A R T Y K U Ł Y

Grażyna Rosińska
Instytut Historii Nauki PAN
Warszawa

PRZEŁOM W TRYGONOMETRII POŁOWY XV WIEKU KOPERNIK JAKO SPADKOBIERCA I JAKO KONTYNUATOR TEGO PRZEŁOMU

Jeszcze w pierwszej połowie XV w. w Europie Zachodniej trygonometria, znana wówczas jako „nauka o liniach w kole", funkcjonowała zasadniczo nie zmieniona od ok. tysiąca trzystu lat, tak jak została przekazana przez Ptolemeusza w matematycznym wstępie do Wielkiego Systemu [astronomii], klasycznego dzieła, znanego jako *Almagest* (ok. 150 n.e.). Przez cały ten okres, od Ptolemeusza do „jednego pokolenia przed Kopernikiem" racją bytu „nauki o liniach w kole" było jej zastosowanie w astronomii (astrometrii). Wykład trygonometrii płaskiej w *Almageście* został przyporządkowany wyliczeniu tablicy cięciw – „linii" w kole o obwodzie podzielonym na 360° i o promieniu R podzielonym na 60 części (tablica cięciw równoważna jest tablicy sinusów wg wzoru $\sin \alpha = \mathrm{crd}\ 2\alpha/2\ R$)[1]. Natomiast wykład trygonometrii sferycznej został uwieńczony skonstruowaniem astronomicznej Tablicy deklinacji, podstawowej dla konstrukcji systemu ptolemejskiego. Tablica, podająca wartości nachylenia ekliptyki do równika niebieskiego przy jednostopniowych interwałach, stanowiła interpretację matematyczną zjawiska astronomicznego. Punktem wyjścia dla wyliczeń było maksymalne nachylenia ekliptyki do równika, równe 23°51'20". Wartość tę otrzymał Ptolemeusz w wyniku zaprogramowanych własnych obserwacji astronomicznych oraz odniesień do danych analogicznych obserwacji wykonanych przez poprzedników (Eratostenes, III w. p.n.e.; natomiast podstawowym narzędziem matematycznym obliczeń była wypracowana przez Menelaosa tzw. „reguła sześciu wielkości", ustalająca zależności w proporcjach łuków trójkątów sferycznych[2].

Przez długi czas po Ptolemeuszu podporządkowanie trygonometrii astronomii wyrażało się, zewnętrznie, włączaniem wykładu trygonometrii, zredukowanego do elementów bezpośrednio stosowanych w astronomii, do traktatów astronomicznych.

Zmiana koncepcji „nauki o liniach w kole" i jej statusu, przejście od „nauki pomocniczej astronomii" do rozwiniętej, samodzielnej w pełni dyscypliny – termin „trygonometria" wprowadzono w VI w. – było wynikiem ewolucji wewnątrz pozostałych działów matematyki, a w konsekwencji także zmiany wzajemnych relacji: geometrii, arytmetyki oraz, cenionej wówczas wyłącznie dla zastosowań praktycznych, algebry. Jest znamienne, że zmiany te wymusiła, poniekąd, na matematyce praktyka środowisk pozanaukowych, a nie, na przykład subtelne rozważania teoretyków nad stosunkiem arytmetyki do geometrii – co ważne byłoby dla trygonometrii wobec jej funkcjonowania między geometrią a „logistyką" (arytmetyką), ani też nie badania „natury" liczb i ich klasyfikacji, znane w nauce łacińskiej przynajmniej od Boecjusza (V–VI wiek). Odkrycie zastosowań algebry w takich dziedzinach jak architektura, inżynieria, bankowość, a także astronomia, skłoniło matematyków do pewnych radykalnych posunięć, jak na przykład przyznanie (w praktyce) statusu liczby, poza liczbami naturalnymi, także „liczbom", traktowanym dotychczas w cudzysłowie, ujemnym oraz niewymiernym; wymusiło też, jako konsekwencja rozszerzenia pojęcia liczby, umieszczenie algebry, nauki operującej takimi „liczbami", w programie zajęć uniwersyteckich (w sposób znaczący dokona się to dopiero w XVI wieku)[3].

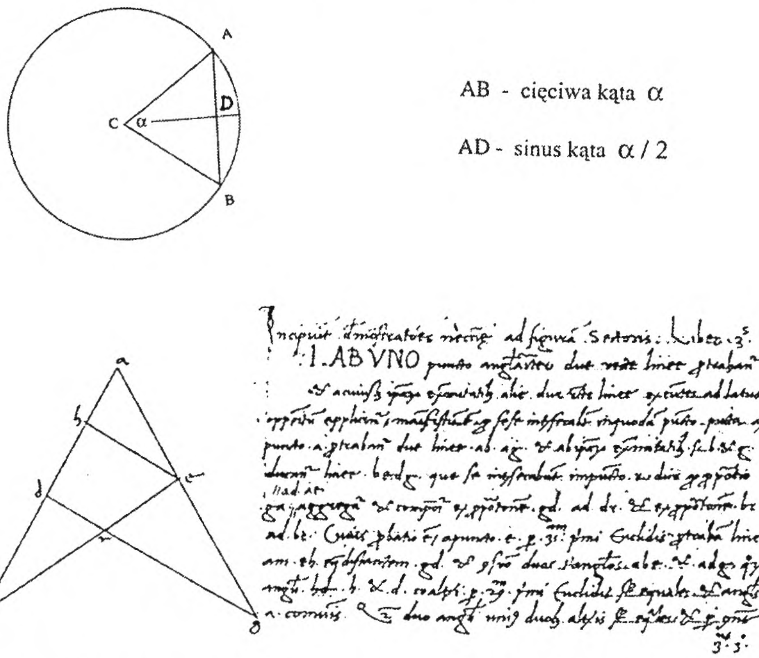
Tak więc, w kontekście zmian koncepcji podstaw matematyki oraz zmian koncepcji jej struktury, dotychczasowa nauka „o liniach w kole" zaczyna rozwijać się jako oddzielona od astronomii dyscyplina; dla zainteresowanych nią matematyków będzie to nauka traktująca „o wszelakich trójkątach" – *De triangulis omnimodis* – według Regiomontana czy „o bokach i kątach trójkątów" – *De lateribus et angulis triangulorum*, według Kopernika.

1. RELACJA ASTRONOMIA – TRYGONOMETRIA. DZIEDZICTWO STAROŻYTNOŚCI W ŚREDNIOWIECZU ŁACIŃSKIM

Wiedza o „liniach w kole" miała w starożytności status szczególny, określony przydatnością dla „królowej nauk", za jaką uważano astronomię z jej rozmierzaniem idealnych ruchów kołowych, przysługujących ciałom niebieskim. Ta „przydatność" wyrażała się w dwu wymiarach, które określimy, na użytek tego studium, terminami „wymiar instrumentalny" oraz „wymiar fundamentalny". Trygonometria (i jej rezultat: ptolemejska tablica cięciw) miała być, i była, *instrumentum* – narzędziem konstrukcji oraz interpretacji ilościowej modeli geometrycznych ruchu ciał niebieskich. Ale też trygonometria, która sama czerpała splendor ze współistnienia z astronomią, w płaszczyźnie metodologicznej miała służyć astronomii jako fundament naukowości wywodu, gwarantować i uwierzytelniać jej status naukowy[4]. W dalszych rozważaniach będzie nas interesował szczególnie wymiar instrumentalny trygonometrii w relacji do astronomii – zarówno w jej wersji „starożytnej", przejętej następnie w średniowieczu, jak w nowej, rozwiniętej w renesansie.

Pierwsza (?) nie zachowana tablica cięciw w kole, służyła Hipparchowi (ok. 190–125 p.n.e) przy opracowaniu teorii ruchu Słońca – geometrycznego (kinematycznego) modelu interpretującego ten ruch[5]. Natomiast najdawniejsza zachowana tablica cięciw – do której zresztą, wraz z jej modyfikacjami XIV wiecznymi, odwołał się w czasie studiów krakowskich Kopernik – była dziełem Ptolemeusza (ok. 100–160 n.e.) spadkobiercy w tym względzie Hipparcha i Menelaosa (I w. n.e.)[6]. W tablicy z *Almagestu* Ptolemeusz podał wartości cięciw dla argumentów rosnących co 30 minut, przyjmując jako podstawę obliczeń okrąg o średnicy podzielonej na 120 części[7]:

> „Następnie ułożymy tablicę ich [cięciw] wartości liczbowych [...] dzieląc obwód [koła] na 360 części i wpisując wartości cięciw odpowiadających łukom przy półstopniowych interwałach, wyrażając każdą z nich jako liczbę części w systemie odnoszącym się do średnicy podzielonej na 120 części"[8].



Ryc. 1. Narzędzia matematyczne astronomii: „linie (cięciwy) w kole" oraz *sector figurae* Menelaosa, dowód z połowy XV w.

Tablica Ptolemeusza z księgi I rozdz. 11 *Almagestu*, skonstruowana w systemie sześćdziesiętnym, wykazuje znaczną dokładność (w systemie dziesiętnym do piątego miejsca po przecinku)[9]. Poprzedzona traktatem teoretycznym, w którym ukazano podstawy geometryczne wyliczeń, stanowi fundament wykładu astronomii matematycznej w następnych księgach dzieła, zarówno przy konstrukcji interpretacji geometrycznej *universum*, zaprezentowanej w modelach kinematycznych, jak przy wyrażaniu liczbowo, w oparciu o te modele, ruchu „sfery gwiazd stałych", pięciu planet oraz Słońca i Księżyca, w towarzyszących wykładowi tablicach astronomicznych[10]. Rozwiązywanie trójkątów płaskich i sferycznych, podstawa ówczesnej astronomii matematycznej, dokonywało się przy zastosowaniu wzorów trygonometrycznych sformułowanych opisowo w *Almageście*.

Rozwinęły się dwa nurty recepcji *Almagestu*. Nurt obecny w kulturze islamu zaistniał wcześniej, w VIII–IX stuleciu, w Europie łacińskiej natomiast w wieku XII. Dzieło Ptolemeusza funkcjonowało przez jakiś czas – w Europie łacińskiej dłużej – bez dokonywania w nim zmian, nie licząc skażeń oryginałów w procesie translacji. Łacinnicy korzystali z przekładu *Almagestu*, dokonanego przez Gerarda z Kremony nie bezpośrednio z greckiego oryginału, ale za pośrednictwem wcześniejszego niż łacińskie tłumaczenia na język arabski, łącznie z zachowaną tam tablicą cięciw[11]. Oryginalną ptolemejską tablicą posługiwano się w Europie Zachodniej przynajmniej do XIV w., przeliczając ją następnie, około połowy tego stulecia, na równoważną jej tablicę sinusów (przekazana Zachodowi idea „sinusa" została zaczerpnięta przez Arabów z matematyki indyjskiej)[12].

Próby wyłamania się ze schematu ptolemejskiego zostały podjęte najpierw w kulturze islamu i sięgają wczesnego średniowiecza, począwszy od VIII wieku. Czyniono to nie tylko dla samej trygonometrii, ale także w imię interesów astronomii, mając świadomość, że rozwinięcie samodzielnej dyscypliny matematycznej może zwielokrotnić użyteczność jej stosowania. W świecie islamu użycie sinusów zamiast cięciw spotyka się jeszcze przed Al-Battanim (ok. 850–929), w Europie łacińskiej natomiast wiąże się z działalnością Lewiego ben Gersona (1288–1344), który wyliczył taką tablicę przy promieniu R=60 i argumentach rosnących co 15 minut, a następnie z działalnością astronomów z połowy XIV wieku, w Oksfordzie i w Paryżu[13].

2. POŁOWA WIEKU XIV: OKSFORD I PARYŻ

Tytułowy „przełom w trygonometrii" został poprzedzony, w połowie XIV wieku działalnością matematyków i astronomów, głównie Oksfordu i Paryża, uprawiających matematyczną astronomię w łączności z zachodnim centrum astronomii islamu na półwyspie Iberyjskim[14].

W Oksfordzie wykładał astronomię Ryszard Wallingford (ok. 1292–1336), matematyk na miarę późniejszego o ponad sto lat Regiomontana, autor *Opus quadripartitum* oraz *De sectore*; od niego datuje się rozważanie o „liniach w kole i łukach" w traktatach wyłączonych z dzieł astronomicznych[15]. Szkołę astronomiczną w Paryżu stworzyli Jan z Lineriis i Jan z Murs, przygotowując rozpowszechnioną w Europie łacińskiej wersję *Tablic astronomicznych* (planetarnych) króla Kastylii Alfonsa X[16]. Jan z Lineriis przyswoił Europie także rozwiniętą przez matematyków arabskich nową wersję ptolemejskich *Tablic ruchu ósmej sfery, sfery gwiazd stałych – primum mobile.* W zespole tablic astronomicznych *Tabulae primi mobilis* znalazła miejsce ptolemejska tablica cięciw, już w formie przeliczonej na sinusy[17]. (Także w Kopernikowym zbiorze tablic astronomicznych tablice trygonometryczne wpisane przez Kopernika towarzyszą tablicom *primi mobilis*). Całość prac nad ulepszeniem tablic trygonometrycznych, dokonała się nie bez czerpania z osiągnięć w dziedzinie trygonometrii zawartych w dziełach Albataniego (Al-Battani, ok. 850–929), Arzahela (Al-Zarqual, ok. 1030–1090) Gebera (Jabi'r ibn Aflah, Sewilla, pierwsza poł. XII w.)[18].

Prace zachodnioeuropejskich matematyków znalazły przedłużenie w próbach podejmowanych w pierwszych dziesiątkach XV wieku w środowisku uniwersyteckim Wiednia. Wśród uczonych zajmujących się dalszymi modyfikacjami trygonometrycznej tablicy Ptolemeusza należy odnotować dwu przedstawicieli wiedeńskiej szkoły astronomicznej, Jana z Gmunden (ok. 1380/84–1442) i Jerzego Peurbacha (1423–1461)[19]. Jan z Gmunden, który w traktacie *De sinibus* i w towarzyszącej mu tablicy brał za podstawę wyliczeń promień koła $R=60^P0^M0^S0^T$ konstruował także, wzorem Arzahela, tablice sinusa przyjmując wartość R=150[20].

Dla obrazu uniwersyteckiej Europy w tym okresie istotne są oryginalne, wczesne chronologicznie, dokonania Bianchiniego, rozwijającego matematyczną astronomię Ptolemeusza. Bianchini, współczesny Janowi z Gmunden i dobrze znany Peurbachowi, był też jednym z tych twórców europejskich, którzy najsilniej wpłynęli na kształtowanie się krakowskiej szkoły astronomicznej, zwłaszcza z końcem XV wieku, w okresie studiów Kopernika. Związany z Ferrarą Bianchini (ok. 1400–ok. 1470) kształcony był w matematyce poza środowiskiem uniwersyteckim, w szkołach abaku w Wenecji.

3. SYTUACJA ASTRONOMII MATEMATYCZNEJ W POŁOWIE XV WIEKU

W połowie XV wieku zaczynają pojawiać się tablice funkcji innych niż sinus, wyliczane niezależnie od dotychczasowego „zapotrzebowania astronomii" dyktowanego pewnym bezwładem tradycji liczącej tysiąclecia. Było to wynikiem badań teoretycznych nad wszelkimi możliwymi zależnościami między bokami i kątami w trójkątach płaskich i sferycznych. W rezultacie wprowadzono do obliczeń astronomicznych, poza funkcją sinusa, także funkcje cosinusa, tangensa i cosecansa[21].

Ponadto, zmienia się podstawę wyliczania tych tablic. I tak, wbrew tradycji sięgającej epoki astronomii kształtowanej przez Babilończyków odstępuje się od konstruowania tablic trygonometrycznych przy promieniu koła R=60 (w czym wyrażało się między innymi związanie trygonometrii z rachunkiem czasu, użyteczne dla astronomii), na rzecz promienia jednostkowego (dziesiętnego). Koncepcja ułamków dziesiętnych wraz z kompletnym wykładem arytmetyki tych ułamków pojawia się już z początkiem lat czterdziestych XV wieku[22]. W ślad za tym wyliczone zostają „nowożytne", czysto dziesiętne tablice funkcji trygonometrycznych. Innowacje te wyszły ze środowiska włoskich „abacystów", rachmistrzów-praktyków, którego Bianchini był przedstawicielem[23]. On to jako pierwszy, po krótkim okresie wyliczania tablic trygonometrycznych przy promieniu koła $R=60 \cdot 10^n$, przyjął jako podstawę obliczeń promień okręgu czysto dziesiętny $R=10^n$, wyliczając tablice cosecansa przy $R=10^4$ i tangensa przy $R=10^3$, obie dla argumentów rosnących co 10 minut. Omówił ponadto ich zastosowanie w rozwiązywaniu problemów astronomii sferycznej[24].

Opracowanie dorobku Bianchiniego zmieniło dotychczasowy obraz renesansowej matematyki, szczególnie dwu jej działów, arytmetyki i trygonometrii, przesuwając wstecz datę odkryć istotnych dla jej dalszego rozwoju[25]. Źródłami pierwszorzędnej wagi dla ukazania wkładu Bianchiniego w rozwój renesansowej trygonometrii okazały się rękopisy matematyczne i astronomiczne zachowane w Bibliotece Jagiellońskiej. Importowane z Italii, bądź kopiowane w Krakowie, służyły od ok. połowy XV wieku pokoleniom wykładowców i studentów wydziału sztuk wyzwolonych krakowskiej wszechnicy[26].

Odkrycie i publikacja dziesiętnych tablic trygonometrycznych Bianchiniego pozwoliły ustalić model, którym posłużył się Kopernik przy konstruowaniu własnej dziesiętnej tablicy sinusa włączonej do *De revolutionibus*[27]. Kopernik miał udział zarówno w promowaniu dziesiętnych tablic trygonometrycznych, które poznał już w czasie studiów w Krakowie, jak we wprowadzeniu do matematyki – jak się wydaje nie tylko z powodu jej użyteczności przy obliczeniach astronomicznych – tablicy funkcji secansa[28].

4. KONTYNUACJA PRAC BIANCHINIEGO: JAN REGIOMONTAN

Pomysł Bianchiniego przyjęcia za podstawę obliczeń promienia dziesiętnego podjął następnie Regiomontan (1436–1476), który w roku 1467 skonstruował dziesiętną tablicę tangensa oraz takież tablice sinusa. W pierwszym przypadku podstawą wyliczeń dla argumentów rosnących co 1 stopień był promień koła $R=10^4$, w drugim $R=10^7$, dla argumentów rosnących co minutę[29].

Historycy byli zgodni co do szczególnej roli tej ostatniej tablicy w rozwoju trygonometrii w XVI wieku, natomiast, ponieważ została ona wydana drukiem dopiero w 1541 roku, przekreślano jakąkolwiek możliwość jej wpływu na rozwój tablic trygonometrycznych w okresie wcześniejszym, łącznie z wpływem na wczesną działalność Kopernika w tej dziedzinie. Nie znano bowiem żadnej kopii rękopiśmiennej starszej niż druk. Tymczasem przynajmniej jedna taka kopia jest zachowana i znajduje się w rękopisie krakowskim[30]. Jej istnienie zmieniło ustalone poglądy na recepcję trygonometrii Regiomontana z końcem XV wieku[31]. Jak wynika ze źródeł, tablica znajdująca się w kodeksie rękopiśmiennym należącym do Mikołaja z Wieliczki Starszego, znanego Kopernikowi od czasu studiów w Krakowie, była używana z końcem XV wieku przez krakowskich astronomów[32]. Sam Mikołaj z Wieliczki podaje, w innym ale także należącym doń kodeksie, sposób posługiwania się tablicą Regiomontana:

> „Usus autem tabule sinuum Iohannis de Monte Regio idem est cum usu alterius tabule et hoc inquirendo sinum per arcum et econverso. Sed pro componendis tabulis illa est facilior et magis utilis secundum multiplicacionem, enim omni numero multiplicando in parte dextra tot cifras quot sunt in toto sinu, videlicet septem [adiungimus].
>
> Similiter enim aliquem numerum maximum dividendo, rectus [?] abjicimus tot figuras a parte dextra de numero dividendo quot sunt figure nihili in toto sinu, et derelicte figure a parte sinistra numerum quocientem indicabunt.
>
> Hec facilitas minime fieri potest per tabulam Peurbachii quoniam in illa [sinus totus] habet alium numerum ab unitate quam denarium [...]. Ideo tabula Iohannis de Regio Monte multo est facilior et compositoribus tabularum utilior."[33]

Stosowanie dziesiętnych tablic trygonometrycznych przez astronomów krakowskich na wiele lat przed skonstruowaniem przez Kopernika dziesiętnej tablicy sinusów włączonej do *De revolutionibus*, potwierdza inna jeszcze nota, tym razem towarzysząca inkunabułowemu wydaniu *Tabulae directionum* Regiomontana. Wpisana ręką Marcina Biema z Olkusza, także znanego Kopernikowi ze studiów w Krakowie, na ostatniej, niezadrukowanej karcie tych tablic, dotyczy wyliczenia przy pomocy tablicy sinusów przy $R=10^7$ tablicy astronomicznej deklinacji Słońca dla argumentów rosnących co 1 stopień:

> „Tabulam declinacionis Solis hoc modo compones: sinum [nadpisane:] 10 000 000 maxime declinacionis Solis multiplica per sinum primi gradus et a multiplicato aufer quatuor [przekreślone „quatuor", nadpisane „septem"] figuras a dextris et cum residuo tabulam sinus ingredire et prodibit declinacio primi gradus. Similiter fac de secundo, tercio, quarto et de ceteris gradibus usque ad 90 et perficias tabulam"[34].

Tak więc zespół źródeł rękopiśmiennych odnoszących się do nauczania astronomii matematycznej w Krakowie z końcem XV wieku zachowany w Bibliotece Jagiellońskiej wskazuje, że Kopernik już w okresie studiów przypadających na lata 1491–1494 (lub 1495), mógł dysponować tablicami dziesiętnych funkcji trygonometrycznych, i to nie tylko sinusa ale także tangensa i cosecansa, oraz poznać ich stosowanie w obliczeniach astronomicznych.

5. PRZEGLĄD TABLIC FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH ZWIĄZANYCH Z TWÓRCZOŚCIĄ KOPERNIKA: OD TRADYCJI PTOLEMEJSKIEJ DO NOWOŻYTNOŚCI

Z nazwiskiem Kopernika związane są cztery tablice trygonometryczne.

(1) Tablica sinusów wyliczona przy R=60 i argumentach rosnących co jeden stopień, przepisana w trakcie studiów w Krakowie, jak o tym świadczy charakterystyczna dla tego okresu kaligrafia Kopernika, z której następnie, pod wpływem renesansowych wzorów, rozwinęła się jego kursywa humanistyczna[35]. Tablica ta zachowana jest w należącym ongiś do Kopernika inkunabułowym weneckim wydaniu *Tabulae directionum profectionumque* Regiomontana z 1490 roku, przechowywanym obecnie w Bibliotece Uniwersyteckiej w Uppsali, sygnatura Copernicana 4, k. 136[36].

(2) Tablica secansów wyliczona przy $R=10^4$ i argumentach rosnących co jeden stopień, wpisana przez Kopernika kursywą humanistyczną, już w XVI wieku, pośród kolumn liczb drukowanej tablicy tangensa, Tabula fecunda, Regiomontana, zachowana w kodeksie jak wyżej, k. 143[37].

(3) Tablica sinusów („połówek cięciw podwojonego kąta") przy $R=10^5$ i argumentach rosnących co 10', tak jak dwie poprzednie zachowana w autografie, w rękopisie *De revolutionibus*[38].

(4) Sporna, przypisywana Kopernikowi (bądź Retykowi) Tablica sinus-cosinus dla $R=10^7$ i argumentów rosnących co minutę, znana tylko w formie drukowanej, opublikowana w 1542 r. jako Aneks przy traktacie trygonometrycznym Kopernika *De lateribus et angulis triangulorum*, pokrywającym się nieomal dosłownie z rozdz. 12–14 księgi I *De revolutionibus*[39]. Wydawcą tego traktatu był Jerzy Joachim Retyk. Kwestią do rozwiązania pozostaje rola Retyka przy nadawaniu Tablicy umieszczonej w Aneksie ostatecznej formy. Tablica ta, w postaci znanej z druku, n i e została wyliczona przez Kopernika (jakkolwiek niekiedy między innymi jemu bywała przypisywana przez historyków). Według naszej hipotezy została ona dołączona przez wydawców do dzieła Kopernika na miejsce oryginalnej tablicy wyliczonej przez Kopernika przy $R=10^6$. Pozostałości oryginalnej tablicy Kopernika można znaleźć w odesłaniach do niej, jakie poczynił Kopernik w *De lateribus et angulis triangulorum*, ale także, jak wykażemy, wśród niektórych danych liczbowych tablicy sinusów $R=10^7$.

Nie przywiązuje się większej wagi do pierwszej z wymienionych tablic ze względu na jej szkolny charakter. Autorstwo Kopernika w przypadku dwu następnych tablic nie jest kwestionowane. Ostatnia natomiast tablica, wprawdzie zawarta w aneksie do dzieła Kopernika, ale nie przypisana *explicite* Kopernikowi przez jej wydawcę, J. J. Retyka, stąd stanowiąca źródło nieporozumień, była traktowana przez badaczy także jako dzieło Retyka[40]. W rzeczywistości, jak wykazałam, w kolumnach podstawowych wartości liczbowych funkcji sinus i cosinus jest to tablica Regiomontana[41].

5.1. SKOPIOWANA PRZEZ KOPERNIKA TABLICA SINUSÓW WYLICZONA PRZY R=60 ORAZ ARGUMENTACH ROSNĄCYCH CO JEDEN STOPIEŃ

Tę „szkolną" tablicę trygonometryczną, nawiązującą do tablicy Ptolemeusza, ale powstałą z przeliczenia cięciw na sinusy, odkryto z końcem XIX wieku[42]. Świadczy ona o tym, że działalność trygonometryczna Kopernika zaczęła się skromnie, od wpisania tablicy (wyciągu z tablicy ?) wyliczonej dla argumentów rosnących co minutę, a więc jeszcze prostszej niż Ptolemeuszowa Tablica cięciw, podająca wartości przy argumentach rosnących co 30'. Dotychczasowe próby odnalezienia wzoru dla kopii Kopernika oraz komentarz dotyczący jej zawartości sprowadzają się do uwagi Ludwika Antoniego Birkenmajera z 1900 roku. Birkenmajer, po wykazaniu, że XV wieczna tablica wpisana ręką Kopernika nie jest adaptacją drukowanej tablicy sinusów wyliczonej przy $R = 60 \cdot 10^3$, zachowanej w tym samym kodeksie, dodaje: „W jakim celu Kopernik tracił czas no to [kopiowanie] skoro właśnie w tej samej książce miał pod ręką drukowaną tablicę i to o wiele dokładniejszą, trudno powiedzieć"[43]. Drogą do uzyskania odpowiedzi na to pytanie były studia porównawcze mające na celu usytuowanie tablicy wśród analogicznych tablic kopiowanych w Krakowie przed Kopernikiem oraz jej edycja krytyczna z analizą wielu rodzajów błędów popełnionych w trakcie kopiowania, jak błędy pióra, czy przesunięcia w kolumnach cyfr, a także wprowadzone przez Kopernika korekty. Ponieważ tylko niektóre z tych błędów zostały skorygowane, o czym świadczą przekreślenia w kolumnach i dopiski na marginesach, a inne nie, można przypuszczać, że tablica była przez Kopernika używana, przynajmniej ta jej część, którą skorygował[44].

5. 2. WYLICZONA PRZEZ KOPERNIKA TABLICA SECANSÓW PRZY $R=10^4$ ORAZ ARGUMENTACH ROSNĄCYCH CO JEDEN STOPIEŃ

Z Kopernikową tablicą secansów łączą się trzy kwestie: formuły matematycznej, która była podstawą dla wyliczenia wartości liczbowych zawartych w tablicy, następnie błędów w wyliczeniach Kopernika i wreszcie kwestia ewentualnych zapożyczeń Kopernika u Bianchiniego gdy chodzi o pomysł wyliczania tablic innych niż sinus-cosinus oraz tangens (Bianchini wyliczył tablicę cosecansa).

Wszystkie te sprawy wydają się współzależne. Pierwszy wydawca Tablicy, Maximilian Curtze, który nie znał dorobku Bianchiniego, w tym analogicznej tablicy (bardziej dokładnej) wyliczonej dla cosecansa, uważał za oczywiste, że Kopernik wyliczając Tablicę posłużył się wzorem[45]:

$$\sec \alpha = 1/\cos \alpha$$

Zostało to zakwestionowane przez L. A. Birkenmajera, wobec błędów obliczeniowych Kopernika; według Birkenmajera prostota wzoru wykluczyłaby niedokładności w obliczeniach sięgające, jak pisze, w przypadku szybko rosnących wartości argumentów 85–89 stopni, już trzeciego miejsca w sześciocyfrowych liczbach. Jako alternatywę dla propozycji niemieckiego historyka L. A. Birkenmajer podał wzór wymagający bardziej skomplikowanego działania, jakim jest pierwiastkowanie, który przez zastosowanie twierdzenia Pitagorasa wyraża funkcję secansa poprzez funkcję tangensa:

$$\sec \alpha = \sqrt{r^2 + \mathrm{tg}^2 \alpha}$$

Argumentem za użyciem tego wzoru miałoby by być także miejsce tablicy secansów w *Tabulae directionum*, wpisanej przez Kopernika wśród kolumn Regiomontanowej tablicy tangensa. Sprawa pozostaje jednak nadal otwarta, bowiem wydaje się, że gdy chodzi o źródła błędów popełnianych przez Kopernika przy obliczeniach, żaden z wymienionych wzorów ich nie usprawiedliwia[46]. Błędne wyniki obliczeń, występujące także w *De revolutionibus*, były już analizowane. Do obecnych rozważań natomiast należało wykorzystanie faktu błędów w Tablicy secansów do studiów porównawczych, a w ich wyniku do ustalenia oryginalności dokonania Kopernika.

Kwestia autora tablicy secansów powstała wobec wspomnianej, istniejącej wcześniej i znanej w uniwersytecie krakowskim jeszcze przed studiami Kopernika, dziesiętnej tablicy cosecansów wyliczonej przez Bianchiniego. Porównanie obu tablic pozwala stwierdzić niezależność Kopernika od Bianchiniego w konstruowaniu tablicy secansów. Jego tablica secansów nie jest kopią tablicy cosecansów (secansów kątów dopełniających) Bianchiniego[47]. Tablica Bianchiniego jest wolna od błędów popełnionych przez Kopernika[48].

5. 3. TABLICA SINUSÓW WYLICZONA PRZEZ KOPERNIKA PRZY $R=10^5$ I ARGUMENTACH ROSNĄCYCH CO 10 MINUT W ŚWIETLE JEGO NOT ZACHOWANYCH W *COPERNICANA 4* ORAZ W ŚWIETLE DZIEŁ TRYGONOMETRYCZNYCH ZNANYCH W KRAKOWIE W XV WIEKU

Tablica sinusów zachowana w *De revolutionibus* została wydana w t. II *Dzieł wszystkich* Kopernika. Była ona przedmiotem analiz i opracowań matematycznych, w wyniku których ustalono tekst krytyczny[49].

Pozostawiono natomiast otwartą sprawę ewentualnego modelu, którym mógł był posłużyć się Kopernik[50]. Tymczasem prowadzone w ostatnim dwudziestoleciu badania matematyki XV wieku, zwłaszcza odkrycie dziesiętnych tablic trygonometrycznych Bianchiniego, dostarczyło materiału porównawczego, który pozwala na postawienie hipotezy dotyczącej modelu tablicy Kopernika z *De revolutionibus*: struktura tablicy przyjęta przez Kopernika nie jest jego pomysłem, ale nawiązuje do struktury większości tablic matematycznych i astronomicznych Bianchiniego[51]. Dotyczy to zarówno obliczeń dla podstawy dziesiętnej, jak wzrostu argumentów co 10 minut. Wspomniana wyżej tablica cosecansów wyliczona przez Bianchiniego zakłada wcześniejsze istnienie jego tablicy sinus-cosinus wyliczonej przy $R=10^n$, dla $n > 4$, identycznej pod względem układu z tablicą cosecansów (ewentualnie dokładniejszej, wyliczonej np. przy wzroście argumentów co 1 minutę). Tablicy tej jednak nie odnaleziono[52].

Poszukując ewentualnego źródła danych liczbowych, z którego Kopernik mógłby czerpać układając Tablicę z *De revolutionibus* wzięłam pod uwagę tablicę wyliczoną przez Regiomontana przy $R=60 \cdot 10^5$ i argumentach rosnących co minutę, nie wydaje się bowiem prawdopodobne, by Kopernik nie znał tej tablicy, pochodzącej z 1467 roku. Posługiwano się nią powszechnie w Krakowie z końcem XV wieku, a w XVI zostałas wydana drukiem. O tym, że w Krakowie stanowiła podstawowe narzędzie pracy oraz weszła bardzo wcześnie do księgozbiorów astronomów świadczą odpisy zachowane w Bibliotece Jagiellońskiej[53]. Świadczy o tym także kodeks związany z nauczaniem w Krakowie, znajdujący się obecnie w Bibliotece Watykańskiej[54].

Próba skonstruowania tablicy według struktury przyjętej przez Kopernika, ale w oparciu o dane liczbowe z Tablicy sinusów Regiomontana polegała po prostu na podzieleniu przez 6 odpowiednich wartości liczbowych z tej ostatniej. Ze względów oczywistych przede wszystkim wybrane zostały te wartości z Tablicy Regiomontana, których odpowiedniki w Tablicy Kopernika są błędne. Tablica, którą w ten sposób otrzymałam pokrywa się z Tablicą z *De revolutionibus*, wykluczając jednak błędy popełnione przez Kopernika (wśród nich błędy wynikające tylko z przestawienia cyfr). Innym jeszcze argumentem, przemawiającym na korzyść (możliwego) przyjęcia przez Kopernika jako punktu wyjścia do konstrukcji własnej tablicy dziesiętnej jakiejś tablicy wcześniejszej, wyliczonej przy promieniu „sześćdziesiętno-dziesiętnym" jest duże podobieństwo niekonsekwencji w kolumnie minut proporcjonalnych (niekonsekwencje te zostały odnotowane przez Edwarda Rosena – gdy chodzi o Tablicę Kopernika, nie były jednak konfrontowane z analogicznymi niekonsekwencjami występującymi na przykład w Tablicy Regiomontana)[55].

Przy braniu pod uwagę możliwości, iż źródłem dla Tablicy Kopernika z *De revolutionibus* była tablica typu $R=60 \cdot 10^n$, ważna jest uwaga Noela M. Swerdlowa w komentarzu do angielskiego tłumaczenia *Commentariolusa* Kopernika. Swerdlow zasygnalizował fakt posługiwania się przez Kopernika, równolegle, wartością sinusa zaczerpniętą z Tablicy dołączonej do *Tabulae directionum*, wyliczonej przy $R=60 \cdot 10^3$ oraz wartością sinusa wyrażoną w konwencji czysto dziesiętnej[56]. Obie wartości liczbowe występują w notatce Kopernika zachowanej w kodeksie *Copernicana 4*, k. 284v, pochodzącej, jak o tym świadczy charakter pisma, już z XVI wieku. Dotyczy ona elementów nowej konstrukcji, a mianowicie ustalenia wielkości mimośrodów i promieni epicykli planet górnych oraz Merkurego[57].

Niezależnie od tego, czy próba dokładniejszego datowania notatki mogłaby być ważna dla datowania tablicy z *De revolutionibus*, sam zapis, jakkolwiek przy obecnym stanie badań nie świadczy o tym, że już wówczas istniała tablica Kopernika wyliczona przy promieniu $R=10^5$, wskazuje jednak, że Kopernik potrzebne mu wartości z tablicy dołączonej do *Tabulae directionum* Regiomontana *ad hoc* zamieniał na dziesiętne, choćby w celu uproszczenia obliczeń na liczbach wielocyfrowych (o pożytkach stosowania tablic dziesiętnych informowali już jego starsi koledzy ze studium krakowskiego, o których mowa wyżej).

Innego rodzaju elementem branym pod uwagę przy datowaniu Tablicy Kopernika była analiza papieru, na którym została wpisana. Według J. Zatheya znaki wodne występujące na tym papierze wskazują, że Kopernik mógł nim dysponować między rokiem 1523 a 1533[58]. Tak więc Tablica w autografie *De revolutionibus* byłaby od dziesięciu do dwudziestu lat starsza niż jej druk (Norymberga 1543). Nie wyklucza to jednak istnienia dużo wcześniej analogicznej tablicy, używanej przez Kopernika podręcznie przed 1523 rokiem.

5.4. TABLICA SINUS-COSINUS (SPORNA) WYLICZONA PRZY $R=10^7$ I JEDNOSTOPNIOWYCH INTERWAŁACH W ANEKSIE *DE LATERIBUS ET ANGULIS TRIANGULORUM* ORAZ KWESTIA REKONSTRUKCJI TABLICY KOPERNIKA PIERWOTNIE PRZEWIDZIANEJ DO PUBLIKACJI

Traktat trygonometryczny Kopernika *O bokach i kątach trójkątów – De lateribus et angulis triangulorum*, zawiera nieomal dosłownie tekst rozdziałów 12–14 Księgi pierwszej *De revolutionibus*, z wyłączeniem zawartych w rozdziale

12 sześciu wstępnych twierdzeń oraz znajdującej się tamże tablicy sinusów, omówionej wyżej w punkcie 5. Zamiast tej tablicy druk z 1542 roku prezentuje dołączoną na końcu tablicę sinus-cosinus, NB. po raz pierwszy ukazującą graficznie zależność istniejącą między wartościami liczbowymi tych dwu funkcji; tablicami wyliczonymi przy $R=10^7$ i dla argumentów rosnących co minutę. Traktat, wydany w Wittemberdze w 1542 roku, został opatrzony przedmową wydawcy, którym był Jerzy Joachim Retyk, i epigramem Dantyszka[59] Ani w tytule książki, ani we wstępie do niej wydawca nie stwierdza, że tablica sinus-cosinus zamieszczona jako aneks do traktatu Kopernika została przez Kopernika wyliczona. Forma nieosobowa, użyta na karcie tytułowej książki: *Additus est canon... Dodana jest tablica...* nie sugeruje autora.

Tablicę tę zwykle przypisywano Retykowi[60]. Tymczasem porównanie tablicy Regiomontana wydanej w 1541 roku z tablicą wydaną przez Retyka w 1542, wystarcza by ukazać ich zasadniczą identyczność[61]. Identyczność ta rozciąga się także na oczywiste błędy drukarskie niektórych wartości, np. sin 1° oraz sin 86°5'. Błędy te występują w tablicy Regiomontana i następnie powtórzone są w Tablicy z *De lateribus...*[62].

Badania nie kończą się jednak wraz z tym ustaleniem, bowiem pozostaje do rozwiązania kwestia, bynajmniej nie drugorzędna, rozbieżności obu tablic. Najbardziej znamienne rozbieżności ukazują dane liczbowe w kolumnach służących interpolacji: w *De lateribus...* w kolumnach tych podano „różnice" – *differentiae* – co 10", natomiast w Tablicy Regiomontana podane są »części proporcjonalne« – *minuta proportionalia* dla 1".

Rozbieżności między obiema Tablicami zdają się wskazywać, że pierwotnie punktem wyjścia Retykowej edycji dzieła Kopernika była tablica inna niż ostatecznie opublikowana, której oczywistą pozostałością byłby element obcy Tablicy Regiomontana, mianowicie kolumna „różnic".

Innych jeszcze argumentów, utwierdzających w przekonaniu, że istniała jakaś pierwotna tablica przewidziana do aneksu, która w edycji z 1542 roku zachowała się tylko w formie szczątkowej [przez nieuwagę drukarzy, którzy nie usunęli do końca jej zawartości?], dostarczają wnikliwsze badania treści tekstu głównego, *De lateribus...*, a w tym badania szczegółów, w których ten traktat różni się od tekstu zachowanego w *De revolutionibus*. Badania porównawcze wykazują co następuje:

Po pierwsze, w samym traktacie *De lateribus...*, w pierwszych sześciu propozycjach, poświęconych teoretycznej podstawie wyliczenia tablicy sinusów, Kopernik odwołuje się do promienia podzielonego na 1 000 000 części, a następnie podaje opisowo, jak dokonać obliczeń odnosząc się do sinus totus (sin 90°) który jest równy 1 000 000, tj. $R=10^6$ (!), odwołując się do średnicy okręgu 2R = 2 000 000[63]. Mowa jest zatem w tekście *De lateribus...* o tablicy różnej niż zachowana w *De revolutionibus*, wyliczonej przy 2R = 200 000, oraz różnej niż Tablica ostatecznie opublikowana w *De lateribus*... (= Tablica Regiomontana) która została wyliczona przy 2R = 20 000 000.

Wreszcie, wracając do Tablicy sinus-cosinus ostatecznie opublikowanej przy *De lateribus*..., rzeczywiście, p o z a obcą Regiomontanowej Tablicy kolumną przyrostu funkcji na jedną minutę, także w kolumnach podstawowych ostatnia zamieszczona wartość liczbowa, odpowiadająca sin 90°, przez pomyłkę (?) równa jest 10^6 a nie, jak powinno być, 10^7. Odnosi się więc ta wartość do średnicy 2R = 2 000 000, zamiast, odpowiednio do wyliczeń ostatecznie opublikowanej Tablicy, do średnicy 2R = 20 000 000. W świetle tego co powiedziano wyżej, należy uznać wartość 1 000 000, która miałaby odpowiadać sin 90°, za nieadekwatną do całości tablicy (winno być 10 000 000). Być może jest to rezultatem niedopatrzenia drukarzy, w sytuacji gdy przy wymianie czcionek w gotowym już składzie pierwotnej Tablicy, wyliczonej przy $R=10^6$, nie tylko nie wymieniono towarzyszącej tej Tablicy kolumny podającej przyrosty funkcji co dziesięć sekund na kolumnę przyrostu funkcji na jedną sekundę – Regiomontanowe „*portio unius secundi*", ale ponadto przeoczono dodanie jednego więcej zera do ostatniej wartości liczbowej w składzie tablicy[64].

Pozostaje do zasygnalizowania inna jeszcze kwestia, związana ze strukturą obu tablic: o ile Tablica Regiomontana jest po prostu tablicą sinusów, w tablicy z *De lateribus*... wyróżnia się graficznie wejście do tablicy dla odczytania z niej także wartości cosinusa – *sinus secundus*.

O tym, że jakaś tablica funkcji sinus wyliczona przy $R=10^6$, nie zachowana – czy też raczej tylko w formie szczątkowej zachowana – była tablicą wyliczoną przez Kopernika, a nie na przykład przez Retyka, świadczyłyby odniesienia do niej w tekście Kopernikowego *De lateribus et angulis triangulorum*.

ZAKOŃCZENIE

Badanie działalności matematyków – astronomów XV wieku oraz działalności Kopernika na polu trygonometrii w wieku XVI, pozwala prześledzić bliżej proces uniezależniania się trygonometrii od astronomii, a następnie kształtowania się trygonometrii w samodzielną dyscyplinę matematyczną, rozwijającą się, zgodnie ze swą „podwójną" strukturą: w budowaniu dowodów – z wykorzystaniem Euklidesowej geometrii i jej rygorów, ale, w wyliczaniu tablic funkcji trygonometrycznych – z wykorzystaniem algebry.

Wydaje się, że zainteresowanie okazane funkcjom trygonometrycznym, innym niż uprawomocniona przez starożytną tradycję funkcja sinusa, niezależnie od tego, czy było poprzedzone wyliczaniem tablic trygonometrycznych tych funkcji, czy było konsekwencją dostrzeżenia możliwej użyteczności takich tablic w obliczeniach astronomicznych (ta druga ewentualność, w przypadku Bianchiniego, który jest tu pionierem, wydaje się bardziej prawdopodobna, w przypadku Kopernika natomiast być może pierwotne były zainteresowania teoretyczne), miało znaczenie dla uświadomienia sobie pełnego wachlarza możliwości, jakie stawały przed renesansową trygonometrią. Renesansową n i e w znaczeniu: nawiązującą do oryginalnego hellenistycznego dziedzictwa, ale raczej – paradoksalnie: czerpiącą z inspiracji (średniowiecznej) matematyki islamu „uniezależnionej" od starożytnych autorytetów.

Z punktu widzenia następnej fazy rozwoju trygonometrii, zainicjowanej u progu nowożytności, począwszy od Kartezjusza, niezaprzeczonym osiągnięciem XV-wiecznego „przełomu" w trygonometrii było odniesienie się do promienia jednostkowego jako podstawy wyliczeń tablic trygonometrycznych. U Bianchiniego wprowadzeniu takiego promienia do obliczeń tablic towarzyszą rozważania teoretyczne na temat interpretacji geometrycznej – z udziałem odcinka jednostkowego (!) – działań arytmetycznych na liczbach niewymiernych. Jak starałam się wykazać przy innej okazji, rozważania Bianchiniego przywołują na myśl pierwsze rozdziały *La Géométrie* Kartezjusza (1637), od których historia zwykła datować nową epokę w matematyce[65].

Przypisy

* Dziękuję Królewskiej Akademii Historii i Starożytności – Kunglig Vitterhets Historie och Antikvitets Akademien w Sztokholmie za zorganizowanie stażu w Szwecji (w wyniku współpracy z IHN PAN) oraz Bibliotekarzom Uniwersyteckiej Biblioteki w Uppsali, gdzie były prowadzone badania autografów Kopernika (w tym tablice trygonometryczne zachowane w kodeksie Copernicana 4). Część badań w Bibliotece Jagiellońskiej w Krakowie w 2001 r. była sponsorowana grantem KBN 1HO1G04519. Natomiast środowisko Bianchiniego i włoskich abacystów zostało opracowane podczas wcześniejszych staży w Centro Studi ed Incontri Europei w Rzymie – dzięki uprzejmej pomocy Pani Wandy Gawrońskiej – oraz harwardzkim Center for Italian Renaissance Studies, Villa I Tatti, Florencja.

[1] *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia*. Wyd. J. L. H e i b e r g , Vol. I, *Syntaxis Mathematica*, cz.1, Leipzig 1898, s. 48–63.

[2] Wykład trygonometrii Ptolemeusza por. O. N e u g e b a u e r : *A History of Ancient Mathematical Astronomy* [dalej cytowane: HAMA]. Berlin, Heidelberg, New York 1975, Part One, s. 22–31; Part Three, s. 1211–1214, fig. 1–22.

[3] G. R o s i ń s k a : *Numerus absurdus a pojęcie „liczby ujemnej" w Arytmetyce Giovanniego Bianchinego (Ferrara ca. 1450)* [w:] *„Drogą Historii". Studia ofiarowane Prof. Józefowi Szymańskiemu*. Red. P. D y m m e l , K. S k u p i e ń s k i , B. T r e l i ń s k a . Lublin 2001, s. 355–363. G. R o s i ń s k a : *Mathematics at universities in times of Copernicus: the modern attitudes toward ancient problems* (w druku, seria „Archimedes", Akta Sympozjum w Walencji poświęconego znaczeniu uniwersytetów dla nauki we wczesnej nowożytności).

[4] Dotyczyło zwłaszcza astronomii okresu hellenistycznego, wyłożonej w *Almageście* Ptolemeusza w formie doskonałego (nieomal) systemu. Dziedziczył on, od strony formalnej, rygory wcześniejszego ponad czterysta lat Euklidesowego wykładu geometrii.

[5] Por. G. J. T o o m e r : *The Chord Table of Hipparchus and the Early History of Greek Trigonometry*, „Centaurus" 1973 (18) , s. 6–28.

[6] G. J. T o o m e r : *Ptolemy's Almagest.* Translated and Annotated by... London 1984, s. 48–56.

[7] Mówiąc o strukturze ptolemejskiej tablicy cięciw używamy terminu „argument", co zakłada traktowanie tablicy cięciw w kole jako tablicy funkcji trygonometrycznej. Na temat koncepcji funkcji, istniejącej *implicite* w *Almageście*, por. O. P e d e r s e n : *A Survay of the Almagest*, Odense, 1974, s. 81–93.

[8] Cięciwy – dosłownie „linie w kole". Według edycji *Almagestu* z 515 roku, posiadanej przez Kopernika, Księga I rozdz. 9: *De scientia quantitatis chordarum partium circuli.* [...] *Videmus quod necessario oportet nos prius loqui de scientia quantitatum chordarum partium circuli. Postquam volumus declarare demonstrationem super hoc quod narraturi sumus per lineas, et facere post hoc ut levior fit inventio partis cuius volumus scire quantitatem per tabulas. Dividam itaque circuli circumferentiam per 360 partes et ponam superfluum arcuum in eis secundum augmentum medietatis et medietatis partis et coram ipsis quantitatem chordarum que eis subtenduntur. Et dividam diametrum circuli in 120 partes ad hoc ut nobis declaretur eius levitas in numeris. [...] Et assumemus numerum 60 in omnibus que operaturi sumus ex capitulis arithmetice, ut allevietur operatio in fractionibus et sequemur in omni multiplicatione et divisione ad sciendum cuius quantitatis veritatem volumus ei propinquiorem et ita ne quod ex eo deest quantitatis sit sensibilis.* Cytowany fragment ukazuje łacinę Gerarda, którą starał się oddać arabski przekład greckiego *Almagestu.* Zachowano interpunkcję druku. W wersji polskiej fragmentu posłużyłam się oryginałem (edycja krytyczna): *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia*, dz.cyt. s. 32, konsultując także tłumaczenie angielskie, G. J. T o o m e r : *Ptolemy's Almagest*, dz.cyt., s. 48.

[9] O. P e d e r s e n , *A Survay*, dz.cyt., s. 64–65.

[10] W wydaniu *Almagestu*, którym posługiwał się Kopernik tablica znajduje w rozdziale 11: *De positione arcuum et chordarum eorum in tabulis*, k.7r–8v. Edycja krytyczna G. J. T o o m e r : *Ptolemy's Almagest*, dz.cyt., s. 57–60. Metody obliczeniowe stosowane przez Ptolemeusza O. N e u g e b a u e r : HAMA, s. 21–26; O. P e d e r s e n : *A Survay of the Almagest*, dz.cyt., s. 52–65. Analiza krytyczna danych liczbowych E. G l o w a t z k i , H. G ö t t s c h e : *Die Sehnentafel des Klaudios Ptolemaios nach den historischen Formelplänen neu berechnet*, München-Wien 1976, s. 43–46. Por. także recenzja tej pozycji G. J. T o o m e r : w: „Centaurus" 21, 1977, s. 321–323.

[11] Por. P. K u n i t z s c h : *Der Almagest. Die Syntaxis Mathematica des Claudius Ptolemäus in arabisch-lateinischer Überlieferung.* Wiesbaden 1974. Poza przekładem z języka arabskiego przez Gerarda z Kremony ok. 1170 roku, istniał ok. dwadzieścia lat wcześniejszy przekład bezpośrednio z greckiego dokonany na Sycylii. Tłumaczenie to, w przeciwieństwie do tłumaczenia Gerarda, szerzej nie oddziałało. Natomiast o trwałości oddziaływania tłumaczenia Gerarda – niedoskonałego – świadczy jego wydanie w Wenecji

w 1515 roku. Egzemplarz z tej edycji, dotąd zachowany, znajdował się w księgozbiorze Kopernika; obecnie w Bibliotece Uniwersyteckiej w Uppsali (sygn. Copernicana 17).

[12] Starożytni odsyłali do cięciw oraz do „cięciw kąta dopełniającego" – bez tworzenia odrębnego terminu na oznaczenie tej drugiej funkcji. Arabowie używali ponadto pojęcia *„sinus versus"* według wzoru sinvers α = R – *sin complementi* [cosinus] α. W gnomonice stosowano proste tablice tangensa i cotangensa, tzw. „tablice cieni", wyliczane przy wysokości gnomona R=12. Obie te funkcje pojmowano fizycznie, jako „długości cienia" rzucanego przez oświetlony słońcem gnomon. Ogólnie dominowała tendencja traktowania „funkcji" jako linii, a nie jako stosunku dwu wielkości, jakkolwiek zdawano sobie sprawę z tego, że „tablice cieni" podają zależność, pewną *ratio* zachodzącą między wysokością kątową Słońca nad horyzontem a długością cienia rzucanego przez pionowy gnomon (można przyjąć, że także te tablice były w pewnym znaczeniu traktowane w kategoriach tablic „funkcji" – bez stosowania, oczywiście, tego terminu). Na utrudnienia w obliczeniach astronomicznych spowodowane brakiem w astronomii starożytnej idei (i tablicy) tangensa zwraca uwagę O. Neugebauer: HAMA, s. 32.

[13] Kopię takiej tablicy zidentyfikowałam w rękopisie Bibliothèque Nationale w Paryżu, BN Lat. 10265, k.232v–233r. Edycja tablicy na podstawie źródeł hebrajskich B. R. Goldstein: *The astronomical Tables of Levi ben Gerson*, New Haven 1974, s. 153–155.

[14] Jan z Murs jest autorem kompilacji *De arte mensurandi* (ok. 1344) oraz traktatu *Quadripartitum numerorum*, w którym, w części matematycznej, wykorzystuje dorobek Alchorezmiego (Alkwarismi) i Leonarda Fibonacci oraz dziełka trygonometrycznego *Figura inveniendi sinus cardagarum*, dotyczącego konstrukcji tablicy sinusów. E. Poulle: *John of Murs. Dictionnary of Scientific Biography*, vol. 7, s. 128–129. Działalność Jana z Lineriis w Paryżu przypada na lata ok. 1320–1335, por. E. Poulle: *John of Lineriis*, tamże, s. 122–128.

[15] Oba dzieła poświęcone są trygonometrii (w *Quadripartitum* głównie ks. I). Por. J. D. North: *Richard of Wallingford*. An edition of his writings with introductions, English translation and commentary by.... Vol. I *Texts and translations*. Oxford 1976, s. 21–169, 170–178. *Tabula corde verse*, s. 432. Wallingford odnosi się do trygonometrii Gebera (Jab'ir ibn Afflah), wyraźnie mówiąc o wyższości twierdzenia Gebera, o proporcjach „czterech wielkości" nad twierdzeniem Menelaosa o proporcjach „sześciu wielkości". Por. *Tractatus de sectore*, III 3 (tercia pars) oraz IV (pars), tamże, s. 175 oraz 177–178. *Trygonometria* Gebera będzie miała decydujący wpływ na Regiomontana, zwłaszcza na ks. IV *De triangulis omnimodis libri quinque*, a następnie na trygonometrię sferyczną Kopernika. Por E. Stamm: *La geometrie de Nicolas Copernic*, [w:] *La Pologne au 7e Congres des Sciences Historiques*, Varsovie 1933, s. 171. W Krakowie znany był wykład trygonometrii Gebera przynajmniej równolegle z *Albionem* Wallinforda (nie wydaje się, by stało się to za pośrednictwem *Tractatus Albionis*. Wykład astronomii planetarnej Wallingforda z *Tractatus Albionis* znany był przynajmniej w latach czterdziestych XV wieku, a Ryszarda cytowano pod imieniem Albeon (zniekształcona nazwa wynalezionego przezeń instrumentu „Albion", będącego rodzajem *aequatorium planetarum*). Na „Albeona" powołuje się Marcin Król z Przemyśla w 1444/5 roku w *Summa super tabulas*, rkp, BJ 1927, k. 284v, a następnie Albion Wallingforda cytuje Wojciech

z Brudzewa (także jako „Albeon"), jako trzecią z pozycji, do których odnosi się najczęściej przy komentowaniu *Theoricae novae planetarum*, a mianowicie poza *Almagestem* Ptolemeusza i *Almagestum abbreviatum* anonimowego autora. Por. *Commentariolum super Theoricas novas planetarum Georgii Purbachii in Studio Generali Cracoviensi per Mag. Albertum de Brudzewo diligenter corrogatum A.D. MCCCCLXXXII.* Cracoviae 1900.

[16] E. P o u l l e : *Les Tables Alphonsines avec les canons de Jean de Saxe.* Edition, traduction et commentaire par...Paris 1984, s. 4.

[17] Edycja tablicy sinusów por. E. G l o w a t z k i , H. G ö t t s c h e : *Die Tafeln des Regiomontanus. Ein Jahrhundertwerk* München 1990, s. 82–92. oraz H. L. L. B u s s a r d , *Der Traktat De sinibus, chordis et arcubus von Johann von Gmunden*, Denkschriften der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse, 1971 (116), s. 76.

[18] Zwłaszcza Jan Regiomontan, autor traktatu *De triangulis omnimodis libri quinque*, ukończonego na przełomie lat sześćdziesiątych i siedemdziesiątych XV wieku, jest postrzegany jako twórca w Europie nowego ujęcia metodologicznego trygonometrii i w rezultacie nadania jej statusu nauki w miejsce statusu narzędzia obliczeniowego. Studia nad recepcją w Europie matematyki świata islamu wykazały dużą zależność Regiomontana od Gebera (Jabi'r ibn Aflah). Obecnie nie ulega wątpliwości zależność Regiomontana *De triangulis omnimodis libri quinque* od Gebera, zwłaszcza ks. IV. Wcześniej, Geber ukształtował trygonometrię Wallingforda, *Tractatum quadripartitum* oraz *De sectore*, a poprzez traktaty tego autora (por. przypis 15) oddziałał na uniwersytecką trygonometrię późnego średniowiecza. Odnajduje się jego wpływy także w trygonometrii Kopernika. Por. L. A. B i r k e n m a j e r : *Mikołaj Kopernik*, Kraków 1900, s. 226–227 oraz E. S t a m m , por. wyżej, przypis 15. Jednym z osięgnięć Gebera, istotnych dla trygonometrii sferycznej (prowadziło ono także do znacznego uproszczenia obliczeń astronomicznych), było zastąpienie twierdzenia Menelaosa, dotyczącego proporcji zachodzących między sześcioma wielkościami (łuki kół sfery), twierdzeniem o proporcjach czterech wielkości. Por. R. P. L o r c h : *Jabir ibn Aflah Al-ishbili, Abu Muhammad, [Geber], Dictionary of Scientific Biography*, Vol. XII, s. 37–39, t e n ż e : *Jabir ibn Aflach and the Establishment of Trigonometry in the West* [w:] *Arabic Mathematical Sciences. Instruments, Texts, Transmissions*. London 1995, VIII,s. 1–42 (Variorum).

[19] Jan z Gmunden por. K. V o g e l : *John of Gmunden, Dictionnary...* dz.cyt., t. 7, s. 117–122. Georgius Peurbachius (Purbachius) por. C. Doris H e l l m a n , N. S w e r d l o w : *Peurbach (or Peuerbach) Georg, Dictionnary...* dz.cyt., t. 15, s.473–479.

[20] Por. G l o w a t z k i - G ö t t s c h e , dz.cyt., s. 73–113.

[21] Jak wspomniano, w średniowieczu tablice tangensa i cotangensa znane były jako tablice „cieni" rzucanych przez oświetlony słońcem pionowy gnomon.

[22] W źródłach związanych z nauczaniem uniwersyteckim matematyki „na potrzeby astronomów", wywodzących się z tradycji szkół abaku, odnalazłam trzy poziomy kształtowania się pojęcia ułamków dziesiętnych: opracowanie t e o r e t y c z n e – koncepcja ułamka dziesiętnego, opierająca się na zmianie klasycznego pojęcia liczby, ograniczonego do liczb naturalnych; następnie, szkolny wykład a r y t m e t y k i ułamków dziesiętnych; wreszcie tablice d z i e s i ę t n y c h funkcji trygonometrycznych. Por. niżej, przypisy 23–24.

[23] Z tą jedynie różnicą, że od nowożytności wartości podawane są w formie ułamka dziesiętnego. O tym, że Bianchini realizując tablice dla podstawy wyrażonej jako potęga liczby 10, zgodnie ze zwyczajem, w rzeczywistości traktował zawarte w niej wartości liczbowe jako ułamki dziesiętne, świadczy jego arytmetyka ułamków dziesiętnych wyłożona w traktacie *Compositio instrumenti*, zachowanym w Modenie, Biblioteca Estense, sygnatura: Lat. 145 (. T. 6. 19), wyd. P. G a r u t i : *Giovanni Bianchini, Compositio instrumenti (Cod. Lat. 145 = . T. 6. 19) della Biblioteca Estense di Modena.* [w:] „Rendiconti Classe di Lettere e Scienze Morali e Storiche", vol. 125(1), 1991, (Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere) Milano 1992, s. 95–127. Komentarz do traktatu *Compositio instrumenti* Bianchiniego wraz ze studium na temat wykładu ułamków dziesiętnych tego autora w innych jego pismach matematycznych i astronomicznych oraz ukazaniem możliwości wpływu na Kopernika por. G. R o s i ń s k a : *Decimal positional fractions. Their use for the surveying purposes. (Ferrara, 1442).* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki, 40, 1995, s. 17–32. Składam podziękowanie Bibliotece Istituto di Storia della Scienza we Florencji za udostępnienie odbitki tej publikacji oraz za pozwolenie wykonania odbitki z mikrofilmu rękopisu Lat. 145 (α. T. 6. 19) z Bibl. Estense w Modenie.

[24] Zagadnieniom tym poświęcone są *Additiones canonum primi mobilis*, zachowane w rękopisie BJ 556, k.5ra–7va. *Additiones* zostały prawdopodobnie zredagowane na przełomie lat czterdziestych i pięćdziesiątych XV wieku, zakładają bowiem znajomość posługiwania się arytmetyką ułamków dziesiętnych, wypracowaną przez Bianchiniego z początkiem lat czterdziestych (1442).

[25] Tak jest w przypadku cofnięcia o ponad sto lat daty odkrycia ułamków dziesiętnych i opracowania ich arytmetyki w traktacie napisanym przez Bianchiniego w 1442 roku, dla uczczenia objęcia władzy w Ferrarze przez Leonella d'Este. Stało się to na długo przed ukazaniem się *De Thiende* Szymona Stevina. Bianchini okazał się ponadto prekursorem Regiomontana w dziedzinie tablic dziesiętnych funkcji trygonometrycznych. G. R o s i ń s k a : *L'Audience de Regiomontanus a Cracovie au XVe et au début du XVIe siecle* [w:] „Regiomontanus-Studien" , Hrsg. G. Hamann, Őserreichische Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse Sitzungsberichte, 364 Bd, Wien 1980, s. 326, gdzie zostały porównane tablice tangensów obu autorów, oraz t a ż : *Giovanni Bianchini – matematyk i astronom XV wieku.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" j.w. Dopiero z końcem XX wieku odkryto analogiczność propozycji Bianchiniego, Bombellego i Kartezjusza w zastosowaniu tzw. „odcinka jednostkowego" przy kwantyfikowaniu relacji wielkości niewspółmiernych (wydaje się, że dokonało się to nie bez wpływu na przyjęcie przez Bianchiniego koła o jednostkowym promieniu jako podstawy do wyliczania tablic trygonometrycznych). Zajmuję się tą kwestią bardziej szczegółowo w: *Mathematics at universities in times of Copernicus: the modern attitudes toward ancient problems. Akta międzynarodowego sympozjum „Uniwersytety a nauka nowożytna"*, Walencja 2000 (w druku: seria MIT „Archimedes") oraz G. R o s i ń s k a : *The „fifteenth century roots" of modern mathematics. The unit segment. Its function in Bianchini's De arithmetica, Bombelli's Algebra... and Descartes' La Geometrie.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 41 (1996) s. 53–70.

[26] W rękopisach Biblioteki Jagiellońskiej znajduje się najbardziej kompletny zespół zachowanych dotąd dziesiętnych tablic trygonometrycznych Bianchiniego. G. R o s i ń s k a : *Scientific Writings and Astronomical Tables in Cracow. A Census of Manuscript Sources (XIV–XVI Cent.).* T. XXII Studia Copernicana, Wrocław 1984 s. 476–477. Na podstawie rękopisów krakowskich BJ 556, k. 52r–53v i 65v–67v oraz BJ 606, k. 65v–67v przygotowałam pierwsze edycje jego tablic, tangensa i cosecana (fragmenty), o których mowa w poprzednim przypisie. Opis rękopisu BJ 556 por. *Catalogus codicum manuscriptorum medii aevi Latinorum qui in Bibliotheca Jagellonica Cracoviae asserventur*, t. 3, Vratislaviae 1984, s. 376–382 (nie uwzględniający informacji o dziesiętnych tablicach Bianchiniego).

[27] Czysto dziesiętne tablice trygonometryczne Bianchiniego zostały odkryte dopiero z końcem lat siedemdziesiątych XX wieku i po raz pierwszy opublikowane 1984 roku. G. R o s i ń s k a : *Tables trigonometriques de Giovanni Bianchini.* „Historia Mathematica" 8 (1981) s. 315–333.

[28] W wieku XVI uczynił to Kopernik, konstruując tablicę secansów, nie stosowaną przezeń do obliczeń – jak wnioskuje się z zachowanych przekazów. Tablica została „wpisana" do Regiomontana tablicy tangensów, w wolną przestrzeń między kolumnami liczb tej tablicy.

[29] O tym, że już we wczesnych latach sześćdziesiątych Regiomontan znał dziesiętne tablice trygonometryczne Bianchiniego, będące częścią zespołu *Tabulae magistrales*, mógłby świadczyć list Bianchiniego, w którym informuje Regiomontana o istnieniu tych tablic oraz odpowiedź udzielona przez Regiomontana. Por. M. C u r t z e : *Der Briefwechsel Regiomontans mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Chistian Roder.* „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen" 1902 (12), s. 206. Z odpowiedzi Regiomontana, który donosi o wykonaniu kopii *Tabulae primi mobilis* Bianchiniego nie wynika jednak, że kopiowany dla niego egzemplarz miał dołączone *Tabulae magistrales* (chociaż zwykle tak bywało, bo są one matematycznym wprowadzeniem do tych tablic).

[30] BJ 606, k. 171r–180r.

[31] Opis katalogowy BJ 606 por. *Catalogus codicum manuscriptorum medii aevi Latinorum qui in Bibliotheca Jagellonica Cracoviae asservantur.* Vol. IV, Vratislaviae 1988.

[32] Podobne noty dotyczą dziesiętnej tablicy tangensów, zwanej „*Tabula fecunda*" i zachowane są w rękopisie BJ 569, k. 5v i BJ 598, k. 3r: „*Arcum sinuum invenio per Tabulam fecundam*" oraz w rękopisie BJ 603, k.65: „*Item cum declinacione stelle intra tabulam fecundam*". Biogram Mikołaja por. M. Z w i e r c a n : *Mikołaj z Wieliczki (Starszy) Polski Słownik Biograficzny* t. 21, s. 147.

[33] W rękopisie BJ 600, s. 269, należącym do Mikołaja z Wieliczki Starszego (NB właściciela także rękopisu BJ 606, w którym na k.171r–180r zachowana jest tablica sinusów Regiomontana dla promienia R= 10^7) znajduje się własnoręczna nota Mikołaja z Wieliczki dotycząca posługiwania się wymienioną tablicą : „Tablicy sinusów Regiomontana używa się tak jak innych tablic, szukając sinusa poprzez łuk i odwrotnie, ale dla komponowania tablic [astronomicznych] ta jest łatwiejsza i bardziej użyteczna ze względu na mnożenie. Każdej bowiem liczbie [dopisujesz] tyle zer, od strony prawej, ile ma ich pełny sinus [sin 90°], a mianowicie siedem. Podobnie też, dzieląc liczbę wielką [przez sin 90°] po prostu odcinamy tyle cyfr od strony prawej ile jest zer w pełnym sinusie, a cyfry

pozostałe ze strony lewej są ilorazem. To ułatwienie w minimalnym stopniu jest osiągane przy [stosowaniu] tablicy Peurbacha, bowiem w niej pełny sinus wyrażony jest przez liczbę inną niż dziesięć. Dlatego to tablica Jana z Regio Monte o wiele jest łatwiejsza [w użyciu] i użyteczniejsza konstruującym tablice [astronomiczne]".

Autor noty zakłada milcząco, przy omawianiu dzielenia przez potęgę liczby 10, że dzielna, będąca „wielką liczbą", kończy się zerami w nie mniejszej ilości niż ilość zer w dzielniku. Nie dodaje natomiast, że – stosując tę samą zasadę przy dzieleniu liczby niższego rzędu przez liczbę wyższego rzędu – otrzymuje się w ilorazie pozycyjny ułamek dziesiętny, w którym, według wykładu Bianchiniego, punkt oddziela część ułamkową od części całkowitej liczby (lub od zera) Por. G. R o s i ń s k a : *Decimal positional fractions...* dz.cyt., s. 28–30.

[34] Inc. BJ 2700, k. nlb., bezpośrednio po *Tabulae directionum*: „Tablicę deklinacji Słońca w ten sposób ułożysz: sinus [nadpisane:] 10 000 000 największej deklinacji Słońca pomnóż przez sinus jednego stopnia i od iloczynu odrzuć cztery [nadpisane:] siedem zer. Dla tego co pozostanie znajdź [wartość liczbową] w tablicy i otrzymasz deklinację odpowiadającą jednemu stopniowi. Podobnie zrób z drugim, trzecim i czwartym stopniem, aż do 90 i wykonasz tablicę".

[35] G. R o s i ń s k a : *Identyfikacja „szkolnych tablic astronomicznych" Kopernika.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 29 (1984) s. 637–644; oraz t a ż : *Krakowski księgozbiór Mikołaja Kopernika w kodeksach Copernicana 4 i Copernicana 6 Biblioteki Uniwersyteckiej w Uppsali.* [w:] „Res Historica" 13: *Z książką przez wieki*, red. A. K r a w c z y k , Lublin 2002, s.105–123. Pierwsi wydawcy kopernikanów zachowanych w Szwecji, M. Curtze, F. Hippler, L. Prowe, L. A. Birkenmajer byli świadomi dwu różniących się charakterów pisma Kopernika, jakkolwiek nie podawali konsekwentnie, jaką kaligrafią wpisany został określony tekst, kursywą „gotycką" typową dla środowiska krakowskiego końca XV wieku, czy kursywą humanistyczną, znaną następnie z XVI wiecznych podpisanych przez Kopernika listów i z *De revolutionibus* (przy tym teksty pisane przez Kopernika kursywą gotycką, zwłaszcza w obecnym kodeksie uppsalskim Copernicana 4, nie budziły zastrzeżeń wymienionych wyżej badaczy co do autora). Ukształtowanie się tego drugiego sposobu pisania łączone jest z pobytem Kopernika we Włoszech.

[36] Por. facsimile autografu Kopernika, *Dzieła wszystkie*, tom IV, tabl. XXXIII, 60.

[37] L. A. B i r k e n m a j e r , dz.cyt. s. 61–62.

[38] Wyd. tabl. sinusa z *De rev. Dzieła Wszystkie*, t. II, s. 31–38.

[39] Z wyjątkiem sześciu pierwszych twierdzeń oraz tablicy sinusów włączonej w *De revolutionibus* do rozdz. 12. *De lateribus et angulis triangulorum...* Por. facsimile druku tej tablicy, *Dzieła wszystkie*, t. 4, tabl. LXVIII.

[40] E. R o s e n : *Rheticus, George Joachim, Dictionnary...* dz.cyt. t. 11, s. 395

[41] G. R o s i ń s k a : *Nie przypisujmy Rhetykowi dzieła Regiomontana.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 28 (1983) s.615–619.

[42] Tablicę po raz pierwszy wydał i komentował M. C u r t z e : *Reliquiae Copernicanae*, Leipzig 1875, s. 29, 34–35 oraz 56. Korekta błędów wydawcy i uzupełnienie komentarza L. A. B i r k e n m a j e r : *Mikołaj Kopernik*, Kraków 1900, s. 61.

[43] L. A. B i r k e n m a j e r , dz.cyt. s. 61.

[44] Tablica jest przedmiotem szczegółowej analizy przygotowywanej do publikacji.

[45] M. C u r t z e : *Reliquiae*, dz.cyt., s. 62–64.

[46] Wykaz błędów podał E. R o s e n : *Nicholas Copernicus, Complete Works*, t. 2, s. 364, omawiając m.in. „*dittographical errors*". Część błędów istotnie ma charakter *lapsus calami*, na przykład, podaję za Rosenem, sin 25° 30' jest 43351 winno być 43051; sin 25° 40' jest 43393 winno być 43313; sin 37° 40' jest 61177 winno być 61107. Niektóre wartości zapisane błędnie nie stanowiły podstawy do wyliczenia kolejnych wartości, poprawnych, inne były przyczyną kumulowania się błędów (por. tamże).

[47] Została wyliczona przez Bianchiniego ok. połowy XV wieku, stosowana w Krakowie prawdopodobnie już na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych XV wieku (por. rkp. BJ 556). Twórczość trygonometryczna Bianchiniego nie była znana badaczom wymienionym w przypisie 49.

[48] Nie jest jednak całkowicie wolna od błędów, natomiast tam, gdzie u Kopernika są wartości błędne, Bianchini podaje poprawne, na przykład:

stopnie	Kopernik	Bianchni	wartości poprawne
85°	114738	114745	114745
86°	143355	143369	143369

Wartości w trzeciej kolumnie pochodzą z E. G l o w a t z k i , H. G ö t t s c h e : *Die Tafel des Regiomontanus*, dz.cyt. s. 192.

[49] J. D o b r z y c k i : *Komentarz do Ks. I rozdz. 12: Mikołaj Kopernik, O obrotach, Dzieła Wszystkie*, t. II, Kraków 1976, , s. 361. E. R o s e n : *Notes on Book I, Chapter 12 On the Revolutions, Complete Works*, 1978, s. 364. Por. także E. S t a m m : *Geometria Kopernika*, „Wiadomości Matematyczne",1934, s. 58–60 (lub wersja francuska tego studium cytowana w przypisie 15).

[50] E. R o s e n , dz.cyt., s. 363 [...] *Copernicus expresses the length of the chord in decimal parts of a diameter assumed = 200,000. This shift from the sexagesimal to the decimal basis, accompanied by the reduction of the scope of the Table from the semicircle to the quadrant, and by the reduction of the argument from 30' to 10', is not found in P-R* [Peurbach-Regiomontanus, *Epytome Almagesti*], *GV* [Giorgio Valla] *PS* [Ptolemaeus, *Almagest*] *1515. Copernican scholars have not yet discovered what model, if any, Copernicus followed in transforming Ptolemy's sexagesimal Table of Chords into an early form of the modern Table of Natural Sines.*

[51] Początek tablicy tangensów dla $R=10^3$ Bianchiniego (ok. połowy XV wieku) i tablicy sinusów Kopernika z *De revolutionibus*, $R=10^5$ gdy funkcje te podobnie przebiegają:

	Bianchini				Kopernik		
g.	m.			g.	m.		
0	10	29	29	0	10	291	291
	20	58			20	582	
	30	87			30	873	
	40	116			40	1163	
	50	145			50	1454	
1	0	175		1	0	1745	

	10	204		10	2036
	20	233		20	2327
	30	262		30	2617
	40	291		40	2908
	50	320		50	3199
2	0	349	2	0	3490

[52] L. A. Birkenmajer skonstruował tablicę secansów wyliczoną z tablicy sinus/cosinus z *De revolutionibus*, por. dz.cyt. s. 61.

[53] W Krakowie zachowana w rękopisach BJ 574, BJ 596, BJ 597, BJ 600 oraz w Bibliotece Watykańskiej, w rękopisie związanym ze studiami uniwersyteckimi w Krakowie Vat. Palatinus Lat. 1375 Por. G. Rosińska, *Scientific Writings*... dz.cyt., s. 503.

[54] Rękopis Vat. Palatinus Lat. 1375. Tablica na k. 106v–115r poprzedzona została, k. 106r, następującą notą, ukazującą jej stosunek do *Tabulae directionum*: „*Notandum est quod per presentem tabellam sinus recti que sequetur composite sunt tabule directionum demptis duoabus figuris a parte dextra. Et ideo semper, dum per eam et tabulas predictas aliquid querere volueris, debes abicere duas figuras a parte dextra. Hec enim tabula tota presupponit sinum habere 6 000 000 milia* [sic!] *parcium. Unde, ablatis duabus figuris nihili remanebunt 60 000 milia* [sic!] *parcium sinus tocius, quem presupponunt tabule directionum*". Rękopis Wirdunga, powstały podczas studiów zawiera, oprócz tablic m.in. Bianchiniego także kopie traktatów Jana z Głogowa i Wojciecha z Brudzewa. Por. G. Rosińska, *Scientific Writings*, dz.cyt., nr 147, oraz s. 483, 486–7. Por. także E. Poulle: *Activité astronomique a Cracovie au XV*[e] *siècle*. „Actes du XI[e] Congres International d'histoire des sciences" t. 3 Wrocław, Varsovie, Cracovie 1968 s. 45–50; oraz Z. Włodek: *Polonica w średniowiecznych rękopisach bibliotek niemieckich*, Wrocław 1974, s. 84–91.

[55] Por. E. Rosen, dz.cyt. 364.

[56] Edycja tej noty i analiza matematyczna N. M. Swerdlow: *The Derivation and First Draft of Copernicus's Planetary Theory. A Translation of the Commentariolus with Commentary*. „Proc. of American Philosophical Society" t. 117 (1973) s. 505–506.

[57] Facsimile noty: *Dzieła Wszystkie*, t. 4, tabl. XXXIV, s. 83.

[58] Tablica Kopernika została napisana na papierze ze znakiem wodnym oznaczonym literą „D". Według J. Zatheya, zob. *Dzieła Wszystkie*, t. 1, s. 5, papier ów pochodził prawdopodobnie ze środkowej Francji (Tulle) i dotarł do Polski poprzez Holandię. „Można więc przyjąć – wnioskuje J. Zathey – że papier dostał się do rąk Kopernika i używany był między 1523 a 1533 r. (i to na pewno jeszcze po 1529 r.)".

[59] Przedmowa Retyka (w której tenże akcentuje oryginalność i samodzielność Kopernika jako matematyka) została po raz pierwszy przedrukowana w XIX wieku przez Jana Baranowskiego wraz z przekładem polskim [Kopernik, *O obrotach* (1854), s. 545–547]. Przekład ten przejął następnie Ignacy Polkowski w *Kopernikjanach*, 1873, s. 145–147. Tekst łaciński przedmowy opublikował F. Hipler w *Spiscilegium*, 1873, s. 104–105 oraz Leopold Prowe w *Copernicus*, t. 2 (1884), s. 378–381. O epigramie Dantyszka do „ksiąg" Kopernika wspomina sam Kopernik w liście do Dantyszka z 27. czerwca 1542, nie podając jego treści. (Zob. *Listy*, poz. 16). Niektórzy spośród badaczy, jak E. Rosen: *Complete Works*, t. 3, s. 350–351, starają się

udowodnić, że to właśnie wspomniany przez Kopernika epigram został opublikowany w *De lateribus...* Tymczasem J. Drewnowski, wydawca polskiej wersji *Listów*, jest odmiennego zdania (zob. komentarz do listu 16). Sam tekst *De lateribus* ukazał się w kolejnych wydaniach *De revolutionibus* jako rozdziały 12–14 Księgi pierwszej. M. C. Zeller: *The Development of Trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*, Ann Arbor 1946, s. 44–46 dokonała porównania tekstów trygonometrycznych w *De revolutionibus* i w *De lateribus*, wykazując ich zasadniczą tożsamość. Drobne różnice dotyczą oznaczeń literowych niektórych rysunków geometrycznych a także niewielu dodanych zdań w *De revolutionibus*, nie zmieniających istotnie wykładu trygonometrii opublikowanego wcześniej w *De lateribus et angulis triangulorum*.

[60] E. Rosen: *Rheticus Georg Joachim, Dictionnary...* Vol. XI, s. 395–398.

[61] G. Rosińska, *Nie przypisujmy Rhetykowi...* dz.cyt., s. 616–617.

[62] Tablica Regiomontana, wydana dość starannie, zawiera jednak błędy. Według zapisu stosowanego w dziesiętnych tablicach trygonometrycznych w XV i XVI wieku (podających wartości liczbowe w postaci liczb całkowitych a nie jako pozycyjne ułamki dziesiętne) poprawna wartość sin 1° wynosi 174524. Taka też wartość występuje w rękopiśmiennej tablicy zachowanej w rkp. BJ 606, k. 171v. Natomiast do omawianej edycji tej tablicy z 1541 roku zakradł się błąd drukarski. Wprawdzie w rubryce wartości sin 1° jest podane poprawnie 174524, ale w rubryce równoważnej, podającej wartość 0° 60' wydrukowano 174529. Ta sama błędna wartość znalazła się następnie w tablicy znajdującej się w aneksie *De lateribus...* Analogicznie sin 86° 4' zarówno w Tablicy Regiomontana, edycja 1541, jak w tablicy towarzyszącej traktatowi trygonometrycznemu Kopernika podany jest błędnie jako 9976449 zamiast 9976446. Znów, tak jak wyżej, jest to kwestia błędu drukarskiego powstałego przy składaniu Tablicy Regiomontana i powtórzonego następnie w Tablicy z *De lateribus...* Ten sam błąd powtórzono również w drugiej edycji Tablic Regiomontana z roku 1561 (w cytowanym wyżej kodeksie krakowskim także te dane są poprawne). Por. G. Rosińska, tamże, s. 617.

[63] *De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum, libellus eruditissimus et utilissimus, cum ad plerasque Ptolemaei demonstrationes intelligendas, tum uero ad alia multa, scriptus a Clarissimo et doctissimo D. Nicolao Copernico Toronensi. Additus est Canon semissium subtensarum rectarum linearum in Circulo.* Excusum Vittembergae per Iohannem Lufft Anno M.D.XLII. Propozycja I podaje co następuje: *Datis autem circumferentiis dantur etiam latera trianguli inscripti tanquam subtensae, per expositum Canonem, in partibus, quibus dimetiens assumpta est 2 000 000.* Podobne odesłania do podziału średnicy, i konsekwentnie promienia, w propozycjach II–V.

[64] Nie zajmujemy się kwestią motywów, dla których dokonano wymiany tablic. Można tylko dodać, w formie przypuszczenia, że inicjatorem tego przedsięwzięcia mógł być chociażby J. Lufft, właściciel oficyny wydawniczej: starano się uniknąć wydrukowania tablicy „przestarzałej" w stosunku do opublikowanej kilka miesięcy wcześniej Tablicy Regiomontana. (Pozostaje jednak nadal otwarta kwestia powodów, dla których Kopernik znając, jak przypuszczamy, tablicę Regiomontana wyliczoną przy promieniu $R=10^7$, która na przełomie XV i XVI wieku, kilka dziesięcioleci przed publikacją, była używana w Krakowie, skonstruował i dołączył do *De lateribus...* tablicę o rząd niższą?).

[65] G. Rosińska, *The „fifteenth-century roots" of modern mathematics. The unit segment. Its function in Bianchini's De arithmetica, Bombelli's L'Algebra... and Descartes La Géométrie.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" R 41, zesz. 3–4. 1996, s. 53–70.

Grażyna Rosinska

THE BREAKTHROUGH IN TRIGONOMETRY IN THE MIDDLE OF THE 15TH CENTURY COPERNICUS AS SUCCESSOR AND CONTINUATOR OF THAT BREAKTHROUGH

The article points out the transformations in trigonometry (tables of trigonometric functions) initiated around the middle of the 15th century. Up until then, trigonometry, described in Latin culture as a „science of lines in a circle" that was subordinate to astronomy, had been known in the form transmitted in the first book of Ptolemy's *Almagest* (ca. 150 AD). Insignificant improvements made in the 14th century at Oxford and Paris under the influence of Islamic mathematics and mathematical astronomy mainly concerned recalculating Ptolemy's table of chords into a table of sines and attempts to replace the Menelaus theorem of the ratios of six quantities, the use of which made astronomical calculations extremely difficult, by a theorem of the ratio of four quantities, derived from Geber (Jabir ibn Afflah).

In the section of the paper dealing with 15th-century trigonometry, the achievements of Bianchini and of Regiomontanus are considered in relation to the Renaissance mathematics: these were marked by the evolution of the computational techniques, on the one hand, and by the extension of the concept of number, on the other. As a consequence of this evolution, the first tables of the decimal trigonometric functions were calculated about 1440 by Bianchini, the author of the exposition on the arithmetic of the decimal positional fractions (more than one hundred years before Simon Stevin's *De Thiende*).

Copernicus continued the work of the earlier 15th-century mathematicians: he calculated tables of the decimal trigonometric functions, and was interested in functions other then the sine (in fact, he is the author of the decimal table of secants). He began modestly, by copying down a simple sexagesimal table of sines, embedded in the tradition of John of Lineriis's sine table based on Ptolemy's table of chords. Copernicus's own table of sines, included in the *De revolutionibus*, which follows the pattern of Bianchini's trigonometric tables (the decimal radius and steps of 10′), is discussed in relation to Regiomontanus's tables of sines, known in Cracow by the end of the 15th century, included the table calculated on the $R=10^7$ and one minute intervals. As for Copernicus's table of secants, calculated in the 16th century and not used explicitly in his works, it was not influenced by Bianchini's table of cosecants, calculated about the mid of the 15th century, and known in Cracow a little later.

The paper concludes with a hypothesis concerning the existence of a table of sines-cosines that was o r i g i n a l l y appended to Copernicus's *De lateribus* (1542), and

subsequently substituted by the Table of Regiomontanus, calculated on the $R=10^7$. In fact, Copernicus refers himself in the *De lateribus* to a table of sines calculated on the $R=10^6$ (and not on the $R=10^7$), it could therefore be assumed that s u c h a table would be found in the appendix. Apparently, the remnants of a such table can be found in the table appended eventually to the De lateribus (for instance, the value of the sin 90° equal to 10^6 instead of 10^7).