Wójcik, Wiesław

Kartezjański model naukowości a nowe idee w matematyce XIX wieku

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 41/3-4, 71-96

1996

Wiesław Wójcik
(Sosnowiec)

KARTEZJAŃSKI MODEL NAUKOWOŚCI A NOWE IDEE W MATEMATYCE XIX WIEKU

1. WPROWADZENIE

Myśląc o nauce nowożytnej, zwracamy uwagę przede wszystkim na wiek XVII, kiedy to pojawiły się główne idee i teorie zmieniające w sposób zasadniczy mentalność ówczesnego świata. W czasach ogólnego chaosu (wojen i epidemii wstrząsających całą Europą), rozwijająca się bujnie nauka zdawała się być jedyną wyspą racjonalności i porządku. Tylko w konstrukcjach matematycznych i w refleksji nad zasadami istnienia mógł odnaleźć, wracający z wojny trzydziestoletniej Kartezjusz, możliwość uporządkowania tego świata.

Energia wielkich umysłów tego okresu została skierowana na opracowanie schematu nauk i ich strukturę. Wystarczy wspomnieć o tak wspaniałych postaciach, jak: F. Bacon, Kartezjusz, Galileusz, Newton, Leibniz, Pascal, aby zadziwić się nad hojnością natury w tym czasie. I pomimo, iż wielkie idee naukowe (np. rachunek różniczkowy i całkowy, geometria analityczna, mechanika), które znalazły się na świeczniku w XVII wieku, miały swoich prekursorów w wiekach poprzednich, o powstaniu modelu nauki nowożytnej możemy mówić dopiero w tym właśnie stuleciu.

Dlaczego tak się stało – czy przyczyny były czysto zewnętrzne, wynikające, jak wspomniałem wcześniej, z faktu, że w morzu ogólnego nieładu oraz irracjonalności jedynie racjonalność nauki dawała jakąś ostoję; czy należy poszukiwać raczej wewnętrznych mechanizmów w samej nauce, pozwalających dostrzec wyrastanie nauki nowożytnej z pomysłów naukowych i filozoficznych wieków

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 41: 1996 nr 3–4 s. 71–95

poprzednich oraz ukazujących powiązania refleksji filozoficznej z powstawaniem nowych metod naukowych?

Myślę, że osoba Kartezjusza i jego praca naukowa sugerują pójście tą drugą drogą. To jego refleksja filozoficzna pozwoliła wznieść się ponad sprawy tego świata i w konsekwencji dać przynajmniej możliwość ich uporządkowania. Mimo więc różnorodnych okoliczności zewnętrznych, istotne przyczyny „zapanowania" nauki nad światem tkwią w tej właśnie refleksji i, w powstałej dzięki niej, metodzie naukowej.

Artykuł ten nie pretenduje do ukazania mechanizmów rządzących rozwojem nauki. Chodzi o wydobycie z refleksji Kartezjusza (częściowo Leibniza i Newtona) pewnych metod rozumowania, które, jak sądzę, stały się „obowiązujące i niekwestionowalne" na okres co najmniej dwóch stuleci. Ogólny schemat tych właśnie rozumowań nazwę „kartezjańskim modelem naukowości"[1]. Pokażę, iż zakwestionowanie tego właśnie modelu doprowadziło w XIX wieku do przełomu w matematyce i powstanie nowych jakościowo teorii. To, jak sądzę, potwierdzi słuszność wyboru takiego właśnie schematu. Chciałbym zaznaczyć, że model ten koncentruje się niemal wyłącznie na kartezjańskim projekcie nauki uniwersalnej i, związanym z tym projektem, problemem prawdy (konstrukcji teorii naukowych). A ponieważ ma on rangę jedynie filozoficznej konstrukcji, druga część artykułu jest poświęcona historycznej jego weryfikacji. Sądzę, że dopiero w kolejnym etapie (po weryfikacji empirycznej) można próbować precyzować i oceniać ten pierwotny model[2].

2. REFLEKSJA KARTEZJUSZA

2.1 Kartezjańskie kryteria prawdy. Według A.N. Whiteheada istnieją trzy podstawowe cechy, którymi powinien charakteryzować się umysł ludzki, aby nauka mogła stać się jego wytworem. Pierwszą z nich jest instyktowna wiara w porządek przyrody, przeciwstawiająca się nawet najbardziej sceptycznym i wyrafinowanym argumentom. Drugą cechą jest wiara w żelazną logikę, zgodnie z którą przebiegają zaobserwowane zdarzenia, a w konsekwencji wiara w możliwość ujęcia obserwowanych faktów w formę ogólnych praw i zasad. Te dwie cechy stanowią „racjonalny biegun" naukowego patrzenia na świat. Trzecią cechą, i zarazem „empirycznym biegunem" mentalności naukowej, jest świadomość, że warto obserwować „nieuniknione i uparte fakty", gdyż nie muszą one wynikać z uprzednio przyjętych reguł, a wręcz mogą być z nimi w sprzeczności.

Whitehead uważa, że te cechy generujące naukę epoka nowożytna przejęła w znacznym stopniu od epok poprzednich, jednak w oryginalny sposób umiała połączyć zainteresowanie faktami szczegółowymi z tendencją do abstrakcyjnego uogólniania[3]. Na przykładzie wielu uczonych tego okresu można pokazać, jak ówczesna nauka rozumiała napięcie między wiarą w racjonalność świata a wiarą w realność upartych faktów i jak radziła sobie z usuwaniem tego napięcia. Przyjrzyjmy się temu bliżej, analizując pod tym właśnie kątem refleksję filozoficzno-naukową Kartezjusza.

Celem Kartezjusza było znalezienie „absolutu poznawczego", a więc takiego elementu rzeczywistości, który nie poddaje się najbardziej radykalnemu wątpieniu. Ten element ma stanowić podstawę w budowie nauki uniwersalnej (*mathesis universalis)*, mającej wyjaśniać wszystko, co dotyczy porządku i miary (matematyzacja wiedzy), bez wnikania w pozostałe własności przedmiotów. Ponadto proces budowy wiedzy pewnej musi opierać się na następujących zasadach:

Zasada 1: „nigdy nie przyjmować za prawdziwą żadnej rzeczy, zanim by jako taka nie została rozpoznana przeze mnie w sposób oczywisty".

Zasada 2: „każde z badanych zagadnień dzielić na tyle cząstek, na ile by się dało i na ile byłoby potrzebne dla najlepszego ich rozwiązania".

Zasada 3: „wszelkie badania rozpoczynać „od przedmiotów najprostszych i najdostępniejszych poznaniu" i stopniowo dochodzić do „przedmiotów bardziej złożonych".

Zasada 4: „każde rozumowanie i wszelkie wyliczenia powinny być tak „całkowite i powszechne, aby być pewnym, że nic nie zostało pominięte"[4].

Podajmy pewną interpretację powyższych zasad ujmując je w formę dwóch kryteriów prawdy.

Pierwsze kryterium prawdy

Zauważmy, że zasady 1 i 4 odwołują się do rzeczywistości, leżącej u podstaw kryterium prawdy – zanim uznamy, że coś jest prawdziwe (a więc poznane w sposób jasny i wyraźny), musimy doświadczyć oczywistości tej rzeczy; co więcej, istnieje taki próg poznawczy, po którego przekroczeniu wkraczamy w obszar oczywistości (poznanie całkowite i powszechne). Te właśnie zasady tkwią u podstaw racjonalnego bieguna świadomości naukowej.

Drugie kryterium prawdy

Zasady 2 i 3 wprowadzają inne kryterium prawdy – gdy operujemy pewnym ciągiem dowodowym i kolejne elementy tego ciągu posiadają „większą treść", niż poprzednie, to tym samym zbliżamy się do rzeczywistości. Prawda (dowodu, a w konsekwencji tego, czego dowód dotyczy) ujawnia się, gdy kolejne elementy ciągu dowodowego mają więcej treści, niż elementy poprzednie. W formalnej strukturze dowodu zawarta jest metoda dotarcia do rzeczywistości. To kryterium prawdy opiera się na wierze w istnienie tego typu ciągów dowodowych. Cały wzrost informacji dokonuje się przy przejściu pomiędzy kolejnymi elementami ciągu, natomiast samo przejście graniczne nie wnosi już nic nowego. W tych z kolei zasadach mamy do czynienia z empirycznym biegunem świadomości naukowej.

Przestrzeganie tych zasad daje, według Kartezjusza, pewność dotarcia do wszelkich rzeczy – nawet tych najbardziej ukrytych i niedostępnych. Przykładem realizacji tych zasad jest metoda dotarcia do *cogito*, jak również budowana przez niego geometria analityczna i dowód istnienia Boga[5].

2.2. Absolut poznawczy. Przeprowadzony przez Kartezjusza proces radykalnego wątpienia ma być oczyszczeniem umysłu ze wszelkich złudzeń i fałszywych mniemań oraz zbędnej wiedzy. Jego ukoronowaniem jest doświadczenie prawdziwości zdania: *myślę, więc jestem.* Tym samym wyłania się z morza niepewności i niebytu *cogito* – podmiot myślący. *Cogito* to jednak nie tylko wynik stosowania przyjętych reguł rozumowania, lecz przede wszystkim absolut poznawczy dający możliwość stosowania tych reguł. *Cogito*, to „pierwszy poruszyciel" procesu poznawczego – stwierdzenie *„myślę, więc jestem"*, to nie tyle stwierdzenie pewnego faktu psychologicznego, lecz przede wszystkim ukazanie ontycznej zależności bytu od myśli. Ponadto okazuje się, że granicą radykalnego wątpienia jest właśnie *cogito*; wolność, która próbuje być absolutem, zatrzymuje się na fakcie myślenia. Mówiąc metaforycznie, myślenie jest kresem wolności, jej celem i ograniczeniem[6].

Stworzona przez Kartezjusza geometria analityczna miała łączyć w sobie zalety geometrii (łatwiejsze operowanie pewnymi abstrakcjami matematycznymi dzięki przedstawieniu geometrycznemu) oraz algebry (łatwiejsze dokonywanie operacji na prostych wyobrażeniowo liczbach), a unikać ich wad (geometria domaga się ciągłej twórczej aktywności, a tym samym nuży wyobraźnię i umysł, natomiast algebra daje ogólne prawidła liczenia, nie dając jednak twórczej wiedzy). Metoda ta łączyła więc jasne i wyraźne wyobrażenia geometryczne z jasnymi i wyraźnymi dla umysłu operacjami na liczbach czy na ogólnych symbolach algebraicznych.

Dane figury geometryczne można więc wyrażać za pomocą układów liczb czy równań i poznawać właściwości tych figur, wykorzystując operacje na liczbach. Pozostajemy więc w obszarze działań umysłu, które są dla niego możliwie najprostsze, a co najważniejsze pozwalają, opierając się na tym co jasne i wyraźne, krok po kroku budować całą wiedzę o świecie, również o tym znajdującym się poza umysłem.

„I tutaj – jak sądzę – najbardziej godne zastanowienia jest to, że znajduję w sobie niezliczoną ilość idei pewnych rzeczy, o których nie można powiedzieć, że są niczym, chociaż może nie istnieją nigdzie poza mną. A chociaż myślę w jakiś sposób o nich zależnie od mej woli, to jednak nie są przeze mnie wymyślone, lecz mają swoje prawdziwe i niezmienne natury. Gdy na przykład wyobrażam sobie trójkąt, to choć może taka figura nigdzie na świecie nie istnieje poza moją świadomością ani nigdy nie istniała, posiada jednak bez wątpienia jakąś określoną naturę, czyli istotę, czyli formę, czyli formę niezmienną i wieczną, która ani nie została przeze mnie wymyślona, ani nie jest od mego umysłu zależna; wynika to z tego, że można udowodnić różne własności tego trójkąta, jak np. że jego kąty są równe dwóm prostym, że naprzeciw największego jego kąta leży najdłuższy bok i tym podobne, które to własności teraz jasno poznaję, czy chcę, czy nie chcę, chociaż nigdy przedtem w żaden sposób nie myślałem o nich, gdy sobie wyobrażałem trójkąt. Wobec tego nie zostały one przeze mnie wymyślone"[7].

Zauważmy, że kartezjański absolut poznawczy to nie tylko początek wszelkiej wiedzy, lecz również metoda jej konstrukcji. Oczyszczając różne obszary wiedzy z wszelkich niejasności i zbędnych zawiłości, docieramy w granicy do elementów postrzeganych jasno i wyraźnie, w oparciu o które możemy już konstruować wiedzę pewną. Te elementy, to quasi-absoluty poznawcze. Jednak, jak zobaczymy w dalszej części, ich ranga poznawcza jest zależna od „dowodu na istnienie absolutu poznawczego".

2.3. Dowód na istnienie absolutu poznawczego. Przejdźmy teraz do roli, jaką pełni w budowie *mathesis universalis* dowód na istnienie Boga.

„Z pewnością znajduję w sobie istnienie Jego, to jest bytu najdoskonalszego, jak idee jakiejkolwiek figury czy liczby; niemniej jasno i wyraźnie pojmuję, że do Jego natury należy wieczne i aktualne istnienie, jak pojmuję, że do natury figury czy liczby należy to, czego dowodzę o tej figurze czy liczbie. A więc, choćby nie wszystko było prawdziwe, co w tych ostatnich dniach rozważałem, to istnienie Boga powinno mieć dla mnie co najmniej ten sam stopień pewności, jaki dotychczas posiadały prawdy matematyczne"[8].

Kartezjański dowód na istnienie Boga ma więc schemat następującego rozumowania warunkowego: jeśli istnieją poprawne dowody matematyczne (przeprowadzane zgodnie z przyjętymi zasadami rozumowania), to również poprawny jest dowód na istnienie Boga. Stąd, między innymi, bierze się projekt nauki uniwersalnej (*mathesis universalis*), której prawdziwość i skuteczność potwierdziłyby poprawność powyższego schematu rozumowania, a tym samym stanowiłyby istotne uzupełnienie przeprowadzonego dowodu.

Istnieje też druga istotna zależność między projektem nauki uniwersalnej a dowodem na istnienie Boga.

Zauważmy, że Kartezjusz, badając idee znajdujące się w umyśle, odkrywa:

1. Dwie idee pierwotne związane z substancją myślącą i określające tę substancję – są to idea trwania (w konstrukcji nauki wyrażająca następstwo logiczne danych faktów) oraz liczby.
2. Cztery idee pierwotne dotyczące substancji rozciągłej – są to idee: rozciągłości, kształtu, położenia i ruchu.

Oczywiście idee te zajmują centralne miejsce w budowanej przez Kartezjusza nauce uniwersalnej. Różnice między ideami określającymi substancję myślącą a ideami związanymi z substancją rozciągłą sprawiają, że pomiędzy strukturą świata materialnego (substancja rozciągła) a naszym umysłem pojawia się przepaść – nie możemy poznać tej struktury bezpośrednio. Pojawiają się nowe kryteria prawdy (o których wspomniałem poprzednio) umożliwiające poznanie struktury świata. Przeprowadzony przez Kartezjusza dowód na istnienie Boga jest próbą zastosowania tych kryteriów, ukazaniem ich skuteczności i sposobu realizacji na przykładzie o najwyższym stopniu trudności.

Idea Boga pojawia się u Descartes'a jako jasna i wyraźna idea pierwotna (wrodzona) umysłu; jednak od momentu przedstawienia dowodu na istnienie Boga, budowana *mathesis universalis* przestaje być konstrukcją wyłącznie hipotetyczną i subiektywną, lecz przyjmuje status wiedzy pewnej i obiektywnej. Jeśli, w oparciu o przyjęte zasady rozumowania, można udowodnić istnienie (Boga), a nie tylko własności obiektów (matematycznych), to tym samym wzrasta ranga i siła wprowadzonych metod. Tym samym, Bóg w systemie Kartezjusza pełni rolę absolutu poznawczego (podobnie jak *cogito)* – jest początkiem i gwarantem wiedzy obiektywnej (w szczególności o świecie pozaumysłowym)[9].

Jak wspomniałem wcześniej, radykalne wątpienie zatrzymuje się na doświadczeniu absolutnej pewności zdania: *myślę, więc jestem* i od tego momentu rozpoczyna się proces poznawczy. Jednak sam fakt wątpienia świadczy o niedoskonałości tego, kto wątpi, a więc podważa wiarygodność wiedzy przez niego uzyskanej.

Z drugiej strony, jak pisze Kartezjusz, „gdybym był sam jeden i niezależny od czego bądź innego, tak że z siebie samego posiadałbym choć trochę tej doskonałości, przez którą uczestniczyłem w bycie doskonałym, z tej samej racji mógłbym sam uzyskać całą resztę, której braku byłem świadom, i tym sposobem samemu być nieskończonym, wiecznym, niezmiennym, wszystkowiedzącym, wszechpotężnym i w końcu posiadać wszelkie doskonałości, które mogłem dostrzec w Bogu"[10].

Otrzymujemy zasadniczą sprzeczność – *cogito* jest doskonałe i zarazem nie jest. Takie stwierdzenie, przyjęte na początku konstrukcji wiedzy, przekreśla możliwość otrzymania wiedzy pewnej i obiektywnej, a tak naprawdę wszelkiej wiedzy. W celu uniknięcia tej sprzeczności (tzn. sprzeczności w samym pojęciu *cogito*) należy przyjąć istnienie Boga.

W powyższym rozumowaniu z całą jasnością wystąpiła następująca dysjunkcja: albo przyjmiemy założenie o istnieniu Boga, albo otrzymamy całkowitą dowolność wyprowadzanych stwierdzeń i brak jakichkolwiek kryteriów prawdy. Radykalne wątpienie zatrzymało się na fakcie *cogito*, jednak nieprzyjęcie założenia o istnieniu Boga sprawia, że proces wątpienia posuwa się dalej i prowadzi do zniszczenia samego *cogito*. Jak stąd widać, stwierdzenie: myślę, więc jestem nie jest bezwarunkowe, lecz zawiera podstawowe zasady rozumowania i prawa logiki, co jest jednak zgodne z przyjętym przez Kartezjusza schematem budowy wiedzy.

Zwróćmy uwagę na to, że rozumowanie Kartezjusza ma postać błędnego koła: aby móc rozpocząć budowę wiedzy obiektywnej trzeba przyjąć założenie o istnieniu Boga; założenie to jednak musi wynikać z przeprowadzonego dowodu na istnienie Boga; aby znów ten dowód był wiarygodny, *cogito*, które go przeprowadza musi być wolne od wszelkich fałszywych mniemań i niedoskonałości (chyba, że przyjmiemy założenie o istnieniu Boga); jednak *cogito* powstało jako efekt wątpienia i jest zarazem podmiotem tego wątpienia, potwierdza więc tym samym swoją niedoskonałość.

Możliwość rozerwania tego błędnego koła tkwi w cytowanej już myśli Kartezjusza: „[...] istnienie Boga powinno mieć dla mnie co najmniej ten sam stopień pewności, jaki dotychczas posiadały prawdy matematyczne"[11]. Trzeba więc wykazać, że prawdy matematyczne mają rangę uniwersalną i są opisem nie tylko praw rządzących myśleniem, lecz również świata materialnego, a tym samym i dowód na istnienie Boga stanie się pewny i obiektywny. Sądzę,że w znacznym stopniu rozwój nauki nowożytnej jest próbą wykazania tego faktu i rzeczywiście potwierdza tak wysoką rangę prawd matematycznych w strukturze wiedzy. Pierwszym przykładem (nie licząc geometrii analitycznej) jest mechanika Newtona powstała w niedługim czasie po projekcie Kartezjusza.

3. KARTEZJAŃSKI MODEL NAUKOWOŚCI – KONSTRUKCJA FILOZOFICZNA

Model, który chcę skonstruować, ma być modelem filozoficznym. Co to znaczy? Po pierwsze, tak jak model matematyczny jest niesprzecznym i pełnym układem struktur matematycznych reprezentującym inne obiekty i struktury np. fizyczne czy biologiczne, tak model filozoficzny ma być spójnym układem idei filozoficznych poruszających wyobraźnię i dającym rozumienie problemów spoza obszaru samej filozofii. Celem modelu matematycznego jest, między innymi, przewidywanie zdarzeń w świecie fizycznym i projektowanie nowych eksperymentów. Analogicznie model filozoficzny ma ukazywać filozoficzne aspekty problemów i zagadnień nauk szczegółowych oraz prowadzić do racjonalnej rekonstrukcji procesu historycznego.

Od modelu nie tyle wymaga się by był prawdziwy, ile, aby był dostatecznie ogólny i prosty, użyteczny w realizacji zamierzonych celów.

3.1. Idee naukowe Leibniza. Przechodząc do konstrukcji zapowiedzianego modelu, zwróćmy uwagę na pewne, charakterystyczne dla tego modelu idee Leibniza, który, podobnie jak Kartezjusz, chciał zrealizować ideał nauki uniwersalnej. Naukę tę nazwał „charakterystyką uniwersalną".

Według Leibniza człowiek ma dostęp do pewnych prawd analitycznych, które wyrażają zasadę harmonii przedustawnej ustanowionej przez Boga. Należy więc wybrać niewielką liczbę prostych pojęć, których treść poznawana jest przez rozum możliwie najwyraźniej i przypisać tym pojęciom w sposób jednoznaczny symbol tzn. ich charakter. Mając już takie charaktery, mamy w swoim ręku prawdy analityczne jako konkretne związki pomiędzy charakterami, odkrywane w sposób bezpośredni przez rozum. Znając prawdy analityczne, mamy wgląd w zasadę harmonii przedustawnej. Przez kombinację symboli odpowiadających prostym pojęciom, możemy otrzymać każde, otrzymane przy pomocy innych środków, zdanie, i tym samym udowodnić jego prawdziwość lub fałszywość.

Leibniz próbował zrealizować tę ideę pracując w zakresie logiki (próba formalizacji myślenia) – bez większego powodzenia. Ponieważ, podobnie jak dla Kartezjusza, czymś pozytywnym była dla niego prostota rachunków arytmetycznych, więc podał ideę rachunku geometrycznego (nazwał go „analizą położenia" – *analysis situs),* w którym rolę liczb pełniły figury geometryczne, a odpowiednikiem działań na liczbach było wzajemne położenie figur geometrycznych. Idea ta została rozwinięta w XIX i w XX wieku w postaci topologii.

Istnieje jeszcze trzeci punkt, w którym Leibniz próbował zrealizować ideę charakterystyki uniwersalnej (kombinatorycznej), a dotyczy on rachunku nieskończenie małych; tutaj jego prace zakończyły się częściowo powodzeniem. Jako twórca rachunku nieskończenie małych stał się Leibniz, obok Newtona, współtwórcą rachunku różniczkowego i całkowego. Zgodnie ze swoją ideą charakterystyki uniwersalnej, Leibniz wyszedł od dwóch podstawowych pojęć: pojęcia sumy nieskończenie małych (pojęcie to występowało przy obliczaniu pól i objętości figur) oraz pojęcia nieskończenie małych różnic pojęcie to było wykorzystywane przy znajdywaniu równań stycznych do krzywych).

Pojęciom tym przypisał symbole: „$\int$" (symbol całki) – dla oznaczenia sumy nieskończenie małych i „*dx*" (symbol różniczki) – dla oznaczenia nieskończenie małych różnic. Cała analiza matematyczna miała być sprowadzona do odpowiedniej kombinacji tych pojęć, zgodnie z przyjętymi regułami operowania nimi (reguły całkowania i różniczkowania).

3.2. Synteza Newtona. W 1687 r. wychodzi dzieło Isaaca Newtona *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Jedną z głównych idei Newtona można ująć w stwierdzeniu, że każda próba budowy systemu filozoficznego musi się opierać na zasadach i twierdzeniach matematycznych zastosowanych do opisu zjawisk przyrody. Poznawanie świata musi rozpoczynać się od opracowania formalizmu matematycznego; następnie obserwowane zjawiska i związki między nimi mają być ujęte w formę praw i równań matematycznych, co prowadzi do sformułowania maksymalnie ogólnych praw przyrody i pozwala czynić przewidywania nowych zjawisk; dopiero ostatnim etapem ma być dociekanie przyczyn działania, takich, a nie innych praw w przyrodzie.

Newton zakwestionował wcześniejszy dogmat, że to metafizyka dostarcza przyrodnikowi ogólnych metod badań i podpowiada rozwiązania. Według Newtona metafizyka ma być zwieńczeniem pracy polegającej na tworzeniu formalizmu matematycznego, obserwacji zjawisk i fizycznej analizie konsekwencji ujęcia tych zjawisk w formę matematyczną.

U Newtona z jednej strony jest idealna i ścisła matematyka, z drugiej fizyka, która zajmuje się przybliżoną konstrukcją form matematycznych. Matematyka jest więc idealizacją fizyki, natomiast fizyka przybliżeniem matematyki. Najważniejsze jest jednak to, że różnicę pomiędzy matematyką a fizyką można sprowadzić do stopnia ścisłości – między prawami matematyki a fizyki istnieje ciągłe przejście[12]. Dzięki tej ciągłości staje się możliwe przejście ze świata myśli, w którym powstaje matematyka, do świata materialnego, bez tworzenia żadnych dodatkowych bytów (jak np. kartezjańska szyszynka).

Uważam, że wyniki naukowe Newtona są zarazem dowodem możliwości kartezjańskiej koncepcji *mathesis universalis*. Siłą koncepcji Newtona jest, między innymi, to że stworzył rachunek różniczkowy nadający się do opisu zjawiska ruchu. Pojęcie ruchu, które od czasów starożytnych przyprawiało uczonych o zawrót głowy (*vide* paradoksy Zenona z Elei) zostało zmatematyzowane – okazało się, że można je uczynić niesprzecznymi. Znaczy to, że sprzeczności między prawami logiki a światem zjawisk (na której opierały się paradoksy Zenona) jest tylko pozorna[13].

Podobnie argumentem za *mathesis universalis* było prawo powszechnej grawitacji Newtona. Ukazywało ono, że nie ma zasadniczej sprzeczności między światem podksiężycowym a nadksiężycowym – obowiązują w nich te same prawa natury. Świat ma więc strukturę jednorodną tzn. badając nawet mały obszar świata, odkrywamy prawa, którym podporządkowana jest każda jego część.

Dzięki teoriom skonstruowanym przez Newtona, pojawia się możliwość zasypywania przepaści między różnego rodzaju „światami", również między światem myśli z światem fizycznym. Synteza Newtona polegała na podporządkowaniu wszystkich dziedzin rzeczywistości kontroli metod racjonalnych. Jeśli metoda natrafiała na problemy, których nie umiała rozwiązać (np. niestabilność układu planetarnego, sposób przekazywania oddziaływań grawitacyjnych), to w konsekwencji możliwe były dwie drogi:

1. Odwołać się „od początku" tzn. wyjaśnić trudności w funkcjonowaniu świata nadzwyczajną interwencją Stwórcy. Tą drogą poszedł Newton, wprowadzając „Boga przerw" (*God of gaps*) – aby obronić doskonałość i racjonalność wprowadzonych przez siebie metod, wolał raczej zakwestionować doskonałość świata, dopuszczając konieczność ciągłych interwencji i poprawek ze strony Boga.
2. Szukać innych metod racjonalnych, wierząc w doskonałość świata (tą drogą poszedł np. Leibniz).

Poddanie całej rzeczywistości kontroli metod racjonalnych może prowadzić do dość typowej pułapki: same metody racjonalne muszą być również poddane tej kontroli. Istnieje więc ryzyko, że rozum stanie się Absolutem (jak sądzę, tak stało się w koncepcji Hegla).

W przypadku Kartezjusza wyjściem z tej pułapki jest ukazanie dwóch różnych metod badania rzeczywistości – metody algebraicznej i geometrycznej.

Podobnie jest w przypadku mechaniki Newtona, gdzie związek fizyki z matematyką ukazuje możliwość budowy *episteme* – mechanika to geometria rozpatrywana z pewną dokładnością, a tym samym geometria poddana jest pod osąd doświadczenia. Eksperyment jest więc innego rodzaju metodą racjonalną wykorzystującą metodę przybliżeń, pomiarów z pewną dokładnością itp. Geometria natomiast sprawdza wyniki doświadczenia podczas rozwijania faktów doświadczalnych w konstrukcje czystej geometrii. Dla Newtona racjonalność ma więc dwa istotnie różne oblicza – oblicze wiedzy eksperymentalnej oraz matematycznej i tylko dzięki temu nie staje się Absolutem[14].

3.3. Ogólny schemat kartezjańskiego modelu naukowości. Proponowany przeze mnie model naukowości składa się z następujących elementów:

1. Obszar subiektywności – w analizach Kartezjusza temu obszarowi odpowiada substancja myśląca.
2. Obszar obiektywności – tu z kolei odpowiada mu substancja rozciągła.

Między tymi obszarami pojawia się charakterystyczne dla epoki nowożytnej napięcie – jest to napięcie między racjonalnością konstrukcji intelektu a realnością pozaumysłowych faktów. Celem działalności naukowej ma być zlikwidowanie tego napięcia przy pomocy ogólnych i abstrakcyjnych metod. Natomiast sama możliwość jego likwidacji jest oparta na trzech kluczowych faktach metafizycznych, stanowiących kolejne elementy modelu (3, 4, 5).

3. Istnienie absolutu poznawczego (np. doświadczenie istnienia *cogito*).
4. Zasada ciągłości, którą wypowiem słowami Leibniza:

> „W każdym domniemanym przejściu, kończącym się na jakimś kresie, dozwolone jest ustanowienie pewnego ogólnego rozumowania, którym można objąć także końcowy kres”[15].

Jak wspomniałem wcześniej, analizując drugie kryterium prawdy, przejście graniczne nie daje żadnej nowej informacji – ewentualny jej wzrost odbywa się przy przejściu pomiędzy kolejnymi etapami rozumowania (elementami ciągu).

Również ciągłość przejścia między zasadami mechaniki a prawami geometrii Newtona ukazuje tę kwestię – geometria to tylko idealizacja mechaniki, a mechanika to tylko przybliżenie geometrii.

Dzięki tym dwóm kryteriom obszar subiektywności zostaje zanurzony w obszarze obiektywności, raz jako obiekt rozdzielający elementy tego obszaru (istnienie progu poznawczego przy doświadczaniu oczywistości), a w drugim przypadku jako obiekt, dzięki któremu możliwe jest ciągłe przejście między tymi elementami (istnienie ciągów dowodowych, które ujmują badaną rzeczywistość).

5. Dowód na istnienie absolutu poznawczego (kartezjański dowód na istnienie Boga). Dzięki temu dowodowi obszar obiektywności zostaje zanurzony w obszar subiektywności.

Model ten składa się więc z dwóch (pierwotnie) rozłącznych obszarów połączonych przy pomocy absolutu poznawczego i zasady ciągłości z jednej strony oraz dowodu na istnienie absolutu poznawczego z drugiej.

3.4. Zasada ciągłości. Sądzę, że szczególnego wyjaśnienia wymaga sposób w jaki zasada ciągłości „zanurza” obszar subiektywności w obszarze obiektywności. Spójrzmy w tym celu na to, jak Leibniz dowodzi pewnych własności i twierdzeń w ramach tworzonego przez siebie rachunku różniczkowego. W tym przypadku zasada ciągłości przyjmuje następującą postać:

„Tymczasem pojmujemy nieskończenie małą nie jako zero proste i absolutne, lecz jako zero względne, to znaczy jako wielkość znikającą, która jednak zachowuje charakter tej która znika”[16].

Oznacza to, między innymi, że różniczka zachowuje charakter liczbowy.

Dla Leibniza zasada ciągłości była pomostem między różniczkami (a więc wielkościami nieskończenie małymi) a rzeczywistością. Dlatego używał symboli *d(x)* i *d(y)* dla oznaczenia różnic skończonych i na tych symbolach wykonywał obliczenia. Dopiero po zakończeniu rachunków opuszczał nawiasy i wynik otrzymywał dla różniczek *dx* i *dy*. Uważał, że tego typu „sztuczka” jest dopuszczalna np. przy obliczaniu pochodnych, gdyż stosunek $\frac{dy}{dx}$ zawsze można sprowadzić do stosunku $\frac{d(y)}{d(x)}$.

Przypisywał więc Leibniz różniczkom pewne „rzeczywiste” własności, jakie przysługują tym wielkościom, na których dokonywał obliczenia, i które przy przejściu granicznym stają się rożniczkami. Tak jak różniczka była nieskończenie małą różnicą, która miała zawierać w sobie własności różnic skończonych, podobnie pochodna była wyłącznie stosunkiem różniczek i musiała posiadać ich własności. Pojęcia, które otrzymuje się w wyniku takich nieskończonych operacji (np. operacji przejścia na granicy) mają sens tylko o tyle, o ile są w stanie wchłonąć w siebie własności pojęć, które je określają.

Zasada ciągłości odgrywała ogromną rolę nie tylko w nauce budowanej przez Leibniza, lecz również w całym późniejszym rozwoju nauki. Pokazuje ona, że możliwe jest wydostanie się z obszaru *cogito*, w oparciu o idee w nim zawarte i dojście do tego, co istnieje niezależnie od *cogito* – możliwe jest tym samym odkrywanie zasad harmonii przedustawnej, czyli możliwe jest zanurzenie obszaru subiektywności w obszarze obiektywności[17].

4. PRZEBUDOWA MODELU KARTEZJAŃSKIEGO

4.1. Powstanie zasady granicznej – przełom w matematyce XIX wieku. W XVII i XVIII wieku mamy do czynienia z intensywnym rozwojem analizy matematycznej (po pracach Newtona i Leibniza). Rozrastający się gmach analizy zaczął natrafiać na trudne do rozwiązania problemy i sprzeczności. Uznano wtedy, że należy określić podstawowe pojęcia analizy, podać ich ścisłe definicje i dopiero na tej podstawie przeprowadzić dalsze rozważania. Ten okres rozwoju matematyki nosi nazwę „arytmetyzacji analizy”[18]. Wielu wybitnych matematyków takich jak: Cauchy, Abel, Bolzano, Riemann, Weierstrass itd. brało w tym udział. Wtedy to podano definicje ciągłości, granicy, funkcji, całki, pochodnej itd.

Program ten wiązał się z częściowym zakwestionowaniem „kartezjańskiego modelu naukowości". Pojawiła się nowa zasada rozumowań i badań, będąca w pewnym sensie odwróceniem zasady ciągłości (nazwę ją „zasadą graniczną"): Jeśli mamy układ elementów i dokonamy na nich pewnej „nieskończonej" operacji (np. przejście do granicy), to element, który otrzymamy jako wynik tej operacji, może mieć zasadniczo inne własności, niż elementy wyjściowe.

Zasadę tę stosował np. Cauchy i stała się ona istotnym składnikiem umożliwiającym przeprowadzenie dowodu hipotezy Leibniza (granica ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą) po uprzednim podaniu definicji ciągłości i granicy; w konsekwencji stała się ta zasada przyczyną odkrycia błędu w dowodzie hipotezy Leibniza i doprowadziła do pojawienia się pojęcia jednostajnej zbieżności[19].

W schemacie określonym przez zasadę graniczną konstruuje się pewne struktury („całości"), które dopiero trzeba poznawać i badać. W interesujący sposób splatać się zaczyna ze sobą racjonalizm i empiryzm – umysł nie posiada możliwości intuicyjnego ujęcia skonstruowanego przez siebie obiektu, lecz musi go badać, jakby to był obiekt empiryczny, niezależny od niego. W tym właśnie uwidacznia się idea, na której opiera się zasada graniczna tzn. skonstrowana matematyczna struktura może mieć nowe własności, które wcześniej nie występowały i nie były w ogóle brane pod uwagę; te własności trzeba dopiero poznać przy pomocy nowych metod i badań.

4.2. Zasada graniczna a powstanie topologii. Sądzę, że powstanie w XIX wieku nowej matematycznej teorii – topologii – jest dobrym przykładem ukazującym mechanizm działania zasady granicznej i jej niezbędność przy pojawianiu się pewnych idei topologicznych.

Spójrzmy na wypowiedź Listinga (był uczniem Gaussa i pierwszy użył terminu „topologia"):

„Pod pojęciem topologii będziemy rozumieć naukę o modalnych związkach obrazów przestrzennych lub o prawach spójności, wzajemnego położenia punktów, linii, powierzchni, ciał i ich części, lub zbioru w przestrzeni niezależnie od związku z miarą i wielkością"[20].

Przez związki modalne Listing rozumie te własności figur, które zachowują się przy odwzorowaniach ciągłych. Topologia bada więc, według Listinga, niezmienniki odwzorowań ciągłych (później zawężono badania topologii do niezmienników homeomorfizmów).

Przyjmując, jako ogólnie obowiązującą zasadę ciągłości należałoby uznać, że badania niezmienników odwzorowań, w ramach osobnej teorii, nie ma większego sensu, gdyż niezmienniki stanowią integralną część struktury odwzorowań. Cała informacja, którą moglibyśmy otrzymać badając niezmienniki, zawarta już jest w strukturze tych odwzorowań.

Jednym ze źródeł topologii są badania dotyczące funkcji zespolonych $f(x+iy)=u+iv$. Badania te rozpoczął Riemann w swojej rozprawie doktorskiej, która ukazała się w 1851 roku[21]. W badaniach tych, między innymi, chodziło o podanie takich warunków na funkcję zespoloną, aby przekształcała ona obszar płaszczyzny (tzn. zbiór spójny i otwarty) na obszar. Te warunki (między innymi tzw. warunki Cauchyego – Riemanna) doprowadziły do powstania pojęcia funkcji analitycznej. Natomiast rozpatrywanie funkcji analitycznych wieloznacznych doprowadziło do powstania pojęcia powierzchni riemannowskiej. W przypadku funkcji wieloznacznej otrzymujemy całą wiązkę takich powierzchni. Dana funkcja wieloznaczna „rozpada się" więc na klasę funkcji jednoznacznych (każdą z takich funkcji otrzymujemy, gdy ograniczymy jej zbiór wartości do jednej z powierzchni riemannowskich). Funkcje należące do tej klasy mają wspólną strukturę – jest nią struktura topologiczna. Oznacza to, że powierzchnie riemannowskie danej funkcji wieloznacznej są między sobą homeograficzne. Riemann dostrzegł potrzebę badań topologicznych powierzchni odkrytych podczas analizy funkcji zespolonych i rozpoczął te badania wprowadzając pojęcie „liczb Bettiego" powierzchni – liczby te są niezmiennikami topologicznymi i tym samym dają charakterystykę topologiczną powierzchni.

Zauważmy zresztą, że pojęcie struktury topologicznej pojawia się już przy geometrycznej interpretacji liczb zespolonych. Mając dwie dowolne liczby zespolone (na płaszczyźnie) można przejść od jednej z nich do drugiej w sposób ciągły na nieskończenie wiele sposobów (inaczej, niż w przypadku dwóch punktów na prostej, gdzie przejście ciągłe od jednego punktu do drugiego jest jednoznaczne).

O możliwości interpretacji geometrycznej liczb zespolonych na płaszczyźnie i o kwestii nieskończenie wielu odwzorowań ciągłych przekształcających jeden punkt w drugi pisał Gauss w 1812 roku[22].

W tym spostrzeżeniu tkwi już zalążek metod topologicznych. Z punktu widzenia możliwości pewnych ciągłych przekształceń płaszczyzna ma znacznie bogatszą strukturę niż prosta. Wskazuje to na zasadniczą różnicę między prostą a płaszczyzną w „pewnym sensie" – tym sensem jest struktura topologiczna (nie można przejść w sposób topologiczny z prostej na płaszczyznę).

Oczywiście wszystkie te rozważania geometryczne nie mogłyby doprowadzić do powstania topologii jako gałęzi matematyki, gdyby nie uściślenie pojęć granicy, ciągłości i funkcji (ścisła definicja tych pojęć była wynikiem wspomnianego wcześniej nurtu w matematyce XIX wieku dotyczącego arytmetyzacji analizy).

Spójrzmy na to, co jest istotne w programie badań topologicznych. Po dokonaniu pewnej operacji możemy otrzymać zupełnie nową strukturę, której własności nie wynikają z własności elementów, na których dana operacja była wykonana. Dlatego jest sens wydzielić niezmienniki danej operacji (w tym przypadku niezmienniki odwzorowań ciągłych) i utworzyć teorię, która je będzie badać. Badanie tych niezmienników rzeczywiście oddziela daną teorię matematyczną od innej, gdyż obiekt powstały w wyniku danej operacji posiada również własności, które wcześniej nie występowały, a do których nie mamy dostępu metodami pierwotnej teorii.

4.3. Zasada graniczna a teoria mnogości. Kolejnym przykładem weryfikującym podany model są pewne idee, związane z powstaniem jednej z najważniejszych, jak sądzę, teorii matematycznych. Chodzi o teorię mnogości, stworzoną pod koniec XIX wieku przez Georga Cantora. W konstrukcji tej teorii zasada graniczna odgrywała istotną rolę.

W teorii mnogości kluczową rolę odgrywa pojęcie zbioru nieskończonego oraz liczby kardynalnej i porządkowej. Przypomnijmy najpierw zasadę, na której opiera się rozumienie zbiorów nieskończonych (tę zasadę można traktować jako definicję zbioru nieskończonego):

Zbiór jest nieskończony, jeśli pewien jego podzbiór właściwy jest z nim równoliczny tzn. istnieje między nimi funkcja wzajemnie jednoznaczna.

Można podać dwie skrajne interpretacje tej definicji:

1. Ta definicja jest sprzeczna z dziewiątym aksjomatem Euklidesa, który mówi, że całość jest większa od części.
2. Nie ma żadnej kolizji między tymi zdaniami, gdyż aksjomat Euklidesa obowiązuje na wyższym stopniu ogólności, niż jej „odpowiednik" w teorii mnogości. Analogicznie jest z zasadą Arystotelesa mówiącą, że jeśli coś porusza się, przez coś innego jest poruszane. Ta zasada została zakwestionowana na gruncie fizyki nowożytnej przez wprowadzenie ruchów inercjalnych, jednak zasada ogólna stwierdzająca, iż każdy skutek ma swoją przyczynę, pozostaje prawdziwa.

Obie powyższe interpretacje są fałszywe.

W przypadku pierwszej z nich, zauważmy, że całość jest większa od części pod warunkiem, że pojęcie „część" traktujemy w tym samym sensie, co pojęcie „większy"; w przypadku definicji zbioru nieskończonego „część" jest rozumiana jako „podzbiór właściwy", natomiast „większy" jako „mający wiekszą moc" – nie ma więc sprzeczości z aksjomatem Euklidesa.

Jeśli chodzi o drugą interpretację, to niebezpieczeństwo widzę w poprzestaniu na konstatacji, że przyjmując ogólniejsze rozumienie unikamy sprzeczności i wobec tego nic tak naprawdę nie zmieniło się w rozumieniu „starego" aksjomatu. Sądzę, że zmieniło się wiele, bo okazało się, że nie można dowolnie posługiwać się ogólnymi zasadami, bez uściślenia pojęć, które w nich występują. Na pewnym stopniu ogólności wprawdzie możliwe jest uniknięcie sprzeczności, jednak za cenę utraty znaczenia.

Oczywiście jeśli przyjmiemy zasadę ciągłości, jako zasadę rozumowania, to ten ogólny aksjomat zachowa treść i znaczenie – w oparciu o intuicyjne rozumienie pojęć tworzących daną zasadę „możliwe jest ustanowienie pewnego ogólnego rozumowania, którym ogarnąć można również ten aksjomat". Natomiast, zgodnie z zasadą graniczną, aksjomat ten należy poddać badaniu w kontekście nowej definicji, między innymi, pojęć, które wchodzą w jego skład. Właśnie definicja zbioru nieskończonego bada i ustala znaczenie słowa „większy" – zbiór B jest

„większy" (ma wieksząmoc), niż zbiór A, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa ze zbioru A w zbiór B, natomiast niemożliwe jest tego typu odwzorowanie ze zbioru B w zbiór A. Pojęcie mocy okazuje się własnością niezmienniczą zbioru nieskończonego ze względu na pewne jego podzbiory właściwe.

W dalszych etapach konstrukcji teorii mnogości obowiązuje ta sama metoda. Mając rodzinę zbiorów, szukamy tych własności, które byłyby niezmiennikami pewnego „prostego" odwzorowania. Tym odwzorowaniem okazuje się odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne pomiędzy zbiorami tzn. dwa zbiory A i B mają tę samą własność, jeśli istnieje funkcja *f* wzajemnie jednoznaczna odwzorowująca zbiór A na zbiór B (tę własność nazywamy „mocą zbioru" lub „liczbą kardynalną").

Oczywiście można podać inne odwzorowania i otrzymujemy inny niezmiennik; tym „innym" odwzorowaniem jest np. funkcja wzajemnie jednoznaczna zachowująca porządek na zbiorach. Nowy niezmiennik nosi nazwę „liczby porządkowej".

4.4. Niezmiennik jako nowy absolut poznawczy. Kartezjańskie *cogito* jest granicznym obiektem procesu radykalnego myślenia. Nazwałem je „absolutem poznawczym", gdyż dopiero po doświadczeniu istnienia *cogito* rozpoczyna się poznawanie rzeczywistości. Dokonując więc, w ramach tej koncepcji, przejść granicznych, nie mamy tak naprawdę możliwości wyjścia poza obszar subiektywności – to, co otrzymamy w granicy (nowego?), to tylko i wyłącznie *cogito*, gdyż jedynym przejściem granicznym dającym nowe informacje jest radykalne wątpienie. Wprawdzie *cogito* odkrywa w sobie ideę nieskończonego i doskonałego Bytu, co w konsekwencji daje wiedzę o materialnym świecie, jednak do otrzymania tej wiedzy potrzebny jest, jak zauważyłem wcześniej, dowód na istnienie absolutu poznawczego.

Jak pokazałem w poprzednim rozdziale, w nowych ideach matematyki XIX wieku można dostrzec zakwestionowanie zasady ciągłości, czyli zarazem uznanie za źródła poznawcze innych procesów granicznych. Okazuje się, że do otrzymania wiedzy wykraczającej poza idee znajdujące się w umyśle, wystarczy stosować różnego rodzaju procesy graniczne, bez konieczności dowodu na istnienie absolutu poznawczego. Następuje więc istotne uproszczenie modelu naukowości. Jednak sam absolut poznawczy zostaje i jest nim, jak sądzę, pojęcie „niezmiennika".

W kartezjańskim modelu naukowości wiedzę uzyskiwało się w dwóch etapach:

1. Etap upraszczania i redukcji, w wyniku którego otrzymujemy absolut poznawczy i podstawowe elementy konstrukcji wiedzy (jest to etap „infinitystyczny" opierający się na przejściu granicznym).
2. Etap konstrukcyjny, gdzie z elementów podstawowych, otrzymanych w etapie pierwszym, buduje się wszelką możliwą wiedzę (jest to etap finitystyczny – konstrukcje mają charakter skończony).

Jak zauważyłem wcześniej, uprawomocnieniem etapu drugiego (i zarazem uzupełnieniem pierwszego) jest dowód na istnienie absolutu poznawczego.

Natomiast nowe metody wprowadzone w matematyce XIX-wiecznej opierają się w pewnym sensie na odwróceniu kolejności powyższych etapów. Najpierw w wyniku konstrukcji czy na podstawie definicji (np. odwzorowań ciągłych czy pojęcia zbioru) otrzymujemy zbiór własności, które są niezmiennikami pewnego typu operacji (są to np. różnego rodzaju niezmienniki odwzorowań ciągłych, jako obszaru zainteresowania topologii, czy „niezmiennik" teorii mnogości – moc zbioru, która jest zachowana przez przynajmniej niektóre podzbiory zbiorów nieskończonych). Następnie ma miejsce etap różnorodnych konstrukcji granicznych. Jedną z pierwszych konstrukcji tego typu jest, skonstruowany przez Cantora, słynny „zbiór Cantora". Ten zbiór ma podstawowe znaczenie zarówno dla topologii, jak i dla teorii mnogości. Później mamy do czynienia w matematyce z całą lawiną konstrukcji granicznych. Są one nieodzownym źródłem nowych matematycznych bytów i własności.

Przyjrzyjmy się konstrukcji zbioru Cantora, aby zobaczyć, jak pojęcie mocy zbioru, jako absolutu poznawczego, daje możliwość przeprowadzenia tej konstrukcji i w konsekwencji odkrycia nieznanych uprzednio własności.

Konstrukcja przebiega następująco: Z odcinka domkniętego [0; 1] wyrzucamy odcinek otwarty $(\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$. Z pozostałych dwóch odcinków domkniętych znów wyrzucamy odcinki „środkowe" $(\frac{1}{9}; \frac{2}{9})$ i $(\frac{7}{9}; \frac{8}{9})$. Tę procedurę powtarzamy nieskończenie wiele razy. Zbiór, który zostanie po wyrzuceniu tych wszystkich odcinków otwartych, to właśnie zbiór Cantora[23]. Widać wyraźnie, że ta konstrukcja jest typową procedurą graniczną.

Z punktu widzenia zasady ciągłości, tego typu konstrukcja nie jest niczym interesującym, gdyż wszystkie ewentualne własności tak otrzymanego zbioru są już własnościami odcinka [0;1] (jest to przecież układ nieskończenie małych odcinków). Dopiero zasada graniczna nadaje sens tego typu konstrukcji. Ponadto istotne jest to, iż moc całego odcinka jest nieprzeliczalna, a ilość kroków konstrukcji jest przeliczalna (czyli mocy mniejszej) i stąd, otrzymany w ten sposób zbiór, ma szansę być niepusty, a więc może w ogóle zaistnieć jako świat nowych własności. I rzeczywiście, zbiór Cantora jest skarbnicą własności topologicznych i teoriomnogościowych.

Zauważmy, że pojawienie się „różnych nieskończoności" nie jest możliwe w kartezjańskim schemacie poznawczym. Próba otrzymania w tym schemacie nowych nieskończonych bytów prowadzi do sprzeczności, której najbardziej spektakularnym przykładem jest tzw. paradoks rodziny (zbioru) wszystkich zbiorów. W paradoksie tym, przyjmując założenie o istnieniu zbioru wszystkich zbiorów i wykorzystując pojęcie mocy zbioru, dochodzi się do sprzeczności.

Uważam, że sprzeczność tego paradoksu nie jest widoczna, gdy jesteśmy całkowicie zamknięci w kartezjańskim modelu naukowości.

W celu naświetlenia tego problemu przyjrzyjmy się idei dowodu twierdzenia Cantora, mówiącego o tym, że moc rodziny wszystkich podzbiorów danego zbioru X jest większa od mocy tego zbioru. Właśnie w oparciu o to twierdzenie możemy np. stwierdzić, że istnieje moc większa od nieskończonej mocy zbioru liczb naturalnych. Dowód twierdzenia Cantora jest prowadzony metodą „nie wprost".

Niech $P(X)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X. Załóżmy, że moc zbioru X jest większa lub równa mocy zbioru $P(X)$, co oznacza, że istnieje funkcja różnowartościowa $F : X \rightarrow P(X)$ ze zbioru X na zbiór $P(X)$. Zauważmy, że zbiór $Z = \{x \colon x \notin F(x)\}$ (który oczywiście należy do rodziny $P(X)$) nie może być obrazem funkcji F.

Przypuśćmy, że istnieje punkt c taki, że $Z = F(c)$. Na podstawie definicji zbioru Z zachodzi następująca równoważność

$$(x \in Z) \equiv [x \notin F(x)].$$

Podstawiając do powyższej równoważności $x = c$ otrzymujemy

$$(c \in Z) \equiv [c \notin F(c)]$$

Oznacza to, że $Z \neq F(c)$. Tym samym otrzymaliśmy sprzeczność.

Spójrzmy na konsekwencje tego twierdzenia.

Gdyby istniało uniwersum U zawierające wszystkie możliwe zbiory, to rodzina (zbiór) 2^u wszystkich podzbiorów tego uniwersum też musiałaby być jego elementem, czyli moc zbioru 2^u byłaby mniejsza (lub równa) od mocy zbioru U. Twierdzenie Cantora mówi jednak, że moc zbioru 2^u jest większa od mocy zbioru U. I otrzymujemy sprzeczność. Które założenia tego rozumowania doprowadziły do sprzeczności? Najczęściej jako przyczynę sprzeczności podaje się założenie mówiące, iż rodzina wszystkich podzbiorów U jest zbiorem. Nie sądzę, aby to założenie było odpowiedzialne za otrzymanie fałszywego wniosku – przecież nie istnieje precyzyjna definicja zbioru pozwalająca stwierdzić jednoznacznie w tym przypadku, czy to uniwersum jest zbiorem, czy nie. Zostaje więc drugie odpowiedzialne za fałsz założenie, czyli stwierdzenie o istnieniu uniwersum U zawierającego wszystkie możliwe zbiory.

Zauważmy, że ta prosta sprzeczność jest całkiem oczywista i naturalna w nowym modelu nauki i uderza w optymizm poznawczy Kartezjusza. Mówi ona, że nie możemy w pierwotnie nieokreślonym świecie (uniwersum) przeprowadzać procesów granicznych (jak np. radykalne wątpienie), bo możemy dojść do sprzeczności. Obszar, na którym przeprowadza się tego typu procesy musi być uprzednio określony (najpierw etap finitystyczny a dopiero potem infinitystyczny). „Tajemniczość" powyżej analizowanej sprzeczności jest charakterystyczną cechą kartezjańskiego modelu naukowości.

Myślę, że powyższe przykłady pokazują, w jaki sposób pojęcie mocy zbioru działa jako absolut poznawczy. Jak widać, specjalny i dodatkowy dowód na istnienie absolutu poznawczego nie jest potrzebny, gdyż nowe byty rodzą się samoistnie, jak za dotknięciem czarodziejskiej różdżki, gdy stosujemy nowy absolut poznawczy. Nie można wątpić w ich realność i obiektywność, ponieważ, jako konstrukcje infinitystyczne, nie są ideami umysłu.

Uważam, że pełniejsze zrozumienie modelu kartezjańskiego (a w szczególności pojęcia absolutu poznawczego) i znaczenie jego przebudowy w XIX wieku, można otrzymać poprzez analizę poglądów E. Husserla, dotyczących ideału racjonalności i metody konstrukcji wiedzy pewnej. Według tego filozofa, „każde przeżycie intelektualne i każde przeżycie w ogóle, jeśli zostało spełnione, może zostać uczynione przedmiotem czystego oglądania i uchwytywania, i w oglądaniu tym będzie ono stanowiło daną absolutną[24].

Te dane absolutne, to nic innego, jak absoluty poznawcze (obiekty graniczne) dające podstawę i możliwość ustanowienia teorii poznania. One to właśnie mają za zadanie uczynić jawną istotę poznania polegającą w znacznej mierze na roszczeniu do prawomocnego obowiązywania, a w konsekwencji doprowadzić poznanie do bezpośredniej samoprezentacji i sprawić by stało się daną absolutną. W przypadku Kartezjusza tą daną absolutną jest wyłącznie *cogito* –podmiot poznający. Rozjaśnienie istoty poznania ma nastąpić w wyniku konstrukcji (finistycznej) nauki uniwersalnej, a nie w pierwotnie samoprezentującym się akcie – bez skonstruowania nauk, stanowiąca ich podstawę metoda radykalnego wątpienia i fakt *cogito*, nie mają wiarygodności i ugruntowania. To sprzężenia zwrotne między naukami i teorią poznania (otrzymane w wyniku refleksji poznawczej dane absolutne są podstawą konstrukcji wszelkich nauk, natomiast same te nauki uprawomocniają tę refleksję), jak również ograniczenie się do jednej danej absolutnej odróżnia metodę Kartezjusza od metody Husserla, dla którego „nie wolno dedukować z czegoś, o czego istnieniu tylko się wie, ale czego się nie widzi. Oglądania nie da się udowodnić ani wydedukować. Oczywistym nonsensem jest dążenie do rozjaśnienia możliwości (i to już możliwości bezpośrednich) poprzez logiczne wywodzenie z wiedzy nieintuicyjnej. Mogę więc być zupełnie pewien, że istnieją transcendentne światy, mogę pozostawić pełną moc obowiązującą wszystkim naukom naturalnym, niczego jednakże nie wolno mi od nich zapożyczać"[25]. Ponadto dla Husserla upatrywanie „jedynej danej absolutnej w jednostkowej *cogitatio* i w sferze efektywnej immanencji jest pierwszym i najsilniejszym przesądem"[26]. Oczywistość obejmuje nie tylko *cogitatio*, lecz również ogólne przedmioty i ogólne stany rzeczy[27].

O ile projekt Husserla tylko częściowo kwestionuje kartezjański model naukowości, o tyle nowy model pozostaje w zasadniczej sprzeczności z tym projektem. Zgodnie z nowym modelem do wiedzy docieramy w wyniku przejść granicznych następujących po etapie logiczno-dedukcyjnych konstrukcji, co jest niedopuszczalne dla Husserla, który twierdzi, że oglądania nie da się udowodnić ani wydedukować. Wszystko, co istotne, ma być dane w uprzedzającym rozumowanie oglądzie.

5. ZAKOŃCZENIE – NOWE KRYTERIUM PRAWDY W RAMACH NOWEGO MODELU NAUKOWOŚCI.

Charakterystyczną cechą kartezjańskiej teorii poznania, a w konsekwencji przedstawionego przeze mnie kartezjańskiego modelu naukowości, jest napięcie między tym , co subiektywne a tym, co obiektywne. Usunięcie tego napięcia jest możliwe wyłącznie poprzez konstrukcję nauki, w oparciu o przyjęte wcześniej metody budowy wiedzy. Przeprowadzona w tej pracy analiza dotyczyła praktycznie tylko jednej metody – zasady ciągłości – sądzę jednak, że to wystarcza do pokazania sposobu likwidowania tego napięcia.

Najpełniej rzeczywistość tego napięcia wyrażają oba, przedstawione przeze mnie, kartezjańskie kryteria prawdy. Pokazują one zarazem w jaki sposób wprowadzane metody naukowe są w stanie niwelować to napięcie. Chartakterystyczne dla koncepcji Kartezjusza jest oparcie rozumienia i stosowania tych kryteriów na kilku pierwotnych doświadczeniach i faktach poznawczych – są to: doświadczenie oczywistości, istnienie progu poznawczego, istnienie ciągów dowodowych oraz doświadczenie pozwalające stwierdzić wzrost informacji dokonujący się pomiędzy kolejnymi elementami ciągu dowodowego.

W przypadku nowego modelu znaczenie progu poznawczego, od którego rozpoczyna się doświadczenie oczywistości, wyraźnie maleje. Już nie poprzez proces „infinitystycznego" oczyszczenia umysłu dochodzimy do prawdy, do wiedzy pewnej, lecz przeprowadzając „infinitystyczne" konstrukcje przy pomocy wcześniej określonych i zdefiniowanych obiektów. Nie tyle istotny jest problem doświadczenia oczywistości, co kwestia znalezienia metody „rozjaśniającej i wyjaśniającej" sens i znaczenie używanych pojęć. Centralną rolę w dochodzeniu do prawdy odgrywają nie kolejne kroki konstrukcji, lecz sam proces graniczny tej konstrukcji. Można pokusić się o sformułowanie nowego kryterium prawdy:

Trzecie kryterium prawdy

Zdanie *z* jest prawdziwe, gdy w wyniku pewnego procesu granicznego (konstrukcji infinitystycznej) powstaje obiekt posiadający własności, które nie występują w elementach składowych tej konstrukcji a decydują o prawdziwości zdania *z*.

Występujący w dowodzie twierdzenia Cantora zbiór $Z=\{x\colon x \notin F(x)\}$ nosi wszelkie znamiona konstrukcji infinitystycznej i sama możliwość jego zdefi- niowania (skonstruowania) odpowiada za prawdziwość tego twierdzenia[28]. W konstrukcji zbioru *Z* rozpatrujemy kolejne obrazy elementów zbioru *X* poprzez funkcję *F* i bierzemy te elementy, które nie należą do swojego obrazu. Z całą pewnością pojęcia funkcji *F* i zbioru *X* nie dają kontroli nad tak otrzymanym zbiorem. Wiemy tylko tyle, że musi on być obrazem pewnego punktu $c \in X$. Za *dalszą część dowodu „odpowiada" wyłącznie zbiór* Z dając prowadzącą do sprzeczności równoważność $(c \in Z) \equiv [c \quad F(c)]$. A ta sprzeczność zawiera w sobie, między innymi, informację o istnieniu liczb kardynalnych dowolnie dużej mocy. Nowe byty, jak i sama prawda o istnieniu „różnych nieskończoności", są wyłącznie efektem konstrukcji infinitystycznej (zbioru Z) poprzedzonej etapem rozjaśniania i definiowania takich pojęć, jak zbiór i funkcja.

Zastanówmy się, jaki jest związek powyższego kryterium z klasyczną definicją prawdy, która stwierdza, że prawda wyraża się w zgodności poznania z jego przedmiotem. Istota tej definicji sprowadza się do dwóch ustaleń:

1. Istnieją dwa odrębne obszary (podmiot poznający i przedmiot poznawany), między którymi nie istnieje naturalne połączenie.
2. Można ustanowić metodę pozwalającą stwierdzić zachodzenie zgodności między zdaniem a opisywaną przez niego sferą rzeczywistości.

Rozwinięcie punktu pierwszego to budowa teorii poznania wykluczająca systemy np. skrajnie idealistyczne czy materialistyczne.

W punkcie drugim mamy do czynienia z podaniem kryterium prawdy. Epistemologia Kartezjusza, jak również nowy model naukowości są zgodne z warunkami klasycznej definicji prawdy. Różnią się jednak schematem konstrukcji wiedzy oraz kryteriami prawdy. Zamiast kartezjańskiego kryterium oczywistości pojawia się etap konstrukcji i definicji tworzących i „rozjaśniających" system pojęć. Ta rezygnacja z kryterium prawdy w pierwszy etapie konstrukcji wiedzy jest, jak zauważyłem, istotnym uproszczeniem schematu poznawczego. Okazuje się, że bez znaczenia są pierwotne intuicje – rozumienie pojęć tworzy się równolegle z ich definiowaniem i użyciem. Tym bardziej istotne jest więc kryterium prawdy pojawiające się w drugim etapie konstrukcji. Obiekt konstruowany w procesie granicznym odsłania własności nie znane uprzednio i one to właśnie ustanawiają zgodność wcześniejszych konstrukcji z rzeczywistością.

Zastanawiająca jest zbieżność teoriopoznawczego *novum* matematyki XIX wieku z koncepcją prawdy Heideggera. Według tego filozofa „nie sposób się obejść bez rozjaśniania sposobu bycia samego poznawania. Konieczna do tego analiza musi podjąć próbę uchwycenia równocześnie fenomenu prawdy, który charakteryzuje poznanie"[29] .Prawda wypowiedzi nie może być dana bez równoczesnego wyjaśnienia samego poznawania, które z kolei „jest byciem ku samej bytującej rzeczy (...) Domniemany byt sam pokazuje się tak, jak on w sobie samym jest, tzn. że w swej tożsamości jest on tak, jak bytując zostaje on w wypowiedzi ukazany, odkryty. To nie przedstawienia są porównywalne – ani między sobą, ani w odniesieniu do realnej rzeczy. Nie chodzi o wykazanie zgodności poznawania i przedmiotu lub wręcz psychicznego z czymś fizycznym, ale także nie o wykazanie zgodności pomiędzy treściami świadomości. Wykazane ma być wyłącznie bycie-odkrytym samego bytu, on sam w »jak« swej odkrytości (...) To, że wypowiedź jest prawdziwa, znaczy: odkrywa ona byt sam w sobie"[30]. I dalej : „To nie wypowiedź jest zasadniczym »miejscem« prawdy, lecz na odwrót: wypowiedź jako *modus* przyswajania sobie odkrytości i jako sposób bycia w świecie opiera się na odkrywaniu bądź otwartości jestestwa"[31].

Uwzględniając specyficzne znaczenia takich słów jak „bycie", „jestestwo", „odkrytość", „rozumienie" możemy zauważyć, że analizowany wcześniej w artykule proces graniczny, to ukazanie bytu w jego odkrytości – prawdziwość wypowiedzi wynika z własności odkrywanego w procesie granicznym obiektu. Stąd miejscem prawdy jest pojawiający się w procesie infinitystycznej konstrukcji obiekt, a nie wcześniejsze stwierdzenia. Te stwierdzenia uzyskają status prawdziwości dopiero po przeprowadzeniu danej konstrukcji. W nowym modelu naukowości ten obszar teorii poznania został zagarnięty przez nauki szczegółowe (matematykę). Jednak pozostał obszar „tajemnicy" nie mieszczący się w paradygmacie nauk szczegółowych. Jak pisze Heidegger „samo w sobie jest zupełnie niepojęte, dlaczego byt ma być odkrywanym dlaczego musi być prawda i jestestwo"[32]. Ten obszar badań to, jak sądzę, miejsce dla autentycznej filozofii. Miejscem konstrukcji, również tych „hipotetycznych i idealnych" są struktury nauk szczegółowych. Zadanie filozofii, to zwrócenie się w kierunku bytu (który jest, między innymi, określany przez prawdę zawartą w konstrukcjach nauk szczegółowych), w przypadku Heideggera to zadanie polega na wyodrębnieniu sensu bycia-prawdy i oddanie „pierwotnego całokształtu bycia faktycznego jestestwa"[32]. Są to oczywiście wnioski, które wypływają z przedstawionego przełomu w matematyce XIX wieku. Sądzę, że na ile obowiązujący jest ten przełom, i na ile uznaje się zależność filozofii od roztrzygnięć nauk szczegółowych, na tyle obowiązujące są tak zarysowane zadania filozofii.

Uważam, że nowy model naukowości jest na tyle powszechny (obejmuje nie tylko znaczną część matematyki czy fizyki, lecz również wiele dwudziestowiecznych koncepcji filozoficznych), iż można nazwać go „modelem racjonalności". Podana w tej pracy jego charakterystyka jest oczywiście niepełna i w pewnym stopniu hipotetyczna, gdyż opiera się na kilku wybranych przykładach. Zastanawiająca jest jednak zgodność tak, zdawałoby się, odległych koncepcji, jak teoria mnogości i filozofia Heideggera. Nie widzę innego wyjaśnienia tego faktu, jak tylko uznanie, że wielkie teorie docierają do bytu i wyodrębniają sens prawdy i poznania.

Przypisy

[1] Nie chcę tym samym zacierać różnic między tymi myślicielami, lecz pragnę zwrócić uwagę na wspólny prąd myśli i idei tworzący wzorce racjonalności i schematy obowiązujących metod naukowych.

[2] Artykuł ten jest rozbudowaną wersją referatu, jaki wygłosiłem w grudniu 1995 roku na seminarium poświęconym badaniu kontekstu odkrycia w dziejach dziedziny nauki. Seminarium to, prowadzone przez doc. Alinę Motycką z Instytutu Filozofii i Socjologii

PAN i prof. Stefana Zameckiego z Instytutu Historii Nauki PAN, ma za zadanie pokazanie możliwości syntezy badań historycznych z refleksją filozoficzną. W poniższym artykule staram się zrealizować te zamierzenia. Pod wpływem dyskusji na seminarium postanowiłem odstąpić od tytułu referatu Nowożytny model naukowości a nowe idee w matematyce XIX wieku. Zgodziłem się z argumentacją, że tytuł ten zobowiązuje do podania pełniejszej charakterystyki epoki nowożytnej z uwzględnieniem okresu wcześniejszego, gdzie wiele idei rozwijanych w okresie nowożytnym miało swoje źródła. Ponieważ cel pracy jest znacznie skromniejszy, sądzę, że zmiana tytułu jest adekwatna w stosunku do przeprowadzanych analiz. Ponadto, głównie pod wpływem uwag i komentarzy mgra Michała Kokowskiego, zrezygnowałem z formalnej analizy epistemologii Kartezjusza, którą przeprowadziłem wcześniej w znacznej mierze zgodnie z duchem koncepcji Whiteheada. Podane przeze mnie w tym artykule refleksje nad kartezjańskimi kryteriami prawdy mają charakter bardziej osobisty, a ewentualne kontrowersje związane z przedstawionymi interpretacjami należy rozpatrywać w kontekście analizowanych przykładów historycznych.

[3] A.N. Whitehead: *Nauka i świat współczesny* [raczej: *Nauka i świat nowożytny*] Tł. M. Kozłowski i M. Pieńkowski. Warszawa 1988 s. 10–28

[4] R. Descartes: *Rozprawa o metodzie* – z oryginału francuskiego przełożyła, opatrzyła słowem od tłumacza i przypisami Wanda Wojciechowska. Warszawa 1988 s. 22–23.

[5] Kartezjański dowód na istnienie Boga traktuję wyłącznie w kategoriach poznawczych, bez żadnych odniesień religijnych. Dlatego, jak sądzę, właściwiej, zamiast słowa „Bóg", jest używać wyrażenia „absolut poznawczy".

[6] Można w tym miejscu sformułować kryterium racjonalności sceptycyzmu: sceptycyzm (wątpienie) jest racjonalny, jeśli a) nie poddaje w wątpliwość samego faktu myślenia oraz b) jego efektem jest fakt myślenia, traktowanego jako nieprzekraczalny element świata.

[7] R. Descartes: *Medytacje o pierwszej filozofii.* Warszawa 1958 s. 87

[8] Tamże s. 89

[9] O ile *cogito* pełni rolę absolutu poznawczego w sposób bezpośredni i naturalny, o tyle w przypadku pojęcia Boga dopiero projekt nauki i jego skuteczność uprawomocnia tę rolę. Może to prowadzić do „uzależnienia" Boga od nauki.

[10] R. Descartes: *Rozprawa o metodzie.* PWN Warszawa 1988 s. 41–42.

[11] R. Descartes: *Medytacje o pierwszej filozofii.* Warszawa 1958 s. 89.

[12] I. Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Cambridge 1972 s. 10; M. Heller, J. Życiński: *Wszechświat-maszyna czy myśl?.* Kraków 1988 s. 76–82.

[13] Nie znaczy to jednak, że zniknęła filozoficzna ranga paradoksów Zenona. W ramach konkretnej teorii naukowej sprzeczność, o której mówi np. paradoks Zenona wykazujący możność ruchu, znika. Na innym obszarze badań (tam, gdzie mechanika Newtona nie może być stosowana) problem usunięcia wewnętrznej sprzeczności pojęcia ruchu pozostaje dalej wyzwaniem. Sądzę, że rozumowanie Zenona nadal może stanowić inspirację w budowie odpowiedniego systemu pojęć.

[14] Istnieje oczywiście ryzyko, że racjonalność metody naukowej Newtona też staje się Absolutem. Dzieje się tak wówczas, gdy zaciera się zasadniczą różnicę między matematyką a fizyką. Ciągłość przejścia między prawami geometrii i mechaniki (o której wspomina Newton) może, w ramach kartezjańskiego modelu naukowości (por. dalsze fragment artykułu), rzeczywiści prowadzić do uczynienia z geometrii lub mechaniki absolutu. Mechanicyzm, który rozwijał się w XVIII i XIX wieku, jest dobrym przykładem tego zjawiska.

[15] G.W.Leibniz: *Early Mathematical Manuscripts.* Chicago 1920 s. 147.

[16] C.B. Boyer: *Historia rachunku różniczkowego i całkowego.* Tł. Stanisław Dobrzycki. Warszawa 1964, s. 311

[17] Tego typu zasad, jak zasada ciągłości, można wskazać wiecej w nauce nowożytnej np. zasadę najmniejszego działania, czy zasadę mówiącą o możliwości połączenia różnych wielkości przy pomocy funkcji. Nie jest ich jednak wiele, a każda z nich stanowi ogromne bogactwo problemów, których rozwiązanie decydowało w znacznej mierze o kierunkach rozwoju nauki.

[18] C. B. Boyer, dz. cyt. s. 377–418.

[19] I. Lakatos: *Proofs and Refutations.* Cambridge 1976 s. 127–141.

[20] J. B. Listing: *Preidwariteilnyje issliedowania po topologii.* Moskwa 1932 s. 25.

[21] Tamże.

[22] Por. np.K. Kuratowski: *Wstęp do teorii mnogości i topologii.* Warszawa 1977 s. 194 –195.

[24] E. Husserl: *Die Idee der Phaenomenologie.* Haag 1958. Cytuję wg tł. polskiego J. Sidorka. Warszawa 1990 s. 41.

[25] Tamże s.50–51.

[26] Tamże s. 75.

[28] Definicja tego zbioru przypomina formalnie definicję zbioru Z występującego w tzw. antynomii klas niezwrotnych – $Z = \{x: x \notin x\}$. Stosując analogiczne rozumowanie otrzymujemy prowadzącą do sprzeczności, równoważność: $Z \in Z \equiv Z \notin Z$. Tej sprzeczności unikamy w dowodzie twierdzenia Cantora dzięki pojęciu funkcji, które jest na tyle ogólne, że pozwala przyporządkować punktom zbiory , czyli w konsekwencji pozwala na odwzorowanie zbioru w rodzinę jego podzbiorów zachowując jednocześnie „autonomię ontologiczną" zbioru punktowego, jak również zbioru będącego rodziną zbiorów. W antynomii klas niezwrotnych ma miejsce, odpowiedzialne za sprzeczność, wymieszanie i nierozróżnianie właśnie tych obiektów.

[29] M. Heidegger: *Sein und Zeit.* Tł. Bogdan Baran. Warszawa 1994 s. 306.

[30] Tamże s. 307–308.

[31] Tamże s. 318.

[32] Tamże s. 321.

[33] Tamże s. 324.

Wiesław Wójcik

THE CARTESIAN MODEL OF SCIENCE AND NEW IDEAS IN THE MATHEMATICS OF THE 19TH CENTURY

The main aim of the article is to show the potential of combining historical research with philosophical reflection. To fulfil this aim the author proposes to look for the internal mechanisms governing the development of science and tries to show the influence of a given type of philosophical „mentality" on the emergence of new scientific methods. This makes it possible to view the development of science as a continuous process, and to see how modern science has evolved out of the scientific and philosophical ideas of previous centuries. The focus of the article is on threc fundamental issues:

1. the change in the paradigm of modern science in the mathematics of the 19th century;
2. the dependence of the evolution and validity of mathematical theories on the general philosophical framework;
3. the application of different criteria for truth at various stages in the development of science.

The starting point and pivotal axis of the article is the Cartesian project for science. It can be noticed that underlying particular mathematical theories are general philosophical assumptions which largely predetermine the reasonability and validity of the formulated definitions and the conducted proofs. Analyzing the Cartesian scheme of knowledge, the author arranges the assumptions underlying it within a certain kind of (philosophical) model. The model is general enough to be compatible with the Newtonian concept of the construction of science, although the latter is fundamentally different from the Cartesian one. Other programmes for modern science (including e.g. that of Leibniz) are also compatible with the model. Of course the article does not claim to show the mechanisms governing the evolution of science. The point is, however, to isolate from the thinking of Descartes (and also partly of Leibniz and Newton) some methods of reasoning, which, the author believes, became „binding and unquestionable" for a period of at least two centuries. It is the general framework for this kind of reasoning that the author calls the Cartesian model of science.

The second part of the article is devoted to historical verification of the model. The primary model can be made more precise and it can be evaluated only after it has been empirically verified. Analyzing the breakthrough in the mathematics of the 19th century the author tries to show that it consisted mainly in questioning and reconstructing the model. There was change in two of its essential elements: the principle of continuity and the cognitive absolute, which had a fundamental impact on the value and validity of the constructions made. Basing on the new philosophical assumptions, new definitions, constructions and proofs could be made. This issue is illustrated by the emergence of topology and set theory.

To signal that the change in the paradigm (and the emergence of a new model of science) which occurred in the 19th century concerned not only mathematics, the author shows the similarity of the new scheme for the construction of knowledge to Heidegger's concept of truth. This allows the author to place the focus of his analysis on the problem of applying truth criteria in science. In turns out that the breakthrough in the mathematics of the 19th century actually consisted in the change of the Cartesian criteria for truth. This change became binding not only in the mathematics but also in other areas of knowledge. Thus the new model of science is so general (for it encompasses not only mathematics or physics but also many 20th-century philosophical conceptions) that it can be called a model of rationality. The description of the model given in the article is of course far from exhaustive and to a certain extent hypothetical, as it is based only on a few selected examples. One cannot help noticing, however, the congruity between so distant conceptions as set theory and Heidegger's philosophy. The author believes that this can be accounted for by the recognition that grand theories really do approach Being and isolate a sense of truth and understanding.