Rosińska, Grażyna

Kwadratura koła i "liczba π" w nauczaniu matematyki na Uniwersytecie Krakowskim w pierwszej połowie XV w. : recepcja Archimedesa De mensura circuli poprzez Tomasza Bradwardina Geometria speculativa

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 45/2, 49-62

2000

Grażyna Rosińska
(Warszawa)

KWADRATURA KOŁA I „LICZBA π“ W NAUCZANIU MATEMATYKI NA UNIWERSYTECIE KRAKOWSKIM W PIERWSZEJ POŁOWIE XV W.

RECEPCJA ARCHIMEDESA *DE MENSURA CIRCULI* POPRZEZ TOMASZA BRADWARDINA *GEOMETRIA SPECULATIVA*

1. WSTĘP

Sprowadzenie powierzchni koła do powierzchni kwadratu zostało postawione jako problem w matematyce i w filozofii przez greckich mędrców ze szkoły Pitagorasa działających w V wieku pne[1]. Odkryta niewspółmierność dwu wielkości, obwodu koła i jego średnicy, już wówczas uświadamiała niemożliwość znalezienia rozwiązania. W terminologii matematyki klasycznej rozwiązanie, gdyby istniało, sprowadzałoby się do skonstruowania, przy pomocy linijki i cyrkla, kwadratu o powierzchni równej powierzchni danego koła. Działający równolegle z geometrami greccy arytmetycy „praktyczni“ – l o g i s t y c y – których wiedza nie cieszyła się statusem „wiedzy naukowej“, bowiem wymykała się rygorystycznym dowodom (geometrycznym), próbowali określić przybliżenia liczbowe, wyrażające stosunek owych dwu niewspółmiernych wielkości. Przybliżenia nie miały statusu „liczby“. Dużo później, w XVIII wieku, określono je symbolem π. Dzięki tym przybliżeniom, od starożytności do przynajmniej połowy XIX wieku, omijając p r o b l e m kwadratury koła i problem n a t u r y liczby π, rozwiązywano zadania p r a k t y c z n e , poprzez konstrukcje geometryczne oraz wyliczenia kolejnych przybliżeń π.

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 45: 2000 nr 2 s. 49–62

Czynili tak, na długo przed Pitagorejczykami i zapewne nawet nie stawiając „problemu niewspółmierności", Egipcjanie w XIX wieku pne. Przyjmowali oni dla celów miernictwa powierzchnię koła równą kwadratowi średnicy koła pomniejszonej o 1/9 średnicy, stąd $S=(8/9d)^2$. Bok kwadratu zatem, którego pole miało być równe powierzchni koła, wynosiłby 8/9 d, a stąd $\pi \approx 3{,}1605$. Historycy, począwszy od M. Cantora, starają się odtworzyć sposób, w jaki Egipcjanie doszli do tego przybliżenia[2]. Podobne próby kwadrowania koła podejmowano w starożytnym Babilonie a także w Chinach[3].

Od czasów hellenistycznych specjalne miejsce w pracach teoretycznych nad kwadraturą koła zajmuje traktat Archimedesa (ok. 287 –212 pne), zatytułowany κυκλου μετρησις (*Mensura circuli, Miara koła*), rozpoczynający się rozdziałem *O kwadraturze koła*[4]. Archimedes przedstawia tam konstrukcję geometryczną pozwalającą wyrazić powierzchnię koła poprzez powierzchnię trójkąta prostokątnego o podstawie równej obwodowi koła i wysokości równej jego promieniowi, który nie trudno jest sprowadzić do kwadratu. Dokładna konstrukcja takiego trójkąta byłaby możliwa pod warunkiem dokonania tak zwanej, w późniejszej literaturze matematycznej, rektyfikacji okręgu, wyrażenia obwodu koła przy pomocy odcinka.

Dzieło Archimedesa niesie obietnicę możliwości dokonania przybliżonej kwadratury koła w oparciu o logistykę: z konieczności wkracza tu bowiem wyrażenie niewspółmierności obwodu i promienia poprzez liczbowe przybliżenia. Archimedes wyliczył π mieszczące się w przedziale $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$, stąd wartość średnia 3,1418, obciążona błędem ok. 0,0002. Powszechnie posługiwano się wartością z nadmiarem. W krakowskich rękopisach matematycznych i astronomicznych z XV wieku, w obliczeniach wykonywanych dla potrzeb astronomii, między innymi w *Summa super tabulas* Marcina Króla z Żurawicy (*alias* z Przemyśla) odnajdujemy tęże wartość, zapisywaną jako ułamek niewłaściwy 22/7, wraz z uwagą, że wyliczył ją „Archemides" lub nawet „Archiperimenides"[5]. Tymczasem, równolegle do wartości wyliczonej przez Archimedesa, funkcjonowała – *implicite* – w Krakowie, podobnie jak i w „reszcie uniwersyteckiej Europy", wartość π równa w przybliżeniu 3,1416, wyliczona przez Ptolemeusza[6].

Historycy w różny sposób porządkują źródła dotyczące kwadratury koła. Zgodni są w jednym, a mianowicie, że od starożytności do początków oświecenia powstawały prace, konstrukcyjne i obliczeniowe, które pozostając w nurcie geometrycznym, głównie, choć nie wyłącznie archimedejskim, miały na celu wyłącznie zwiększanie dokładności π. W nurcie tym sytuuje się także konstrukcja Adama Kochańskiego ogłoszona w 1685 roku, dająca z dobrym przybliżeniem odcinek równy połowie obwodu danego koła[7]. Szczytowym osiągnięciem fazy pierwszej było wyliczenie π przez Ludolpha van Cuelen do trzydziestu pięciu miejsc po przecinku. W następnej fazie stosowana jest metoda arytmetyczna, kolejne przybliżenia π zostają obliczane przy pomocy ułamków ciągłych

(Brouckner) bądź przez ciągi nieskończone (Wallis, James Gregory), osiągając do stu miejsc po przecinku. Faza, związana z analizą matematyczną, daje nowe warsztatowo możliwości wraz z osiągnięciami Newtona: zamiast metody geometrycznej stosowana jest metoda analityczna (*On the method of fluxions and infinite series*, 1737). Wreszcie w XIX wieku do proponowanych wciąż nowych wzorów obliczeń π dochodzą rozważania metodologiczne. W związku z refleksją metodologiczną nad podstawami matematyki powstają studia o naturze liczby π, uwieńczone udowodnieniem przez Liouville'a (1844) istnienia liczb transcendentalnych, obok liczb algebraicznych i wykazaniem, przez Lindemanna (1882), że także π jest liczbą transcendentalną (nie spełnia równania algebraicznego ze współczynnikami wymiernymi). Równa się to stwierdzeniu, że kwadratura koła nie może być zrealizowana ani metodami geometrii elementarnej, ani przy pomocy krzywych algebraicznych[8].

Dzieje kwadratury koła, związane z historią liczby π, są więc dziejami osiągania coraz lepszych przybliżeń w konstrukcjach geometrycznych i w wyliczeniach π (dysponujemy już ponad 50 bilionami miejsc dziesiętnych, a o dalszym rozwoju sytuacji można się przekonać chociażby otwierając w internecie stronę Uniwersytetu Simona Frasera i pracującego tam matematyka J. Borweina) natomiast w uzasadnieniach teoretycznych są potwierdzeniem tego, co przeczuwali – i czego obawiali się – Starożytni.

* * *

Prace nad „kwadraturą koła", jak to sygnalizują podręczniki historii matematyki, obfitowały w ciągu wieków w momenty także humorystyczne, zwłaszcza w XIX–wiecznej Francji, gdzie towarzystwa naukowe były ponoć zasypywane „oryginalnymi" propozycjami rozwiązania problemu. Z podobną namiętnością działali wówczas chyba tylko wynalazcy *perpetuum mobile*.

Prześledzenie propozycji kwadrowania koła (poznawczo wartościowych) pozwala wejrzeć w rozwój matematyki w pewnych jego aspektach. Chodzi, na przykład, o wielkości niewspółmierne i o pierwszy kryzys pojęcia liczby (chociaż nie wszyscy historycy oceniają ówczesną sytuację matematyki jako „krytyczną"), gdy arytmetyce liczb naturalnych zabrakło narzędzia do wyrażenia liczbowo niewspółmierności odcinków. Innym aspektem tej samej sprawy jest rozwijana w związku w niewspółmiernością teoria stosunków („od Eudoksosa do Dedekinda") oraz kwestia ciągłości. Próby wyjścia z kryzysu niewspółmierności będą prowadziły do rozszerzenia pojęcia liczby, początkowo dzięki pracom logistyków. Jakkolwiek próby rozszerzenia pojęcia liczby na liczby niewymierne bywało uwikłane w rozważania natury filozoficznej – które, jak filozoficzna fizyka Arystotelesa, nie sprzyjały ilościowemu wyrażaniu zmian w przyrodzie – to jednak odesłania, w badaniu rzeczywistości fizycznej, do obserwacji i eksperymentu, doprowadziły do wypracowania metodologicznego statusu nauk matematyczno-przyrodniczych, funkcjonujących jako niezależne od arystotelizmu. Kierunek tych badań prowadził od *Liber de motu* Gerarda z Brukseli w XIII wieku, poprzez XIV-wiecznych matematycznych przyrodników z Merton College w Oksfordzie oraz Mikołaja Oresma w Paryżu do astronomii i fizyki matematycznej Galileusza.

Dla potrzeb tego studium zajmiemy się tylko fragmentem „pierwszej tradycji" dotyczącej kwadratury koła i tylko nurtem archimedejskim w ramach tej tradycji.

2. NURT ARCHIMEDEJSKI W MATEMATYCE EUROPEJSKIEJ DO POŁOWY XV WIEKU.

Kwestia kwadratury koła, łącznie z odkryciem niewspółmierności przekątnej i boku kwadratu jednostkowego (z przekątną równą $\sqrt{2}$), wreszcie kwestia trysekcji kąta i podwojenia objętości sześcianu, wskazywały, że liczba **naturalna** nie jest czynnikiem organizującym (i wyrażającym) **Naturę**. Wydaje się, że początkowo odkrycie to wpłynęło w sposób ograniczający na konstruowanie matematyki (doprowadziło do „zgeometryzowania" arytmetyki), natomiast z pewnością wskazało ono kierunek poszukiwania nowego aparatu matematycznego, który sprostałby wymogom opisu ilościowego rzeczywistości fizycznej. W matematyce próbą przezwyciężenia konsekwencji kryzysu niewspółmierności była wspomniana już Eudoksosa teoria stosunków, zachowana w V księdze *Elementów* Euklidesa, a w naukach przyrodniczych, ukształtowana około dwa wieki później, postawa metodologiczna Archimedesa, matematyka, ale i zarazem przyrodnika, zaprezentowana między innymi w *De mensura circuli*. Pochodząca prawdopodobnie od Eudoksosa, a rozwinięta przez Archimedesa, metoda wyczerpywania, zastosowana do obliczenia powierzchni koła, stworzyła pozory naukowości – w ramach konwencji metodologicznych klasycznej filozofii ! – dla prób matematycznego opisu świata, w tym dla astronomii, posługującej się głównie geometrią koła i prawie wyłącznie „liczbami" niewymiernymi.

W Europie dziełko *De mensura circuli* było tłumaczone na łacinę wielokrotnie. Jak wykazuje Marshall Clagett, z arabskiego dwukrotnie, w XII wieku przez Platona z Tivoli, a następnie przez Gerarda z Kremony. Po około stu latach przetłumaczył je z greckiego Wilhelm z Moerbeke na prośbę Witelona. Każde z tych tłumaczeń miało własną historię oddziaływania na rozwój matematyki. Jak podaje Clagett, najmniejsze znaczenie miało tłumaczenie pierwsze, dalekie od poprawności i do dziś zachowane tylko w trzech rękopisach, natomiast najszerzej w średniowieczu oddziałało tłumaczenie drugie, wielokrotnie poprawiane, zachowane w kilku wersjach. Gdy chodzi natomiast o ddziaływanie tłumaczenia Moerbeke to wiąże się ono głównie z zainteresowaniami humanistów[9].

W matematyce zachodniego średniowiecza zagadnienie kwadratury koła pojawiło się przynajmniej wraz z pierwszym tłumaczeniem na łacinę Archimedesowego *De mensura circuli* oraz tłumaczeniami pism matematyków kręgu islamu, inspirowanych Archimedesem[10]. Ale nie wydaje się, by już wówczas Archimedes wpłynął w jakiś znaczący sposób na tok rozważań nad naturą metodologii nauk przyrodniczych opartych na matematyce, do których zaliczano, poza astronomią, także optykę i mechanikę. Natomiast przynajmniej od XIII wieku, a szczególnie od połowy XIV, specyficzna postawa metodologiczna „matematyczno-przyrodnicza" reprezentowana przez samego Archimedesa (dla jej określenia historycy – Righini-Bonelli i William Shea – ukuli nawet termin „archimedyzm") z pewnością wpłynęła na skonstruowanie matematyki będącej narzędziem „kwantyfikowania jakości", w tym będącej próbą ilościowego wyrażania ruchu przyspieszonego.

Taką też matematykę kreowali, począwszy od Gerarda z Brukseli (XIII wiek), autora *Liber de motu – Księga o ruchu*, i w nawiązaniu do dorobku Archimedesa, autorzy z epoki „kończącego się średniowiecza": Mikołaj Oresme oraz Tomasz Bradwardin. Interesujący nas tutaj rozdział dziełka Bradwardina *Geometria spekulatywna*, poświęcony kwadraturze koła, wykorzystywany w nauczaniu matematyki w Krakowie, przytacza wprost rozwiązanie problemu kwadratury pochodzące z Archimedesa *De mensura circuli*.

Pierwsza połowa XV wieku jest ważna dla rozwoju matematyki, przyniosła ona bowiem, poza powszechniejszą recepcją Archimedesa, która w Krakowie, jak się wydaje, dokonywała się głównie poprzez *Geometria speculativa* Bradwardina, także, i już niezależnie od Archimedesa i Bradwardina, znaczne osiągnięcia logistyków i astronomów w dziedzinie posługiwania się liczbami niewymiernymi. Wykład na temat pojęcia ułamka dziesiętnego, znajdujący się w traktatach *Arithmetica* oraz *Compositio instrumenti* Giovanniego Bianchiniego i towarzyszące mu objaśnienia działań arytmetycznych na ułamkach dziesiętnych, niewiele odbiegają od objaśnień, które następnie będą prezentowane przez matematyków nowożytnych. Natomiast sam wykład powstał, jak się wydaje, głównie ze względu na stosowanie liczb niewymiernych w trygonometrii (tablice funkcji trygonometrycznych) oraz w astronomii, której struktura matematyczna sprowadzała się do trygonometrii sferycznej[11].

3. „KRAKOWSKIE TEKSTY" O KWADRATURZE KOŁA. ANALIZA MATERIAŁU RĘKOPIŚMIENNEGO.

W czterech piętnastowiecznych „kodeksach krakowskich" – co znaczy tutaj kodeksach powstałych w związku z nauczaniem uniweresyteckim w Krakowie, a jeszcze bliżej określając, w związku z nauczaniem geometrii, arytmetyki, astronomii i optyki na wydziale sztuk wyzwolonych tutejszego uniwersytetu – zachowały się niemal jednakowo brzmiące teksty o strukturze niewielkiego traktatu. W dwu z tych kodeksów traktacik opatrzony jest tytułem *Quadratura circuli*, i w trzech spośród czterech tekstowi towarzyszą rysunki geometryczne (jeden z nich wykonany nieprawidłowo).

Analiza traktaciku, a także poszukiwania mające na celu określenie jego miejsca w dość bogatej w średniowieczu (w sensie różnorodności kompilacji) twórczości dotyczącej kwadrowania koła, pozwoliły ustalić, że jest to nieznaczna przeróbka rozdziału końcowego *Geometrii* (*Geometria speculativa*) Tomasza Bradwardina. We wszystkich czterech tekstach Bradwardin wraz z Archimedesem cytowani są z imienia. Tomasz Bradwardin wymieniany jest jako „Henricus [!] Bragburdinus" lub „Hynricus Bragwurdinus", natomiast Archimedes to „Altemidis", albo „Archimenides".

Bradwardin, który pracując nad opisem matematycznym zmian zachodzących w obserwowanej rzeczywistości fizycznej, próbował ująć ilościowo zmiany jakościowe, zmuszony był do poszerzenia „warsztatu matematyka" i wyjścia poza *Elementy* Euklidesa. W *Geometria speculativa* odwołuje się on do Archimedesa *De mensura circuli*. Te same odesłania do Archimedesa są zachowane w traktaciku „krakowskim" *Quadratura circuli*.

Quadratura circuli zachowała się w następujących rękopisach: BJ 552, BJ 1844, BJ 1918 i BJ 1927. Kodeksy pochodzą z okresu między ok. roku 1420 i 1447 i – jak świadczy zespół pism w nich zachowany – wszystkie cztery powstały w związku ze studiami na wydziale sztuk wyzwolonych krakowskiej Wszechnicy. Najstarszy z nich powstał w trakcie odbywania studiów przez Jana z Ludziska ok. roku 1421 (BJ 552), a trzy pozostałe w latach czterdziestych XV stulecia, od 1444 do 1447, w związku ze studiami Jana z Olkusza zwanego „Starszym" (BJ 1927) z 1444–1445, Jana z Oświęcimia (BJ 1918) z roku 1447 oraz w związku ze studiami Jana z Inowrocławia (BJ 1844) – ten ostatni kodeks podaje tylko jedną datę, rok 1454, natomiast ponieważ jako całość jest wyraźnie pokrewny kodeksowi BJ 1927, można uznać, iż należy do tej samej, co on tradycji. Tylko rękopis BJ 552 został opisany w opublikowanej dotąd części *Catalogus codicum manuscriptorum medii aevi Latinorum qui in Bibliotheca Jagellonica Cracoviae asserventur* (Tom 3, s. 345–350). Natomiast zawartość i układ treści pozostałych kodeksów można odtworzyć korzystając bądź z wydanego w serii „Studia Copernicana" repertorium *Scientific Writings and Astronomical Tables in Cracow, XIV–XVI century*, bądź z *Katalogu rękopisów Biblioteki Uniwersytetu Jagiellońskiego* opracowanego w końcu XIX wieku przez Władysława Wisłockiego.

Kodeksy podaję w kolejności chronologicznej.

BJ 552: Kopista i właściciel kodeksu: Jan z Ludziska – *Primus possesor, ipse scriba, auctor et glossator, Ioannes de Ludzisko fuit.* Tekst robi wrażenie skopiowanego z niskiej jakości wzoru. Tekst *De quadratura* wpisany na k.125v, natomiast rysunek na k.125r. Kodeks kopiowany około roku 1421[12].

BJ 1927: Kopista i właściciel kodeksu: Jan z Olkusza Starszy. Kodeks kopiowany w latach 1444 i 1445[13].

BJ 1918: Kopista: Jan z Oświęcimia. Na k.40r: *Explicit tercius liber Geometrie Euclidis commento Campani annexo per Johannem de Osswanczym, ...quadragesimo septimo*...(1447). Rysunek towarzyszący *De quadratura* niekompletny[14].

BJ 1844: Jan z Inowrocławia, k.180v. Jedyna data w rękopisie to rok 1454. Wcześniejsze badania ukazują ścisły związek treści BJ 1927 i 1844[15].

Kodeksy zatem powstały w kręgach działalności dwu wybitnych wykładowców na wydziale *artium liberalium*: Wawrzyńca z Raciborza, należącego do grupy znaczących wykładowców quardivium w Krakowie w latach dwudziestych i trzydziestych XV wieku, oraz Marcina Króla z Żurawicy (*alias* z Przemyśla), najwybitniejszego wykładowcy w latach czterdziestych tego stulecia i z pewnością jednego z autorów sukcesu naukowego krakowskiej szkoły astronomicznej w ostatnich dziesięcioleciach XV wieku (pośrednio wpłynął na Wojciecha z Brudzewa)[16]. Matematycy i astronomowie z otoczenia Marcina Króla stworzyli środowisko naukowe, w którym kształtował swe poglądy Kopernik.

4. „KRAKOWSKA“ *QUADRATURA CIRCULI*. TŁUMACZENIE NA JĘZYK POLSKI I UWAGI

Podstawą dla zamieszczonej w aneksie edycji *Quadratura circuli*, na której opiera się tłumaczenie polskie, jest tekst zachowany w kodeksie BJ 1927. Jest on najpoprawniejszy ze wszystkich czterech, nie różniąc się przy tym wiele od pozostałych dwóch tekstów pochodzących z kręgu Marcina Króla z Żurawicy, natomiast nieco bardziej różni sie od tekstu skopiowanego w latach dwudziestych, (BJ 552), zdecydowanie najmniej poprawnego (edycję tego tekstu podaję osobno, w przypisie 12).

KWADRATURA KOŁA

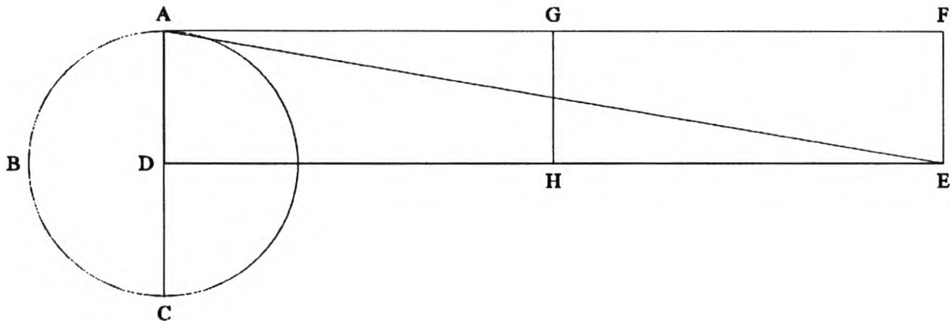
Dla wykazania kwadratury koła, odpowiednio do tego, co daje do zrozumienia rysunek, zakładam twierdzenie magistra Henryka [!] Bradwardina znajdujące się w trzeciej części jego *Geometrii*, jest to twierdzenie ostatnie, *O kwadraturach*:

Powierzchnia każdego koła równa jest prostokątowi zawartemu między połową obwodu [*tego koła*] *i połową* [*jego*] *średnicy.*

Zakładam także to oto twierdzenie Archimedesa:

Każde koło równe jest trójkątowi, którego jeden z dwóch boków zawierających kąt prosty jest równy połowie średnicy koła, drugi zaś z nich odcinkowi równemu obwodowi koła. Proporcja zaś obwodu do średnicy jest 3 i jedna siódma.

Na przykład: niech będzie koło ABC, niech będzie AC jego średnicą, a AD połową średnicy. Z punktu D będzie prowadzona prostopadła [do AC], DE, aż do [osiągnięcia przez nią] długości obwodu owego koła. Zostanie także przeprowadzony odcinek tworzący trójkąt AED.



Według Archimedesa, trójkąt AED jest równy kołu. Dowodzi tego [w sposób] jak najbardziej pewny i stąd wynika teza.

Prowadzę zatem prostą AF równoległą do DE i prowadzę FE, tworząc czworokąt. Mam zatem równoległobok AFDE podzielony na dwa trójkąty przez przekątną AE. Oba te trójkąty przylegające do przekątnej są [sobie] równe, zgodnie z przedostatnim [twierdzeniem] rozdziału *O trójkątach*.

Koło zatem będzie równe jednemu z trójkątów, na podstawie twierdzenia Archimedesa przyjętego jako przesłanka, zatem cały równoległobok jest dwa razy większy od koła. A zatem, połowa [powierzchni] owego równoległoboku, czy czworokąta, będzie równa [powierzchni] koła.

Podzielę zatem ten czworokąt odcinkiem GH na dwa równe czworokąty. Każdemu z nich będzie równe koło. Ponieważ każdy z nich zawarty jest między połową obwodu [koła] i połową [jego] średnicy, jak wynika z odwrotności przytoczonego twierdzenia magistra Bradwardina, zatem: koło będzie równe czworokątowi zawartemu między połową obwodu i połową średnicy.

Jeśli ten czworokąt sprowadzić do kwadratu, to przez pierwsze twierdzenie [Archimedesa] *O kwadraturach*, koło zostanie skwadrowane.

Ta powierzchnia, to znaczy czworokąt, może także zostać skwadrowana na podstawie ostatniego twierdzenia drugiej księgi [*Elementów*] Euklidesa. I to wystarczy na temat kwadratur.

* *
*

W edycji „krakowskiego tekstu" podanej w Aneksie podkreślono te fragmenty tekstu, które wyraźnie mają związek z rozdziałem *De quadraturis* z *Geometrii* Bradwardina. Zależność tę można prześledzić, porównując „tekst krakowski" z edycją krytyczną *De quadraturis* Bradwardina opracowaną przez Marshalla Clagetta[17]. Ponieważ, według Clagetta, Bradwardin posłużył się prawdopodobnie tłumaczeniem Archimedesowego *De mensura circuli* dokonanym przez Gerarda z Kremony, zatem badany tekst krakowski mógłby świadczyć, że w przypadku recepcji Archimedesa w Krakowie posługiwano się wersją *De mensura circuli* w tłumaczeniu Gerarda.

Wydaje się, że najwłaściwiej byłoby określić „tekst krakowski" nie jako skrót i przeróbkę traktatu Bradwardina, ale raczej jako kompilację. Autor wykorzystał bowiem nie tylko Archimedesa poprzez Bradwardina, ale ponadto samego Bradwardina *Geometria speculativa.* Odniósł się także, w ostatnim zdaniu, do twierdzenia 14 księgi II, *Elementów* Euklidesa w wersji znanej w XV wieku w Krakowie: Zbudować kwadrat równy danemu trójkątowi.

Gdy chodzi o pokrewieństwo słownictwa „krakowskiego tekstu" i Bradwardina, to w obu przypadkach Archimedes nazwany jest „Archimenidēs", ponadto istnieją bliskie analogie rysunków i ich oznaczeń.

5. ZAKOŃCZENIE I WNIOSKI

Krakowska *Quadratura circuli* jest interesującym sygnałem, wskazującym, po pierwsze, na uzupełnianie w nauczaniu geometrii wykładu *Elementów* Euklidesa traktatami geometrycznymi innych autorów. Następnie wskazuje na wczesną recepcję w Krakowie *Geometria speculativa* Bradwardina (i poprzez *Geometrię* dzieła matematycznego – *De mensura circuli* – Archimedesa). Te świadectwa znajomości pism Archimedesa i Tomasza Bradwardina są ważne, ponieważ w księgozbiorze Biblioteki Jagiellońskiej, i ogólnie wśród kodeksów świadczących o nauczaniu matematyki w Krakowie, rozsianych w bibliotekach Europy, jak się wydaje, nie zachowały się „krakowskie" kopie całego dzieła *De mensura circuli* Archimedesa czy *Geometria speculativa* Bradwardina. Pozostają więc świadectwa znajomości tych dzieł poprzez odniesienia do ich fragmentów (cytaty), jak to jest w przypadku *Quadratura circuli.*

Wczesna recepcja w Krakowie *Geometria speculativa* jest potwierdzona także przez Sędziwoja z Czechła, krakowskiego magistra a następnie wykładowcy, nieco młodszego od Jana z Ludziska, stanowiącego pomost między pokoleniem astronomów wychowanych w kręgu Wawrzyńca z Raciborza i pokoleniem z kręgu Marcina Króla z Żurawicy. W wykładach astronomii teoretycznej Sędziwoja z 1430 roku, zachowanych w formie komentarza do *Theorica planetarum*, używanego powszechnie podręcznika uniwersyteckiego astronomii (rękopis BJ 1929 k. 92v – 149v) istnieje odesłanie do Bradwardina. Tam też, podobnie jak w Marcina Króla *Summa super tabulas* podana jest wartość π jako „równa" 22/7.

Natomiast gdy chodzi o tekst „krakowski", w związku z próbami rekonstrukcji oddziaływania Archimedesa *De mensura circuli* w Europie u progu nowożytności, to wszystko co dotyczy recepcji tego autora w kręgu kultury łacińskiej, w formie adaptacji i przeróbek jego dzieł, nawet czerpanych „z drugiej ręki", jak tu za pośrednictwem *Geometrii spekulatywnej* Bradwardina, jest ważne wobec szczególnego znaczenia postawy badawczej Archimedesa dla powstania metody (i metodologii) nauk przyrodniczych.

W płaszczyźnie badania tekstów, po monumentalnym, źródłowym dziele Marshalla Clagetta *Archimedes in the Middle Ages*, wszelkie publikacje na temat różnych wariantów tekstów Archimedesa, kompletują obraz recepcji dzieł Archimedesa w Europie.

Aneks

Edycja krytyczna *Quadratura circuli*

Podstawa edycji: tekst z rękopisu BJ 1927, k. 134v. W aparacie krytycznym uwzględniono A – rękopis BJ 1844, k. 180v; B – rękopis BJ 1918, k. 40r. Fragmenty podkreślone linią ciągłą, a także rysunek, zostały zaczerpnięte przez krakowskiego autora z Tomasza Bradwardina *Geometria speculativa*, rozdz. *De quadraturis*. (Por. Ed. princeps: Paris 1495, k.14v – 15r. oraz Ed. krytyczna, M. Clagett, o.c. s. 34, przypis 11, wiersze 47 – 86 i towarzyszący im aparat krytyczny s. 35). W edycji zachowana jest oryginalna ortografia.

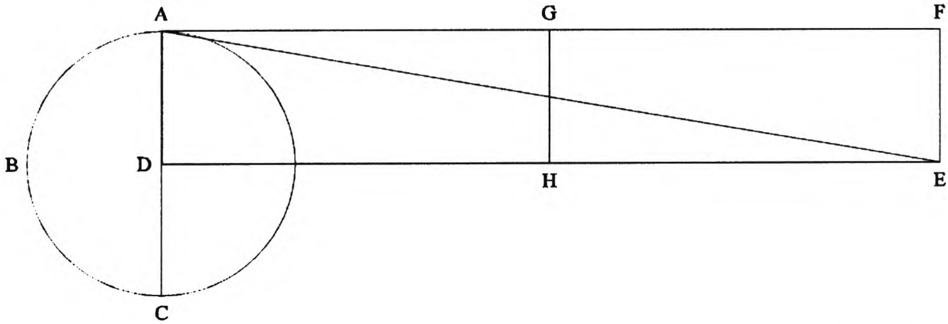
<QUADRATURA CIRCULI>

Pro demonstracione quadrature circuli, secundum quod in figura innuitur[1], proposicionem magistri Henrici Brangburdini positam in tercia sue *Geometrie* parte suppono, et est ultima, *De quadraturis*: Area omnis circuli equalis est tetragono sub medietate circumferencie et medietate dyametri contento. Item suppono hanc proposicionem Archimenidis:

<u>Omnis circulus triangulo ortogono[1] est equalis, cuius unum duorum laterum rectum angulum continencium medietate dyametri circuli equale est, alterum autem ipsorum linee continenti circulum est equale. Est autem proporcio linee continentis circulum ad dyametrum tripla sesquiseptima.</u>

[1] B ortogono/orthogono.

Verbi gracia: Sit circulus ABC, sit AC dyameter et eius semidyameter sit AD et a puncto D[2] ducatur linea orthogonaliter DE usque ad equalitatem circumferencie ipsius circuli. Item ducatur AE linea perficiens ipsum triangulum AED.



Est igitur intencio Archimenidis quod triangulus AED est equalis circulo et hoc demonstrat certissime, ex quo sequitur intentum.

Ducam enim AF lineam equedistantem DE linee et ducam FE tetragonum perficiens. Habebo ergo paralellogramum istud AFDE divisum in duos triangulos per dyametrum AE et illi duo trianguli circumstantes ipsum dyametrum sunt equales per penultimam, capitulo *De triangulis*. Erit circulus uni illorum triangulorum equalis per premissam proposicionem Archimenidis, ergo totum paralellogramum est duplum ad circulum, et per consequens medietas illius paralellogrami vel tetragoni erit equalis circulo.

Dividam ergo istum tetragonum[3] in duos tetragonos equales per lineam GH et erit circulus alterutri equalis. Sed quilibet illorum continetur sub medietate circumferencie et medietate dyametri, ut patet ex conversa proposicionis Magistri Brangburdini, ergo circulus erit equalis tetragono sub semicircumferencia et semidyametro contento.

Si ergo quadretur iste tetragonus per primam proposicionem *De quadraturis* erit circulus quadratus. Eciam potest ista superficies vel tetragonus quadrari per ultimam proposicionem secundi libri Euclidis[4]. Et hec sufficiant de quadraturis.

Przypisy

[1] Z. J o r d a n : *O matematycznych podstawach systemu Platona*. Poznań 1937 s. 33 – 50. J. W i d o m s k i : *Ontologia liczby*. Kraków 1996 s. 16–36, szczególnie s. 33–35. A. J u s z k i e w i c z : *Historia matematyki*. T. 1. *Od czasów najdawniejszych do początków myśli nowożytnej*. Tłum. S. Dobrzycki. Warszawa 1975 s. 75–77.

[2] B *om.* D. [3] B *scr. et del.* paralellogramum. [4] Euklides II, 14: Dato trigono equum quadratum describere.

[2] Udokumentowane w tzw. „Papirusie Rhinda" z połowy XVII w pne. Jest to kopia wcześniejszego traktatu. Dyskusje trwają na temat, jak daleko wstecz można datować oryginał oraz jakie techniki zastosowano w obliczaniu przybliżeń. Por. H. Engels: *Quadrature of the circle in ancient Egypt.* W: *Historia Mathematica* T. 4 (1977) s. 137–140. Reprodukcja i edycja źródła por L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein: PI: *A Source Book.* Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg 1997 s. 1–2. J. Dhombres: *Nombre, mesure et continu. Epistemologie et histoire.* Paris 1978 s.106–107.

[3] O. Neugebauer, W. Struve: *Ueber die Geometrie des Kreises in Babilonien.* „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik". Abt. B. Bd. 1 1931 s. 85. C. Jami: *Une histoire chinoise du „nombre π".* „Archive for History of Exact Sciences". T. 38 (1) 1988 s. 39–50.

[4] Wykaz źródeł, kolejnych edycji dzieł Archimedesa (w tym obszerne studium dotyczące kwadratury koła) oraz wykaz literatury do wczesnych lat pięćdziesiątych: por. E. J. Dijkstehuis: *Archimedes.* Copenhagen 1956, s.33–49 oraz Marshall Clagett: *Archimedes in the Middle Ages.* Vol. I: *The Arabo-Latin Tradition.* Madison 1964. Por. także J. Dhombres, op.cit., s. 107–109.

[5] Marcina Króla z Żurawicy *Summa super tabulas*, rękopis Biblioteki Jagiellońskiej, BJ 1927 k. 276r.

[6] Por. David E. Smith: *The History and Transcendence of π.* W: *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field.* Ed. by J. W. A. Young. New York 1955 s. 389–416. Także L. Berggren *et alii*, : *PI: A Source Book.* por przyp. 1, w dziele tym podano prace od Starożytności do Newtona, od Newtona do Hilberta oraz prace z wieku XX (ostatni z podanych wzorów pochodzi z roku 1996).

[7] Praca Kochańskiego została opublikowana w „Leipsiger Berichte" w 1685 roku. Reprodukcja i krótkie omówienie konstrukcji Kochańskiego podane jest w: J. Dianni, A. Wachułka: *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej.* Warszawa 1963 s. 102–103. A. A. Kochański wymieniony jest także w pracy H. C. Schepler: *The chronology of Pi.* „Mathematics Magazine" March–April 1950 s. 222: „This construction passed into many geometrical text-books".

[8] Por David E. Smith, op.cit., s. 394.

[9] Kolejne tłumaczenia Archimedesa *De mensura circuli*, z arabskiego na łacinę, a następnie z greckiego na łacinę, oraz ich oddziaływanie na myśl zachodnioeuropejską por. M. Clagett, op.cit. s. XIX–XXIX, 1–58.

[10] *Verba filiorum Moysi Filii Sekir: Maumeti, Hameti, Hasen.* (*Księga pomiarów płaszczyzn i brył w osiemnastu rozdziałach*). Traktat inspirowany dziełami Archimedesa, tłumaczony z arabskiego na łacinę przez Gerarda z Kremony w XII wieku.

[11] Traktat Giovanniego Bianchiniego *Compositio instrumenti* został opublikowany przez P. Garuti: *Giovanni Bianchini. Compositio instrumenti (Cod. Lat. 145(T.6. 19) della Biblioteca Estense di Modena* . A cura di Paolo Garuti con introduzione di Gino Arrighi. „Rendiconti Classe di Lettere e Scienze Morali e Fisiche. Vol. 125(1) :1991 s. 95–127. (Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano 1992). Traktat ten został następnie przeanalizowany pod kątem zaprezentowanej tam, pierwszej w Europie, „arytmetyki ułamków dziesiętnych", w: G. Rosińska: *Decimal positional fractions.*

Their use for the surveying purposes. (Ferrara, 1442). „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki". 40 (4): 1995 s. 17–32.

[12] Jan z Ludziska, por. B. N a d o l s k i , *Polski Słownik Biograficzny*, t. X (1963) s. 461–462. Opis rękopisu A. K o z ł o w s k a : *Catalogus...*, t. 3 s. 345–350. Oto tekst *Quadratura circuli* z rkp BJ 552 k. 125–125v:

Pro demonstracione quadrature circuli secundum quod in figura precedenti invenitur assumo hanc proposicionem magistri Hynrici Bragwurdini positam in ipsius geometria et est ultima, De quadraturis:

Area omnis circuli equalis est tetragesimo [!] subaudite [!] circumferencie sue et medietate dyametri contento.

Item suppono hanc proposicionem Altimidis:

Omnis circulus triangulo ortogono est equalis, cuius unum duorum laterum rectum angulum continencium medietate dyametri circuli equale est, alterum autem ipsorum linee continenti circulum est equale.

Est autem proporcio linee continentis circulum ad dyametrum tripla sesquiseptima.

Verbi gracia: Sit circulus a c b, sit a c dyameter et eius semidyameter sit a d et a puncto d ducatur linea orthogonaliter d c usque ad equalitatem circumferencie ipsius circuli. Item ducatur a e linea perficiens ipsum triangulum a e d.

Est igitur intencio Altimedis quod triangulus a e d est equalis circulo et hoc demonstrat certissime, ex quo sequitur intentum.

Ducam enim a f lineam equedistantem d e linee et ducam f a [!] tetragonum perficiens.

Habebo ergo parallellogramum istud a f d e divisum in duo triangulos per dyametrum a e et illi duo trianguli circumstantes ipsum dyametrum sunt equales per primam proposicionem secundi libri Euclidis et circulus est uni illorum triangulorum equalis per premissam proposicionem Altimedis, ergo totum paralellogramum est duplum ad circulum et per consequens medietas illius paralellogrami vel tetragoni erit equalis circulo.

Dividam ergo istum tetragonum in duos tetragonos equales per lineam g h et erit circulus alterutri equalis. Sed quilibet illorum continetur sub medietate circumferencie et medietate dyametri, ut patet ex conversa proposicionis Bragwurdini, ergo: circulus erit equalis tetragono sub semicircumferencia et semidyametro contento.

Quadretur igitur tetragonus per primam proposicionem De quadraturis et erit circulus quadratus. Et sic potest ista superficies vel tetragonus quadrari per ultimam proposicionem secundi libri Euclidis. [Dodano pod tekstem]: ipotenuse dicuntur linee oblique se respicientes.

[13] Jan z Olkusza Starszy, por. A. B i r k e n m a j e r : *Polski Słownik Biograficzny* t. X (1963) s. 465–466. Pozycje z kodeksu BJ 1927 zarejestrowane w: G. R o s i ń s k a : *Scientific Writings and Astronomical Tables in Cracow. A Census of Manuscript Sources.* „Studia Copernicana" t. XXII Kraków, Warszawa 1983 s. 555.

[14] Jan z Oświęcimia, por. H. B a r y c z : *Polski Słownik Biograficzny*, t. X (1963) s. 467–468. Pozycje z kodeksu BJ 1918 zarejestrowane jak wyżej. „Kwadratura" z rękopisu BJ 1918 znana była M. Clagettowi. Dodał o niej wzmiankę w *Archimedes in the Middle Ages* t. III, Philadelphia 1978, s. 1250, nazywając tekst „a free version" fragmentu *Geometrii* Bradwardina.

[15] Jan z Inowrocławia, por. W. S z e l i s k a : *Polski Słownik Biograficzny*, t. X (1963) s. 454. Pozycje z kodeksu BJ 1844 zarejestrowane jak wyżej.

[16] Por. G. R o s i ń s k a : *Nieznany traktat astronomiczny Marcina Króla z Żurawicy. Z problematyki i metod krakowskiej szkoły astronomicznej w XV wieku.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 2: 1972 s. 227–234.

[17] M. C l a g e t t , op.cit., s. 34, przypis 11.

[18] G. R o s i ń s k a : *Sandivogius de Czechel et l'ecole astronomique de Cracovie vers 1430.* „Organon" 9: 1973 s. 221.

Grażyna Rosińska

QUADRATURE OF THE CIRCLE AND THE „NUMBER π„ IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AT CRACOW UNIVERSITY IN THE FIRST HALF OF THE 15TH CENTURY.

RECEPTION OF ARCHIMEDES' *DE MENSURA CIRCULI* BY MEANS OF THOMAS BRADWARDINUS' *GEOMETRIA SPECULATIVA*

The paper deals with a short treatise *Quadratura circuli* preserved in four Cracow manuscripts from ca. 1420 (ms. BJ 552) and ca. 1445 (mss. BJ 1844, BJ 1918, and BJ 1927), related to the teaching of mathematics and astronomy at the faculty of arts at Cracow university. The *Quadratura circuli* is very close to a fragment of Bradwardinus' *Geometria speculativa* devoted to the quadrature of the circle. The comparison was done with Bradwardinus' text in Marshall Clagett's edition in *Archimedes*, vol. I p. 34, lines 40–85. (See above the Annex and annotations 4 and 17).