XVII i XVIII to okres intensywnego rozwoju analizy (po pracach Newtona i Leibniza), bez zwracania zbytniej uwagi na jej podstawę. Kiedy jednak rozrastający się gmach analizy matematycznej zaczął natrafiać na trudne do rozwiązania problemy i wewnętrzne sprzeczności, uznano, że należy określić podstawowe pojęcia analizy, podać ich ścisłe definicje i na tej podstawie przeprowadzać dopiero dalsze rozważania oraz formułować i dowodzić twierdzenia. Ten okres rygoryzacji przebiegał pod hasłem „arytmetyzacji analizy". Wielu wybitnych matematyków, takich jak: Cauchy,Abel,Bolzano, Riemann, Weierstrass itd., brało w tym udział[4]. Wtedy to podano definicje ciągłości, granicy, funkcji, całki, pochodnej itd. Program ten w dużej mierze przebiegał w ramach nowożytnego paradygmatu naukowości. Jest jednak przynajmniej jeden element,który poza ten paradygmat wykraczał – związany jest on z metodą dowodów i kontrprzykładów.

W celu naszkicowania analizy odkrycia metody dowodów i kontrprzykładów zacznę od przedstawienia prawa ciągłości Leibniza, które brzmi:

„W każdym domniemanym przejściu, kończącym się na jakimś kresie, dozwolone jest ustanowienie pewnego ogólnego rozumowania, którym objąć można także końcowy kres"[15].

Prawo to stanowi jedną z podstawowych zasad filozoficznych, na których opierał się Leibniz tworząc rachunek „nieskończenie małych". Z prawa tego wynika (oczywiście przy odpowiedniej interpretacji), iż pojęcie granicy jest zależne od pojęcia ciągłości (tzn. pojęcie granicy powinno być takie, aby ciągłość w przejściu granicznym była zachowana), a „nieskończenie mała" (różniczka) musi być liczbą, jako wielkość otrzymana w wyniku granicznego przejścia wielkości liczbowych.

Cauchy natomiast odwrócił ten warunek, uzależniając pojęcie ciągłości od pojęcia granicy. Poza tym, pracując nad nadaniem ścisłej postaci analizie matematycznej, definiuje pojęcie granicy i ciągłości oraz próbuje podać dowód tzw. hipotezy Leibniza, którą można traktować jak matematyczną wersję prawa ciągłości – granica ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą [7].

Przez cały czas hipoteza ta uznawana była za niewątpliwie słuszną i nie wymagającą dowodu. I dopiero kiedy Cauchy podał definicję ciągłości okazało się, że istnieje jednak potrzeba dowodu tej hipotezy. W kontekście definicji ciągłości Cauchy'ego (jak również definicji granicy i ustalenia pojęcia funkcji) hipoteza ciągłości wychodziła z gąszcza przedzałożeń filozoficznych i uzyskiwała matematyczną postać. Cauchy podał dowód tej hipotezy – dowód okazał się „błędny". Okazało się również, iż pewne funkcje Fouriera [9], reprezentowane przez szeregi trygonometryczne, są nieciągłe w sensie ciągłości Cauchy'ego, a więc stanowią kontrprzykłady pierwotnej hipotezy. Dokładna analiza dowodu Cauchy'ego, dokonana przez Seidela (por. dodatek 1, [11]), wykryła lemat odpowiedzialny za to, iż (pozornie) słuszne rozumowanie, oparte na prawdziwych założeniach, prowadzi do fałszywych wniosków. Ten „winny" lemat związany był z pojęciem jednostajnej zbieżności. Ta zbieżność nie występowała w przykładach Fouriera. Wystarczyło więc dołożyć do założeń wymaganie jednostajnej zbieżności i rozumowanie uzyskiwało poprawność. Hipoteza ciągłości została więc zachowana, tylko uzyskała nowe znaczenie.

Można powiedzieć, że w dowodzie Cauchy'ego nie było błędu, lecz brak istotnego pojęcia. „Błąd" w dowodzie oznaczał więc, że to puste miejsce musi być czymś zapełnione, domagał się pojęcia jednostajnej zbieżności. „Błędne" dowody można więc uważać za generatory pojęć matematycznych.

Istotne w tym przykładzie jest to, iż, według Lakatosa, Seidel po raz pierwszy w sposób wyraźny zastosował w rozumowaniu metodę „proofs and refutatins", w odróznieniu od często wówczas stosowanej metody „exception-barring". I tak na przykład Abel, po analizie dowodu Cauchy'ego (według niego poprawnego) oraz kontrprzykładów Fouriera, chcąc zachować „czystość" matematyki, proponował ograniczyć badania tylko do szeregów potęgowych, których kontrprzykłady nie dotyczyły. Tym samym stosował metodę „exception-barring". Metoda ta nie jest twórcza, chociaż pozwala zachować poprawność rozumowań i wniosków – nie prowadzi jednak na ogół do nowych wyników, ograniczając czasem w sposób zbyt drastyczny pole badań. Natomiast w metodzie „proofs and refutations" nie ogranicza się pola zasięgu zaprzeczonego przez kontrprzykłady twierdzenia, lecz wzbogaca się rozumowanie (dowód) o nowe pojęcia. Stanowią one jakby nowe „cegły" zapełniające luki w budowli dowodu.

OPIS METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW

Po odkryciu Seidela metoda dowodów i kontrprzykładów weszła do matematyki jako jedna z „oficjalnych" metod badawczych i znalazła się w sferze uzasadnień matematyki. Okazała się bardzo płodną heurystyką, występując przeciwko euklidesowemu stylowi uprawiania matematyki, tzn. poddała w wątpliwość fakt, że komplikowanie aksjomatów i pierwotnych pojęć (w postaci twierdzeń) ma prowadzić do sukcesów matematyki w ujmowaniu rzeczywistości. Okazuje się, że w kryzysowych i zarazem twórczych okresach rozwoju matematyki metoda komplikowania aksjomatów nie daje postępu, lecz zaczyna blokować prawdziwie twórcze badania. To sugeruje, że pod pozornie przewodnią metodą euklidesową tkwią inne metody, które rządzą rozwojem matematyki. Istota tych metod jest zawarta w metodzie dowodów i kontrprzykładów i polega na wysuwaniu śmiałych hipotez, podawaniu kontrprzykładów, próbnych dowodów itp. Kontrprzykłady nie obalają hipotez, lecz walczą o swoje uznanie. W momencie, gdy zostaną uznane, zmieniają sens przyjmowanych hipotez, wręcz wytwarzają nowe teorie nieformalne. Celem działalności twórczej w przypadku stosowania metody dowodów i kontrprzykładów nie jest otrzymanie twierdzenia (hipoteza tak naprawdę nigdy nie staje się twierdzeniem), które wzbogaciłoby matematykę o następny nieomylny i niezbity fakt, lecz ewolucja hipotez i „wychwycenie" szczególnie płodnych kierunków badań.

Wynika stąd, że nie do utrzymania jest podział na kontekst odkrycia i kontekst uzasadnienia, zupełnie wyczerpujący przestrzeń funkcjonowania działalności naukowej. Metoda dowodów i kontrprzykładów nie jest umieszczona ani w jednym, ani w drugim kontekście. Jest „logicznym" wzorem postępu nauki, lecz zarazem kieruje procesem twórczym matematyka i zamienia często przypadkowe techniki myślenia na formalne procedury dowodowe.

W swoich późniejszych pracach Lakatos wprowadza pojęcie programu badawczego, który oznacza pewien ciąg rozwijających się teorii naukowych, w ramach ustalonych metod i założeń. Pojęcie to powstało w ramach badań mających na celu podanie kryterium pozwalającego odróżniać teorie naukowe od nienaukowych. Lakatos kontynuował pewne idee Kuhna i Poppera, a niektóre z nich krytykował, np. odrzucał ideę rewolucji naukowych Kuhna i zauważył, że w rzeczywistości mamy do czynienia z mikrorewolucjami w wąskiej dziedzinie nauki, a rewolucje zdarzają się niezmiernie rzadko. Odrzucił również tezę Poppera mówiącą, że teoria jest tym bardziej naukowa, im więcej zakazuje. Według Lakatosa żadne prawa naukowe niczego nie zakazują. Zawsze można uzgodnić teorię ze zdaniami obserwacyjnymi, wprowadzając dodatkowe hipotezy *ad-hoc* czy pojęcia. W ten sposób powstała koncepcja programów badawczych – według Lakatosa badamy i oceniamy nie pojedynczą teorię, lecz program badawczy, który składa się z pewnego ciągu teorii. To, co jest niezmiennikiem przy przejściu od jednej teorii do drugiej, to tzw. „twardy rdzeń". Wokół niego znajduje się pas ochronny, w którym dokonujemy modyfikacji zgodnie z przyjętymi regułami metodologicznymi. Zawsze kolejna teoria musi wyjaśniać to, co wyjaśniała poprzednia i ponadto przewidywać nowe zjawiska. Poza tym pas ochronny trzeba budować tak, aby nie naruszyć twardego rdzenia. Jeśli program badawczy realizuje te założenia metodologiczne, to jest postępowy, inaczej degeneruje się [13].

Pomimo że Lakatosowi przy koncepcji programów badawczych chodziło głównie o teorie przyrodnicze, to w procesie rozwoju matematyki można również wyśledzić pojawienie się i rozwój pewnych programów badawczych. Takim programem była np. matematyka rozpoczynająca się od Kartezjusza w ramach metody analitycznej.

Również w oparciu o metodę dowodów i kontrprzykładów powstał program badawczy w matematyce. **Istota tego programu polegała na definiowaniu pewnych struktur matematycznych (np. granicy czy całki) i szukaniu tych pojęć (własności), które dają się umieścić w tych strukturach. Ponadto, jeśli mamy układ elementów i dokonamy na tych elementach pewnej „nieskończonej" operacji (np. przejście do granicy lub utworzenie z nich jakiejś nowej struktury), to element, który otrzymamy jako wynik tej operacji, może mieć zasadniczo inne własności niż elementy wyjściowe.** W tym nurcie zaczęły więc intensywnie powstawać nowe pojęcia – w ten sposób powstało np. pojęcie jednostajnej zbieżności czy pojęcie miary stworzone w ramach badań nad całką Riemanna.

ANALIZA POWSTANIA WSPÓŁCZESNEGO POJĘCIA MIARY

CAŁKA RIEMANNA

W poprzednim paragrafie przedstawiłem krótko historię powstania pojęcia jednostajnej zbieżności. Obecnie chciałbym zająć się analizą powstania pojęcia miary. Ponieważ odkrycie to zostało dokonane w ramach metody dowodów i kontrprzykładów, myślę, że analiza ta da pełniejszy wgląd w istotę programu badawczego powstałego w oparciu o tę metodę.

W tym celu wróćmy do idei całki Leibniza, która składa się z dwóch istotnych elementów:

1) Całka jest definiowana i rozumiana niezależnie od pochodnej – inaczej niż u Newtona, który uważał, że przez całkę należy rozumieć wyłącznie funkcję pierwotną.

2) Całka jest rozumiana jako „nieskończona suma nieskończenie małych".

Idea całki Riemanna nawiązywała do pierwszego elementu koncepcji całki Leibniza, natomiast odrzucała element drugi [22]. Przeanalizujmy dokładniej tę kwestię.

Całka Riemanna powstała w nurcie badań nad szeregami Fouriera. Problem, które funkcje można przedstawić w postaci szeregu Fouriera, wiąże się z problemem całkowalności, ponieważ współczynniki rozwinięcia tego szeregu wyrażają się przy pomocy całek. A ponieważ istniały rozwinięcia funkcji nieciągłych, badania poszły w kierunku zbadania, na ile funkcja może być nieciągła, aby wzory zachowywały jeszcze swoją ważność. Badanie te prowadził Dirichlet. W pracy z roku 1829 podaje warunek, który w dzisiejszej terminologii stwierdza, że całkowalne są funkcje, których zbiór punktów nieciągłości jest nigdziegęsty [16].

W 1854 roku badania te podejmuje Riemann [22]. Riemann postępuje zgodnie z nowym programem badawczym. Ponieważ chce znaleźć kryterium, które mówiłoby jakie funkcje można całkować, postanawia ustalić najpierw definicję całki (zgodną z ideą pojęcia granicy) i przyjąć tę definicję jako punkt wyjścia dalszych rozważań. Tym samym nawiązuje do pomysłu Leibniza, aby traktować całkę niezależnie od pojęcia pochodnej. Kryterium całkowalności podane przez Riemanna jest następujące:

„Jeśli funkcja f jest skończona i przy nieograniczonym zmniejszaniu wszystkich danych wielkości suma tych przedziałów, w których wahania funkcji są większe niż dana wielkość, koniecznie staje się dowolnie mała, to suma s [5] dąży do granicy, kiedy wszystkie δ stają się dowolnie małe" ([22], s. 227).

Kryterium to pokazuje, jaka musi być natura funkcji, które można całkować, a tym samym, jaki musi być zbiór punktów nieciągłości funkcji całkowalnej. Warunek ten pokazuje jasno, że zbiór ten musi być „na tyle mały", aby suma długości tych przedziałów, które zawierają wszystkie punkty nieciągłości, była dowolnie mała, gdy zagęszczamy podział przedziału, na którym całkujemy. Wynika to z tego, że właśnie przedziały, na których wahania (przy dostatecznym zagęszczaniu podziału) są większe od dowolnego σ, są przedziałami zawierającymi punkty nieciągłości funkcji. Stąd warunek całkowalności Riemanna niesie ze sobą intuicję pojęcia wielkości.

EWOLUCJA MIARY

We wspomnianej pracy Riemann (s. 228) podaje przykład następującej funkcji:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^2},$$

przy czym $[x]$ oznacza różnicę pomiędzy x i najbliższą mu liczbą całkowitą. Natomiast, jeśli x leży dokładnie pośrodku przedziału, pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, to wówczas $[x]$ oznacza zero.

Funkcja ta jest skończona, a zbiór jej punktów nieciągłości jest „duży" (nieskończony). Jednak funkcja ta spełnia warunek całkowalności, a to znaczy, że zbiór jej punktów nieciągłości jest „mały". Była to sprzeczność, która doprowadziła do badań nad pojęciem funkcji rzeczywistej i ciągłości. Chodziło między innymi o to, aby ustalić i ująć matematycznie nieścisłe (jak się teraz okazało) pojęcie wielkości. Z jednej strony badania te doprowadziły do podania definicji „wielkości" (skończonych i nieskończonych) i stworzenia przez Cantora teorii mnogości. Z drugiej strony poprzez analizy Stolza, Harnacka, Cantora, Peano, Jordana, Borela i Lebesgue'a otrzymano pojęcie miary, które stało się, między innymi, idealnym narzędziem do podania warunku koniecznego i wystarczającego całkowalności funkcji w sensie Riemanna – funkcja jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór jej punktów nieciągłości jest miary zero.

Jednym z pierwszych etapów ewolucji pojęcia miary jest miara Cantora [6]. Dla dowolnego zbioru ograniczonego $E \subset R$ *i liczby* ρ Cantor definiuje otoczenie $V(\rho)$ zbioru E:

$$V(\rho) = \{x \in R^n : d(x, E) \leq \rho\}.$$

Cantor uważa, że pole tego otoczenia można policzyć przy pomocy całki, chociaż nie podaje jak. Przez miarę zbioru E rozumie kres dolny pól otoczeń zbioru E.

Jednak ta miara nie rozróżnia danego zbioru oraz tego zbioru po domknięciu (w obu przypadkach otrzymujemy te same miary) – z tego wynika, że miara ta nie jest addytywna. Poza tym nie wiadomo, jak liczyć pola otoczeń.

Dlatego Peano [18] i Jordan [10] ulepszają pojęcie miary Cantora. Robią to w następujący sposób:

1) Zastępują ogólne pojęcie otoczenia skończoną sumą kostek.

2) Wprowadzją miarę wewnętrzną $m(E)$ zbioru E:

$$m(E) = m(I) \setminus m(I \setminus E),$$

przy czym $E \subset I$, gdzie I jest kostką n-wymiarową, a miarę Cantora nazywają miarą zewnętrzną zbioru.

3) Za zbiór mierzalny uważają zbiór, którego miara wewnętrzna jest równa mierze zewnętrznej.

Te zmiany okazują się fundamentalne. Przede wszystkim, tak otrzymana miara jest już addytywna oraz istnieje metoda jej obliczania.

Nie wszystkie „sprzeczności" zostały jednak dzięki temu pojęciu usunięte. Zauważmy, że miara wewnętrzna nie uwzględnia brzegu zbioru, natomiast miara zewnętrzna ujmuje zbiór wraz z jego brzegiem. Stąd wniosek, że jeśli zbiór ma duży, w sensie miarowym, brzeg, to wówczas jest niemierzalny w sensie Peano-Jordana. Innymi słowy, addytywność miary jest osiągnięta dzięki wyrzuceniu zbiorów o dużym brzegu. Jednak koszt uzyskania addytywności jest zbyt duży – bardzo wiele zbiorów zostaje poza zasięgiem tej miary (są niemierzalne). Przykładowo istnieją niemierzalne zbiory otwarte i domknięte ograniczone [23] oraz niemierzalny jest zbiór liczb wymiernych zawartych w dowolnym przedziale.

W celu ominięcia tej trudności Borel [2] proponuje traktować miarę zbioru otwartego jako sumę miar jego składowych wychodząc ze znanego faktu, że dowolny zbiór otwarty jest przeliczalną sumą rozłącznych przedziałów – składowych. To nasunęło Lebesgue'owi myśl [14], aby w koncepcji miary Peano-Jordana zastąpić skończoną sumę kostek, pokrywających dany zbiór, sumą przeliczalną. W tym momencie pojęcie miary uzyskało właściwą postać i zaczęło żyć własnym życiem, tworząc nowy dział matematyki [3].

METODA BADAWCZA POINCARÉGO METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW

KRÓTKI OPIS METODY BADAWCZEJ POINCARÉGO

Francuski matematyk, fizyk i filozof, Henri Poincaré, był w dużym stopniu zafascynowany programem erlangeńskim F. Kleina [21]. Uważał, że pojęcie grupy oraz niezmiennika ma podstawowe znaczenie dla matematyki. Tym pojęciom przypisywał zasadniczą rolę we wszelkim poznaniu. Sądził, że pojęcie grupy „preegzystuje w umyśle ludzkim" i określa pewną aprioryczną strukturę umysłu ([19)], s. 77). Ta aprioryczna struktura stanowi formę poznania [8]. Świat, według Poincarégo, ma swoją własną, obiektywną, niezależną od umysłu strukturę, która przyjmowana jest przez umysł w sposób przedrefleksyjny (por. [25], [17]). Poznanie, a więc wszelkie świadome ujęcie struktury świata, możliwe jest wyłącznie w ramach pojęcia grupy. Program klasyfikacji geometrii Kleina ukazuje, jak dzięki pojęciu grupy wyłania się dana struktura geometryczna (dana geometria powstaje jako teoria niezmienników określonej grupy przekształceń). **Pojęcia grupy oraz niezmiennika** stanowią u Poincarégo centralny element apriorycznych struktur poznawczych [27].

W swoich pracach Poincaré analizuje znaczenie indukcji matematycznej dla powstawania wiedzy matematycznej. Z tych analiz wynika, że pojęcie indukcji matematycznej jest przez niego używane w znaczeniu bardzo ogólnym i nieprecyzyjnym i praktycznie pełni rolę zasady, dzięki której powstają „istotne" pojęcia matematyczne. Tę zasadę, która jest drugim elementem apriorycznych struktur poznawczych, nazwę **zasadą indukcji apriorycznej** – nadbudowywuje się ona nad pierwszym elementem. Funkcjonowanie tej zasady polega między innymi na uświadomieniu sobie przez umysł możliwości wykonania danej operacji nieskończenie wiele razy. Przykładem działania tej zasady jest wspomniana wcześniej zasada ciągłości, jak również zasada indukcji matematycznej czy wszelkiego typu definicje rekurencyjne.

POWSTANIE POJĘĆ *CONTINUUM* I WYMIARU

Przyjrzyjmy się, jak w oparciu o przedstawioną metodę badawczą powstają pojęcia matematyczne. Posłużą do tego pojęcia *continuum* i wymiaru analizowane przez Poincarégo ([19], s. 21-34). Analiza ta ukaże zarazem, że metoda badawcza Poincarégo tkwi w programie badawczym wyznaczonym przez metodę dowodów i kontrprzykładów.

Punktem wyjścia do powstania pojęcia *continuum* jest pojęcie grupy liczb całkowitych oraz formuła *continuum* fizycznego. Formuła *continuum* fizycznego wyraża się w następujący sposób:

$$A = B, B = C, A < C,$$

gdzie A, B, C są wielkościami pewnych ciał, przy czym ciała A i B (jak również B i C) mają wielkości nierozróżnialne w ramach danego doświadczenia, natomiast wielkości ciał A i C są już rozróżnialne [28]. Ta formuła prowadzi jednak do sprzeczności ($B < B$). Struktura *continuum* fizycznego jest ujmowana przez umysł w trakcie doświadczenia. Umysł dokonuje procesu uniesprzecznienia tej struktury. Tym, co uniesprzecznia formułę *continuum* fizycznego, jest powstałe w czasie tego procesu *continuum* matematyczne. Tym, co niezbędne w tym procesie, jest preegzystujące w umyśle pojęcie grupy (jak również zasada indukcji apriorycznej).

Przeanalizujmy jak dokonuje się ten proces. Weźmy dwie wielkości A i C z powyższego przykładu i przyporządkujmy je dwóm kolejnym liczbom całkowitym.

Wtedy zgodnie z formułą *continuum* fizycznego może istnieć „między" liczbami A i C liczba odpowiadająca wielkości B. Zgodnie z zasadą sprzeczności ta liczba musi być jednak różna od liczb A i C. „Między" dowolnymi liczbami całkowitymi pojawia się więc nowa, różna od nich liczba. Bez pojęcia *continuum* fizycznego to „między" nie miałoby żadnego sensu. Dwie kolejne liczby całkowite „stykają się" ze sobą – mając do dyspozycji wyłącznie grupę liczb całkowitych stwierdzamy, że na przykład liczba 2 następuje bezpośrednio po liczbie 1.

Natomiast możliwość umieszczania między dwoma dowolnymi liczbami całkowitymi nowej liczby wynika z tego, że liczby te mają strukturę grupy – umieszczając nową liczbę między, na przykład, liczbami 1 i 2 mamy automatycznie tę operację wykonaną dla dowolnych liczb k i $k + 1$ (wystarczy przesunąć przedział [1, 2] o liczbę $k - 1$). Dzięki zasadzie indukcji apriorycznej tę operację wstawiania liczb pośrednich między dwie kolejne już otrzymane liczby możemy kontynuować w nieskończoność. W ten sposób powstaje *continuum* matematyczne I rzędu (jak nazywa je Poincaré) – jest to zbiór liczb wymiernych.

Liczby wymierne usunęły więc sprzeczność wynikającą z formuły *continuum* fizycznego. Traktując jednak linię geometryczną jako *continuum* wymierne dochodzimy również do sprzeczności. Dwie dowolne linie rozumiane jako twory fizyczne (tzn. mające szerokość) przecinają się w pewnym „punkcie" (rozciągłym, mającym długość i szerokość). Gdy przechodzimy do granicy, zmniejszając do zera szerokość tych linii, to własność przecinania się powinna się zachować (zauważmy, że korzystamy w tym rozumowaniu z zasady ciągłości, która jest przykładem działania zasady indukcji apriorycznej). Są jednak przypadki, w których linie jako twory fizyczne przecinają się, a w granicy nie (np. okrąg wpisany do kwadratu i przekątna tego kwadratu się nie przecinają, jeśli traktujemy rozpatrywane linie jako *continuum* wymierne). Jest to sprzeczność (można ją rozumieć jako sprzeczność z zasadą ciągłości), którą rozwiązuje wprowadzenie liczb niewymiernych. Otrzymane w ten sposób liczby rzeczywiste to *continuum* matematyczne II rzędu.

Zauważmy, że pojęcie liczb rzeczywistych (prostej rzeczywistej) nie rozwiązuje jednak wszystkich sprzeczności. Wróćmy do rozpatrywanych powyżej linii fizycznych przecinających się. W tym przypadku zbiorem przecięcia się tych linii jest pewien obszar mający dwa wymiary: długość i szerokość (tak samo jak rozpatrywane linie). Zmniejszając szerokość rozpatrywanych linii do zera powodujemy zarazem, że oba wymiary obszaru przecięcia (długość i szerokość) redukują się do zera. Linie matematyczne nie posiadające szerokości (tylko długość) przecinają się w punkcie (który nie posiada ani szerokości, ani długości). Do tego więc, aby podzielić *continuum* matematyczne jednowymiarowe (mające tylko długość) wystarczy *continuum* zerowymiarowe, tzn. punkt (*continuum* o jeden wymiar mniejsze) lub ogólnie, skończony zbiór punktów. Tym samym pojawia się pojęcie *continuum* matematycznego n-wymiarowego: *continuum* jest *n-wymiarowe*, jeśli można je podzielić na dwa rozłączne zbiory przy pomocy *continuum* *(n–1)-wymiarowego* (gdy $n > 1$); w przypadku, gdy $n=1$, możemy je podzielić przy pomocy zbioru skończonego.

Przyjrzyjmy się, gdzie tkwi sprzeczność w pojęciu podziału linii fizycznej? Sprzeczność polega na tym, że niemożliwe jest podzielenie linii fizycznej na dokładnie dwie linie. Podział jest możliwy na co najmniej trzy linie; ta część, która dzieli daną linię jest tym „trzecim kawałkiem". Zauważmy, że to znaczy, iż podział linii fizycznych jest właściwie niemożliwy, gdyż ten „trzeci kawałek" jest linią fizyczną, którą należy podzielić, a której podzielić się nie da. Tę sprzeczność usuwa dopiero pojęcie wymiaru, a dokładniej pojęcie przekroju, będące podstawą definicji pojęcia wymiaru – przekrojem linii matematycznej jest punkt (a więc obiekt,który nie podlega już dalszemu podziałowi) a nie linia i dzięki temu możliwy jest podział linii.

POWSTANIE POJĘCIA WYMIARU A METODA DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW

Z tych analiz można wyciągnąć, jak sądzę, interesujące wnioski. Zauważyliśmy, że pojęcia matematyczne powstają w wyniku uniesprzeczniania różnego typu doświadczeń – można powiedzieć, że pojawiając się ukazują istotę danego rozumowania i neutralizują przeczące temu rozumowaniu kontrprzykłady. I tak:

1. Pojęcie liczb wymiernych usuwa sprzeczność wynikającą z zasady tożsamości obiektów (która mówi, że dwa obiekty między którymi piszemy znak „=" są tożsame) w połączeniu z formułą *continuum* fizycznego;
2. Pojęcie liczb rzeczywistych usuwa sprzeczność, do której doprowadza zasada ciągłości Leibniza, w połączeniu z faktem nieprzecinania się pewnych linii traktowanych jako *continuum* wymierne;
3. Pojęcie wymiaru usuwa sprzeczność związaną z niemożliwością podziału *continuum* fizycznego.

Zauważmy, że przy powstaniu pojęcia wymiaru istotną rolę pełniła metoda dowodów i kontrprzykładów: obiekt, który otrzymaliśmy w wyniku pewnej nieskończonej operacji (przejście z szerokością linii do zera), ma inne własności niż obiekt wyjściowy – nowy obiekt (tzn. linia matematyczna) ma tę własność, że dzieli ją punkt (a więc obiekt innego rodzaju), w odróżnieniu od obiektu wyjściowego (jest nim linia fizyczna), który dzielił się przy pomocy linii (a więc obiektu tego samego rodzaju).

Używając języka heglowskiego można uważać, że hipoteza mówiąca o możliwości podziału *continuum* jest tezą, w której tkwią różne możliwości rozwoju, a zależą one od ustaleń terminologicznych. W momencie, gdy krystalizuje się pojęcie przekroju, niemożność podziału *continuum* fizycznego okazuje się kontrprzykładem do powyższej hipotezy i pełni, wraz z pojęciem przekroju, rolę „negatywnego pola" antytezy. „Pozytywnym polem" antytezy okazuje się rozumowanie, z którego wynika, że dane *continuum* matematyczne można podzielić przy pomocy *continuum* niższego „wymiaru". To rozumowanie staje się więc poprzednikiem pojęcia wymiaru. Pojęcie to można określić mianem syntezy.

KONSEKWENCJE POJAWIENIA SIĘ METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW

ZNACZENIE METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW DLA MATEMATYKI

Na przykładzie topologii, dla rozwoju której pojęcie wymiaru odegrało niebagatelną rolę i która w dużej mierze rozwija się zgodnie z metodą dowodów i kontrprzykładów, naświetlę bliżej znaczenie tej metody dla matematyki.

Rozważania dotyczące pojęcia wymiaru pokazują, jak to pojęcie wiąże się z filozofią nauki Poincarégo i zarazem ukazują, że teoria wymiaru pojawiła się w nurcie programu badawczego określonego przez metodę dowodów i kontrprzykładów. Pojęcie wymiaru, którego istotę określił Poincaré, zostało później sprecyzowane przez Brouwera, Mengera i Urysohna i stało się jednym z centralnych pojęć topologii. Podobnie wygląda sytuacja z innymi pojęciami oraz metodami, które wprowadził Poincaré dostrzegając ich ogromne znaczenie dla matematyki. Tymi pojęciami są między innymi: pojęcie homologii, grupy podstawowej oraz pojęcie punktu stałego odwzorowań ciągłych. Pojęcia te, wraz z głębokimi intuicjami zawartymi w pracach Poincarégo, stały się podstawą dalszego rozwoju teorii homologii, teorii homotopii oraz teorii punktu stałego, a więc centralnych teorii topologicznych. Na przykład, w ramach teorii homologii podał Poincaré idee kompleksu symplicjalnego oraz podziału symplicjalnego, tworząc tym samym podstawową metodę topologii kombinatorycznej.

Znowu, jak w przypadku pojęcia wymiaru, istota powyższych pojęć ściśle wiąże się z metodą badawczą Poincarégo. Okazuje się, że kluczowym pojęciem w teorii homologii jest pojęcie grupy homologii (grupy Bettiego). Grupę taką można skonstruować dla kompleksów symplicjalnych i grupa ta nie zależy od podziału symplicjalnego kompleksu. Grupa homologii staje się podstawowym niezmiennikiem wielościanów, gdyż homeomorficznym wielościanom odpowiadają izomorficzne grupy Bettiego.

Przyjrzyjmy się dokładniej metodzie punktów stałych wprowadzonej przez Poincarégo [20]. Metodę tę wykorzystał Poincaré przy badaniu równań różniczkowych, gdy chodziło o rozstrzygnięcie problemu istnienia rozwiązań danego równania różniczkowego.

Zauważmy, że istnienie miejsc zerowych funkcji $f(x)$ jest równoważne istnieniu punktów stałych odwzorowania $g(x) = f(x) + x$. Jednak wiele problemów, które wydawały się nie do rozwiązania, gdy próbowano rozwiązać je poprzez udowodnienie istnienia rowiązania danego równania różniczkowego, stało się dostępnych dzięki metodzie punktów stałych. Sądzę, że nie jest to przypadek i wiąże się bardzo ściśle z istnieniem struktur apriorycznych, a dokładniej z faktem, że w oparciu o pojęcie grupy i jej niezmienników tworzymy wszelką wiedzę (w rozumieniu

Poincarégo). Odnajdując różne metody badawcze opierał się więc Poincaré na swojej filozofii poznania i filozofia ta dawała mu możliwość odnajdywania skutecznie działających metod i płodnych pojęć. W przypadku metody punktów stałych rzecz ta wygląda w następujący sposób. Mając odwzorowanie g i szukając punktów stałych tego odwzorowania można zauważyć, że zbiór $G = \{g^n : n \in N\}$, *gdzie* g^n oznacza *n–krotne* złożenie funkcji g ze sobą, tworzy półgrupę odwzorowań, a punkty stałe odwzorowania g są niezmiennikami tej półgrupy ($g(x) = x$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in N$, $g^n(x) = x$). Oczywiście, poszukiwanie miejsc zerowych odwzorowania f nie sprowadza się do badania niezmienników półgrupy $F = \{f^n : n \in \mathrm{N}\}$; z równości $f(x) = 0$ nie wynika w ogólnym przypadku równość $f^n(x) = 0$, dla $n > 1$.

Jak więc widać na powyższych przykładach, przedstawiona metoda badawcza Poincarégo ma wartość heurystyczną, a poza tym sądzę, że niektóre działy współczesnej matematyki (np. topologia) są w dużym stopniu budowane zgodnie z tą metodą, a tym samym pozostają w nurcie badań wyznaczonych przez metodę dowodów i kontrprzykładów. Uzasadnienie tej tezy wymagałoby oczywiście dokładniejszych analiz – częściowo tą kwestią zajmował się, między innymi, rosyjski topolog P. S. Aleksandrow [1].

Wróćmy teraz do pojęcia miary i zobaczmy jeszcze raz, jak powstanie tego pojęcia było zależne od metody dowodów i kontrprzykładów oraz w jaki sposób wpłynęło na nowe rozumienie matematyki.

Warunek całkowalności Riemanna i funkcja skonstruowana przez Riemanna pokazywały, że dla całkowalności funkcji nie jest ważne, czy punktów nieciągłości jest skończona, czy nieskończona ilość, lecz że istotne jest to, aby te punkty dało się pokryć przeliczalną ilością przedziałów, na których suma wahań funkcji byłaby dowolnie mała. Ideał ten realizuje miara Lebesgue'a. W swojej istocie miara nie „liczy" więc elementów zbioru (w szczególnych przypadkach może), lecz „ujmuje" strukturę zbioru. Nie jest istotne więc to, jaką miarę możemy przypisać danemu zbiorowi. Istotne raczej jest to, czy zbiór jest mierzalny, czy nie (ewentualnie, czy jego miara jest dodatnia, czy zerowa). Koncepcja miary Lebesgue'a zrywa więc z takim rozumieniem matematyki, w którym za przedmiot matematyki uważa się pewne „ilości". Stosując ten język można powiedzieć, że w koncepcji miary istotne są jakości zbiorów.

Podsumowując te rozważania, chciałbym zauważyć, że koncepcja całki Riemanna stała się możliwa w oparciu o metodę dowodów i kontrprzykładów, po zdefiniowaniu pojęć granicy i ciągłości. Ustalenie pojęcia całki spowodowało pojawienie się sprzeczności w rozumieniu pojęcia „wielkości". Próby usunięcia tej sprzeczności doprowadziły, między innymi, do zdefiniowania pojęcia miary. Podobnie więc, jak precyzowanie pojęć granicy i ciągłości doprowadziło do pojawienia się sprzeczności w rozumieniu hipotezy Leibniza – a sprzeczność ta zrodziła pojęcie jednostajnej zbieżności, tak ustalenie pojęcia całki przez Riemanna stworzyło sprzeczność w rozumieniu pojęcia wielkości zbioru – a ta sprzeczność spowodowała, między innymi, powstanie pojęcia miary.

Istnieje możliwość, że metoda dowodów i kontrprzykładów może być rozumiana „niedokładnie". W swojej dość mocno uproszczonej formie jest uznawana przez matematyków za oczywistą. Nikt nie przeczy, że próby dowodu pewnej hipotezy składają się z różnych rozumowań, których poprawność kontrolowana jest przez kontrprzykłady.

I nie to jest istotne w metodzie dowodów i kontrprzykładów, gdyż w tej metodzie kontrprzykłady nie obalają twierdzeń, lecz zmieniają znaczenia pojęć używanych w dowodzie. Natomiast to, czy dane przykłady zostaną uznane za kontrprzykłady zależy od wcześniejszych ustaleń terminologicznych. Istnieje więc ścisły związek pomiędzy kontrprzykładami a dowodem (i definicjami pojęć występujących w dowodzie), którego dotyczą. Ponieważ każdy błędny dowód może stać się przodkiem nowego pojęcia, istota tego nowo powstałego pojęcia w jakimś sensie zawiera się w kontrprzykładzie. Każdy kontrprzykład jest kontrprzykładem dopiero w kontekście jakiejś teorii czy struktury matematycznej, więc może on wyznaczać nową teorię, nie obalając starych struktur, w których się pojawił. Jak pokazałem, taka sytuacja miała miejsce w przypadku pojawienia się miary Lebesgue'a, gdy okazało się, że miara wymyślona przez Peano i Jordana jest „zła", gdyż nie wszystkie zbiory, które „powinno" dać się mierzyć, są mierzalne.

Wskazany już przeze mnie przykład funkcji (podanej przez Riemanna) mającej nieskończenie wiele punktów nieciągłości, a mimo to całkowalnej, burzył wyobrażenia wiążące bardzo ściśle całkowalność funkcji z jej ciągłością – okazało się, że funkcja może być w dużym stopniu nieciągła, a mimo to całkowalna. W tym czasie inny przykład, podany w 1875 r. przez H. J. Smitha, pokazywał funkcję niecałkowalną, której zbiór punktów nieciągłości jest „mały" (nigdziegęsty) [24]. W ówczesnym rozumieniu były to kontrprzykłady wcześniej bezkrytycznie uznawanych faktów. Tym samym ciągłość ukazała swoją niezależność względem innych pojęć matematycznych. Mimo że już wcześniej została podana definicja ciągłości, to jednak przez dłuższy czas traktowano ją jako pojęcie pomocnicze i w dużym stopniu dalej rozumiano ją intuicyjnie ([11], dodatek 1).

Sądzę więc, że definicja nie powoduje automatycznie, iż definiowane pojęcie zaczyna istnieć w matematyce. Do tego, aby pojęcie zaczęło istnieć, potrzebne są przykłady, które pokażą, że pojęcie ma swój własny rodowód i nie jest tylko skrótem ułatwiającym wypowiedzenie myśli.

Jest również inna droga wskazująca na istnienie pojęć matematycznych. Jeśli badamy „naturę" pewnych obiektów matematycznych i okazuje się, że funkcjonowanie tych obiektów w danej strukturze jest zależne od pewnych niedopracowanych pojęć, to wówczas te niedopracowane pojęcia wskazują na istniejące w matematyce obiekty, które należy odnaleźć i zdefiniować. Tak było z pojęciem miary. Badania natury funkcji całkowalnych w sensie Riemanna ukazały związek całkowalności funkcji z wielkością zbioru punktów nieciągłości, a pojęcie miary okazało się właściwym narzędziem ujmującym tę wielkość.

Widzimy więc, jak metoda dowodów i kontrprzykładów, będąca bardzo ogólną metodą rozwoju matematyki, wskazuje w gruncie rzeczy na sposób istnienia pojęć matematycznych. Istotne jest to, iż z metody dowodów i kontrprzykładów korzystałem w kontekście konkretnych teorii powstałych w oparciu o tę metodę. Bez lokalnego kontekstu metoda dowodów i kontrprzykładów jest pusta: rozumie się ją jako banalnie oczywistą (gdy oddziela się sens kontrprzykładów od dowodów i precyzowanych pojęć) lub też metoda ta staje się karkołomnym wymysłem podważającym pewność już raz osiągniętych wyników (gdy uważa się, że kontrprzykłady obalają hipotezy, którym przeczą).

ZNACZENIE METODY DOWODÓW I KONTRPRZYKŁADÓW DLA FILOZOFII

Nie chciałbym dokonywać zbyt daleko idących uogólnień, jednak nasuwają się pewne metodologiczne czy wręcz epistemologiczne i ontologiczne stwierdzenia odnośnie do matematyki. Próba ukazania mechanizmu działania metody dowodów i kontrprzykładów, mam nadzieję, zarysowała granicę, do której twórczy jest aksjomatyczno-dedukcyjny sposób uprawiania matematyki. Metodologia euklidesowa (jak nazywa aksjomatyczno-dedukcyjny sposób uprawiania matematyki Lakatos) jest jedynie eksploatacją pokładów odkrytych metodą dowodów i kontrprzykładów. Znaczenie dokonanego, między innymi przez Seidela, odkrycia, polega na tym, że metoda ta, od momentu jej odkrycia, weszła do matematyki jako jedna z jej oficjalnych metod (metoda ta dość wyraźnie oddziela np. teorię mnogości czy topologię od algebry). Znalazła się więc w kontekście uzasadnienia (jak pokazywałem wcześniej można ją rozumieć nawet szerzej), mimo że przez wielu matematyków ten fakt nie jest w pełni uświadomiony.

Metoda dowodów i kontrprzykładów funkcjonowała w matematyce już wcześniej, jednak w sposób zupełnie przypadkowy. Bardzo ładnie widać jej występowanie w analizie np. motywacji tworzenia geometrii analitycznej przez Kartezjusza, czy w przypadku próby pogodzenia przez Eudoksosa sprzeczności, która pojawiła się wraz z odkryciem przez pitagorejczyków odcinków niewspółmiernych – ta sprzeczność uderzała w uznawaną w tym czasie absolutną jedność matematyki.

Zauważmy jednak, że w momencie zastosowania metody dowodów i kontrprzykładów zaczyna się wyraźny rozwój matematyki. Metody zastosowane przez Eudoksosa pozwalały rozwiązać wiele problemów matematyki starożytnej Grecji; wystarczy wspomnieć o metodzie wyczerpywania, pozwalającej obliczać w sposób ścisły pola i objętości figur, czy o teorii stosunków, umożliwiającej usunięcie rozdźwięku między geometrią i arytmetyką. Natomiast metoda Kartezjusza spowodowała powstanie i rozwój nowych działów matematyki w XVII i XVIII wieku, np. teorii równań różniczkowych czy rachunku wariacyjnego.

Na początku XIX wieku rozwój matematyki zaczyna się znowu blokować. Wiele nieprecyzyjnych pojęć (ciągłość, nieskończoność, funkcja itp.) stosowanych w matematyce uniemożliwia jednoznaczne uzgodnienia dowodów z kontrprzykładami. Należy te pojęcia uściślić i włączyć do matematyki. Zaczyna działać metoda dowodów i kontrprzykładów – znowu przypadkowo. Jednak, ponieważ użycie tej metody zostało wyrażone w postaci reguł dowodzenia, istnieje możliwość budowania przy jej pomocy nowych działów matematyki – zgodnie z tą metodą postępowali np. Riemann przy konstrukcji całki czy Poincaré przy dochodzeniu do pojęcia wymiaru.

Metoda dowodów i kontrprzykładów otwiera nowe pola badań w matematyce. Jednak nie pokazuje, które z nich warto eksploatować. Jej użycie wymaga więc intuicji twórczej.

Dlatego też w matematyce po odkryciu tej metody ważne stają się konkretne prace metodologiczne, które byłyby w stanie naświetlić płodne kierunki badań i zarazem wyeliminować ślepe uliczki rozwoju matematyki.

Można jednak patrzeć przez pryzmat tej metody na historię matematyki, tzn. na teorie, które już powstały i wówczas odsłania się pewna epistemologia i ontologia matematyki. W ramach tej nowej filozofii zostaje przezwyciężony w pewnym sensie dualizm między konstruktywizmem i platonizmem. Przyjrzyjmy się temu dokładniej.

W poprzednim paragrafie zwróciłem uwagę na pewne mechanizmy, które wskazują na istnienie pojęć matematycznych. Pierwszy z tych mechanizmów polegał na tym, że istnienie pojęć matematycznych jest ukazywane poprzez przykłady wskazujące na autonomię tych pojęć w matematyce. Drugi mechanizm pozwala odkrywać pojęcia matematyczne ukryte za niedopracowanymi i nieścisłymi pojęciami, gdy staje się jasny związek tych niedopracowanych pojęć z innymi, już uznawanymi pojęciami matematycznymi. A więc zdefiniowanie, czy skonstruowanie danego pojęcia nie jest gwarantem, że to pojęcie ma obiektywną treść wykraczającą poza struktury formalne matematyki. A na to, iż pojęcia mające taką obiektywną treść istnieją (nazwę takie pojęcia obiektami matematycznymi – tak naprawdę przez obiekty matematyczne rozumiem to, co odpowiada takim pojęciom; wyjaśnię to dokładniej w dalszej części artykułu), wskazuje wspomniany powyżej drugi mechanizm, dzięki któremy odnajdujemy fakt zależności takiego pojęcia od pojęć, których znaczenie odbierane jest na podstawie pozamatematycznych (np. filozoficznych) intuicji. A więc, po pierwsze, zbiór pojęć matematycznych jest szerszy niż zbiór obiektów matematycznych i po drugie zbiór obiektów matematycznych jest niepusty – przykładem takiego obiektu jest pojęcie miary mające związek ze zdroworozsądkowym pojęciem wielkości czy pojęcie ciągłości.

Można więc powiedzieć, że obiekt matematyczny jest swoim pojęciem. Ta pozornie banalna teza ma doniosłe konsekwencje ontologiczne. Jak wspomniałem wcześniej, na istnienie obiektów matematycznych wskazują pewne niedopracowane – z punktu widzenia matematyki i zarazem pełne znaczenia – pojęcia filozoficzne, jak np. rozważane w tej pracy pojęcia wielkości, ciągłości i podziału. Gdy rozwój matematyki zaczyna się blokować, gdy pojawiają się sprzeczności (co miało miejsce np. przy próbie pogodzenia hipotezy Leibniza z przykładami Fouriera), to wówczas te niedopracowane pojęcia wskazują na istnienie pewnych obiektów matematycznych. Istniejący obiekt matematyczny domaga się zdefiniowania, tzn. istniejące zależności wskazują na jego strukturę ontologiczną – tą strukturą jest właśnie pojęcie, które odpowiada temu obiektowi.

W trakcie rozwoju matematyki istniejące w niej uprzednio obiekty uzyskują strukturę ontologiczną, tzn. stają się swoimi pojęciami. Innymi słowy, dowody i kontrprzykłady są generatorami pojęć matematycznych (lecz nie obiektów). Pojęcia matematyczne, którym odpowiadają istniejące obiekty matematyczne, stanowią istotę matematyki i zarazem obszar, w którym styka się ona z własną historią (również proces prawdziwie twórczy przebiega właśnie w tym obszarze). Te pojęcia związane są zarazem z ideami sterującymi rozwojem matematyki, a więc generują zbiór heurystyk.

Obiekt matematyczny wyczerpuje się w pojęciu, które go określa, lecz wyłącznie w sensie ontologicznym, a nie epistemologicznym, tzn. poprzez poznanie nowych zależności może nastąpić odrzucenie starego pojęcia (staje się nieprzydatne) i obiektowi temu zostaje przypisane nowe pojęcie – ewolucja pojęcia miary czy rozwój pojęcia *continuum* jest dobrym tego przykładem. Jednak nowe pojęcie nie wnosi już nic nowego w strukturę ontologiczną tego obiektu. Można by więc ściślej zdefiniować strukturę ontologiczną obiektu matematycznego jako zbiór niezmienników przy przechodzeniu od jednego pojęcia do drugiego. Ta ewolucja pojęcia (odpowiadającego danemu obiektowi) może iść w dwóch kierunkach:

1) w kierunku abstrakcji, gdy pojęcie staje się coraz bardziej ogólne lub

2) w kierunku sprecyzowania, gdy pojęcie wchłania w siebie nowe treści[26].

Reasumując: do obiektu matematycznego docieramy poprzez różnego typu konstrukcje. Konstrukcje pojęć nie wyczerpują danego obiektu w sensie epistemologicznym, lecz wyczerpują go w sensie ontologicznym. Otrzymujemy tym samym platońską epistemologię matematyki, natomiast ontologię będącą pewną wersją konstruktywizmu. Oczywiście te tezy filozoficzne wymagałyby dokładniejszego potwierdzenia w faktach z zakresu historii matematyki. W pracy tej te uogólnienia opierają się na przedstawionej analizie powstania pojęć miary, *continuum*, wymiaru oraz przedstawionej przez Lakatosa historii pojęcia jednostajnej zbieżności. Jest to z pewnością za mało do tego, aby konstruować odpowiedzialną filozofię matematyki. Dopiero analiza innych pojęć matematycznych w ich historycznym i metodologicznym kontekście może uprawomocnić tego typu uogólnienia i nadać im bardziej precyzyjny kształt. Podkreślam, że tych uogólnień brak jest w filozofii matematyki Lakatosa, chociaż pewne jego rozważania przedstawione w dodatku 2 książki *Proofs and Refutations* mogą sugerować chęć pójścia w tym właśnie kierunku, tzn. w kierunku obronienia platonizmu w matematyce i pogodzenia go z pewnymi elementami konstruktywizmu.

Literatura

[1] P. S. A l e k s a n d r o w: *Poincaré and Topology*. „Proceedings of Symposia in Pure Mathematics" 1983 Vol. 39 part 2 s. 245–255.

[2] G. B o r e l: *Collected Logical Works*. Ed. P. Jourdain. Chicago-London 1916 s. 48.

[3] N. B o u r b a k i: *Elements d'histoire des mathematiques*. Paris 1960 s. 246–259.

[4] C. B. B o y e r: *Historia rachunku różniczkowego i całkowego*. PWN, Warszawa 1964 s. 377–418.

[5] *S* oznacza sumę częściową funkcji *f*.

[6] G. C a n t o r: *Gessammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Red. E. Z e r m e l o. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg–New York 1980 s. 229–236.

[7] A. L. C a u c h y: *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Politechnique*. Paris 1821 s. 131.

[8] I. D ą m b s k a: *Idee kantowskie w filozofii matematyki XX wieku*. „Archiwum Historii Filozofii i Myśli Społecznej" 1978 T. 24 s. 167–213.

[9] J. F o u r i e r: *Mémoire sur la Propagation de la Chaleur dans les Corpe Solides*. „Nouveau Bulletin des Science, par la Société Philomathique de Paris" 1808 Vol. 1 s. 112–116.

[10] C. J o r d a n: *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*. Paris 1905-1915 s. 28–31.

[11] I. L a k a t o s: *Proofs and Refutations*. Cambridge 1976 s. 127–134.

[12] I. L a k a t o s: *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*. W: *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam 1967 s. 199–202.

[13] I. L a k a t o s: *Falsification and Methodology of Scientific Research Programmes*. W: *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge 1970.

[14] H. L e b e s g u e: *Integrale, longueur, aire*. „Ann. di Mat." 1902 T. 7 s. 231–359.

[15] G. W. L e i b n i z: *Early Mathematical Manuscripts*. Chicago 1920 s. 147.

[16] P. G. L e j e u n e - D i r i c h l e t: *Werke*. Berlin 1889-1897 T.1 s. 117–132.

[17] A. L u b o m i r s k i: *Henri Poincaré'go filozofia geometrii*. PWN Warszawa 1974.

[18] G P e a n o: *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*. Torino 1887.

[19] H. P o i n c a r é: *La science et l'hypothese*. Paris 1902; przekład M. H. Horwitza. Warszawa 1908.

[20] H. P o i n c a r é. „Comptes Rendus" 1883 Vol. 97 s. 251-252; F. E. B r o w d e r: *Fixed point theory and nonlinear problems*. „Bulletin AMS" 1983 T. 9 z. 1 s. 1-39.

[21] Program ten został ogłoszony z okazji wstąpienia do senatu uniwersytetu w Erlangen w 1872 r., a ukazał się drukiem w: „Mathematische Annalen" 1893 Vol. 43.

[22] B. R i e m a n n: *Gesammelte mathematische Werke.* Leipzig 1876 s. 225–230.

[23] R. S i k o r s k i: *Funkcje rzeczywiste.* PWN Warszawa 1958 T. 1 s. 208.

[24] H. J. S m i t h: *Collected Mathematical Papers.* Oxford 1894 T. 2 s. 159–177.

[25] J. V u i l l e m i n: *Poincaré's Philosophy of Space.* W: *Space, Time and Geometry.* D. Reidel Publishing Company. Dordrecht-Holland 1973 s. 159–177.

[26] W. W ó j c i k: *Koncepcja dowodu a struktura rozwoju nauki.* „Studia Philosophiae Christianae" 1990 T.26 z. 1 s. 194–202.

[27] W. W ó j c i k: *Pewna interpretacja konwencjonalizmu Poincaré'go.* „Kwartalnik Filozoficzny" 1993 s. 21–43,

[28] Biorąc na przykład pod uwagę ciężar ciał możemy stwierdzić, że istnieją takie ciała o wadze A, B i C, że wielkości A i B (jak również B i C) są nierozróżnialne przy pomocy zmysłu dotyku, natomiast wielkości A i C są już rozróżnialne.

Wiesław Wójcik

AN APPLICATION OF THE METHOD OF PROOFS AND REFUTATIONS TO THE ANALYSIS OF HISTORY AND PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

The article daels with an application of the method of proofs and refutations to the studies of history and philosophy of mathematics. It is based on Lakatos' view that history and philosophy of mathemiatics are strictly connected and one without the other has not much sense. The connection is demonstrated through the analysis of the origins of the concepts of uniform convergence, measure and dimension. The concepts appear within the framework of the method of "proofs and refutations" which was discovered by Seidel in 1840s. These mathematical concepts offer possibilities of a deeper insight into such concepts of common language as division, continuity and quantity.