Maślanka, Krzysztof

Pietro Mengoli i szeregi liczbowe : prehistoria funkcji ζ Riemanna

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 49/1, 47-64

2004

Krzysztof Maślanka
Obserwatorium Astronomiczne
Uniwersytetu Jagiellońskiego

PIETRO MENGOLI I SZEREGI LICZBOWE PREHISTORIA FUNKCJI ζ RIEMANNA

Surową i jednoznacznie negatywną ocenę tych wszystkich, którym przyszło pisać o dziejach nauki, w szczególności matematyki, zawarł we wstępie do swej niewielkiej książeczki *Apologia matematyka* wybitny matematyk angielski Godfrey Harold Hardy (1877–1947). Pisał on:

> „Znalezienie się w sytuacji piszącego o matematyce to smutne przeżycie dla zawodowego matematyka. Zadaniem matematyka jest przecież robienie czegoś [konkretnego], dowodzenie słuszności nowych twierdzeń, wzbogacanie matematyki, nie zaś gadanie o tym, co zdziałał on sam lub inni matematycy. Mężowie stanu gardzą politykami, malarze – krytykami sztuki, a fizjolodzy, fizycy i matematycy podzielają zazwyczaj to uczucie; nie ma szyderstwa większego i, na ogół, bardziej usprawiedliwionego, niż drwienie z ludzi, którzy stają się objaśniaczami. Komentowanie, krytyka i wystawianie ocen to praca dla drugorzędnych umysłów"[1].

Powstała u schyłku życia *Apologia* pełna jest wielu trafnych, co ważniejsze – oryginalnych spostrzeżeń; niemniej, jak w wielu skrajnych wypowiedziach, tak i w powyższej, prócz pewnej dozy słuszności, jest też coś, co budzi zdecydowany sprzeciw.

Niewątpliwie każdy wielki, nieoczekiwany postęp w naukach przyrodniczych wymaga jakościowego skoku, przebłysku intuicji lub wręcz geniuszu, który pozwala pokonać przepaść. Są takie osiągnięcia, których nie sposób z góry zaplanować, tym bardziej – metodycznie rozłożyć na szereg drobnych kroków, z których każdy byłby względnie łatwo wykonalny, a wszystkie razem złożyłyby

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 49: 2004 nr 1 s. 47–64

się na ów jakościowo nowy skok, który tworzy autentyczny naukowy postęp. Z pewnością nie są to sytuacje, w których przysłowiowa ilość przejdzie ostatecznie w jakość.

Nie oznacza to jednak, by „objaśnienie" miało być jedynie bezwartościową mierzwą, na której wyrastają kwiaty naukowych odkryć. Jest bowiem rzeczą oczywistą, że staranna analiza subtelnych, ukrytych mechanizmów, które na danym etapie rozwoju nauki doprowadziły do tego, że pewne zagadnienia dojrzały do postawienia, inne do rozwiązania, jeszcze inne zaś winny zaczekać na stosowny, dostateczny przyrost wiedzy – może być pracą wartościową oraz inspirującą, i to nawet dla przyszłych odkrywców.

Myśl przewodnia tego artykułu jest więc następująca: prócz pewnych, nigdy dotychczas w polskiej literaturze naukowej nie podejmowanych faktów dotyczących godnej uwagi postaci Pietra Mengolego, zamierzam przedstawić, na przykładzie jego osiągnięć, pewne ogólne prawidłowości historyczne związane z rozwojem matematyki. Otóż w czasach, w których przyszło mu żyć, był on w stanie, jako pierwszy, postawić i skutecznie rozwiązać pewne problemy (zbieżność szeregu geometrycznego, rozbieżność szeregu harmonicznego). Pewne inne mógł jedynie sformułować, lecz rozwiązanie pozostawił potomnym, jak to sam określił: „bogatszym talentom" (suma odwrotności kwadratów). Jeszcze innych, z dzisiejszego punktu widzenia dość łatwych i naturalnych, nie był w stanie – ze względu na poziom matematyki w tych czasach – nawet poprawnie rozeznać (szybkość rozbieżności szeregu harmonicznego).

Teoria funkcji zwanej dziś ζ (*dzeta*) Riemanna i rozmaitych jej uogólnień (ζ Hurwitza, ζ Epsteina, ζ Hawkinga oraz tzw. L-funkcji) „stanowi jedno z najpiękniejszych osiągnięć matematyki"[2]. Skąd tak entuzjastyczna, a przy tym jawnie nieprecyzyjna opinia u raczej mało skłonnych egzaltacji matematyków? Mówiąc w największym skrócie: funkcja ta zawiera w sobie, w postaci nader zaszyfrowanej, informację o rozmieszczeniu liczb pierwszych. Zbadanie rozmieszczenia tych liczb wśród wszystkich liczb całkowitych to, zgodnie z powszechnym wśród matematyków poglądem, zagadnienie, po pierwsze: naturalne i bardzo łatwe do postawienia, po drugie: niezwykle ważne i brzemienne w skutki dla teorii liczb, po trzecie zaś – skrajnie trudne. Dobrze zdawał sobie z tego sprawę „książę matematyków" Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), gdy w swym fundamentalnym dziele *Disquisitiones arithmeticae* (*Rozważania o arytmetyce*) pisał:

> „Rozdzielenie liczb pierwszych od liczb złożonych oraz rozkład tych ostatnich na czynniki pierwsze to jedno z najważniejszych, a jednocześnie najbardziej użytecznych zagadnień w arytmetyce. Zarówno starożytni, jak i nowocześni geometrzy włożyli w to tyle ciężkiej pracy oraz dociekliwości, iż pełne omawianie tego byłoby całkiem zbędne [...] Co więcej, godność samej nauki wymaga, by poczynić wszelki możliwy wysiłek w celu rozwiązania problemu tak estetycznego i tak sławnego."[3]

Problem, o którym pisze Gauss, czyli odpowiedź na pytanie czy dana liczba jest pierwsza, czy nie, choć ideowo prosty, w praktyce, dla bardzo dużych liczb, może być niezwykle żmudny i czasochłonny. Zagadnienie to jest wciąż intesywnie badane. Starożytny algortm (tzw. *sito Eratostenesa*) metodycznego „przesiewania" kolejnych liczb naturalnych ma ograniczone znaczenie. Od tej pory opracowano wiele szybszych algorytmów. Najnowsze osiągnięcie w tej dziedzinie pochodzi z sierpnia 2002 r. i należy do trójki matematyków hinduskich[4].

Nieoczekiwany związek funkcji zwanej później funkcją ζ z liczbami pierwszymi[5] znalazł w roku 1737 Leonhard Euler (1707–1783), natomiast największego kroku dokonał Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) (stąd późniejsza nazwa tej funkcji)[6]. Większość słyszała o sławnej hipotezie postawionej w 1859 r. przez Riemanna, której udowodnienie stanowi od półtora wieku jedno z największych wyzwań intelektualnych[7]. Spora część społeczności matematyków i fizyków matematycznych wie o znaczeniu tej funkcji, np. w termodynamice czy w kwantowej teorii pola. Ale tylko nieliczni słyszeli o tym, że w latach 70. ubiegłego wieku odkryto przypadkowo absolutnie zaskakujący związek funkcji ζ z mechaniką kwantową bardzo złożonych układów, np. ciężkich, wzbudzonych jąder atomowych[8]. Jakby i tego było mało, w latach 80. z kolei doszedł kolejny nieoczekiwany wątek: chaos kwantowy. W ten sposób nastąpiło spotkanie „czystej" matematyki z „żywą" fizyką doświadczalną. Najodważniejsi z badaczy czują intuicyjnie, że związek ten może stanowić przełom na drodze do upragnionej teorii ostatecznej, która zunifikowałaby rozmaite, pozornie odległe działy fizyki[9]. Z całą pewnością jest w tym jakaś głęboka, lecz wciąż niedostatecznie zrozumiała wskazówka (problemowi temu poświęcimy jeden z kolejnych artykułów).

Bardzo niewielu zawodowych matematyków wie[10], że po raz pierwszy funkcja ζ pojawiła się w ważnym dziele włoskiego matematyka, księdza Pietra Mengolego, wydanym w Bolonii w 1650 r. pt. *Novæ quadraturæ arithmeticæ seu de additione fractionum* (*Nowe kwadratury arytmetyczne czyli o dodawaniu ułamków*). Jak można się domyślać, funkcja ta pojawiła się przypadkowo, w postaci skrajnie szczególnej, przy użyciu terminologii odmiennej od obecnie używanej i w kontekście dalekim od dzisiejszego. Sama książka wywarła spory wpływ na niektórych współczesnych Mengolemu uczonych (znali ją np. John Collins (1624–1683), John Wallis (1616–1703), Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)) i zajęła należne jej miejsce w historii rozwoju idei matematycznych. Nosi ona niewątpliwe piętno klasycznych *Elementów* Euklidesa: zawiera starannie wyróżnione aksjomaty, definicje i twierdzenia. Historycy matematyki, np. Adolf Pawłowicz Juszkiewicz (1906–1993), uważają, że wpływ tego dzieła byłby jeszcze większy gdyby nie jego język: zawiły i niejasny – nawet jak na ówczesne kryteria stylistyczne.

Niewątpliwie Mengoli nie należał do matematycznych gwiazd pierwszej wielkości: Eulera, Legendre'a, Gaussa, Riemanna i innych; ich czas jeszcze wtedy nie nadszedł. Jest też faktem, że znany i bardzo ceniony za życia (u współczesnych zyskał nawet przydomek *Petrus Italus*), wkrótce po swej śmierci został niemal zupełnie zapomniany. Niemniej, jak pisał przed niemal wiekiem włoski matematyk i historyk matematyki Giovanni Vacca (1872–1953):

„Są pewne twierdzenia zasługujące na to, by nosić imię swego pierwszego odkrywcy, Pietra Mengolego; mam nadzieję, że ten krótki tekst przekona bezstronnych i uczciwych badaczy, by oddać należny hołd matematykowi włoskiemu, który, nawet jeśli nie był wśród pierwszych, czegoś jednak dokonał [kursywa w oryginale: *se non fu tra i primi, pur fece qualche cosa*]"[11].

Przyczyną tego, że Vacca tak wyraźnie upomina się o naukową uczciwość historyków nauki były pewne kontrowersyjne opinie współczesnego mu, skądinąd bardzo wybitnego badacza niemieckiego G. Eneströma. Ten bowiem, pod pretekstem, że w książce Mengolego brakuje wyraźnej konkluzji (*Schlussfolgerung*), twierdził, że faktyczne pierwszeństwo w udowodnieniu rozbieżności szeregu harmonicznego przysługuje (1689) Jacobowi Bernoulliemu (1654–1705). Jest to ewidentna nieprawda, gdyż, jak zobaczymy, lektura stosownych fragmentów Mengolego nie pozostawia tu cienia wątpliwości, że wyprzedził on Bernoulliego o niemal 40 lat.

O postaci Mengolego wiadomo stosunkowo niewiele. Nie zachował się nawet jego portret. Główna tego przyczyna jest bardzo prozaiczna: jego życie, w przeciwieństwie do wielu znanych mu współczesnych postaci, nie obfitowało w żadne burzliwe wydarzenia, czy przygody. Nawet rok jego urodzenia pozostaje niepewny: 1625 lub 1626; można go wydedukować jedynie pośrednio z krótkich not biograficznych, które dotrwały do naszych dni. Jedną z nich zawarł Giovanni Fantuzzi w swym dziele *Notizie degli scrittori bolognesi* (*Wiadomości o pisarzach bolońskich*). Pisze on m. in.:

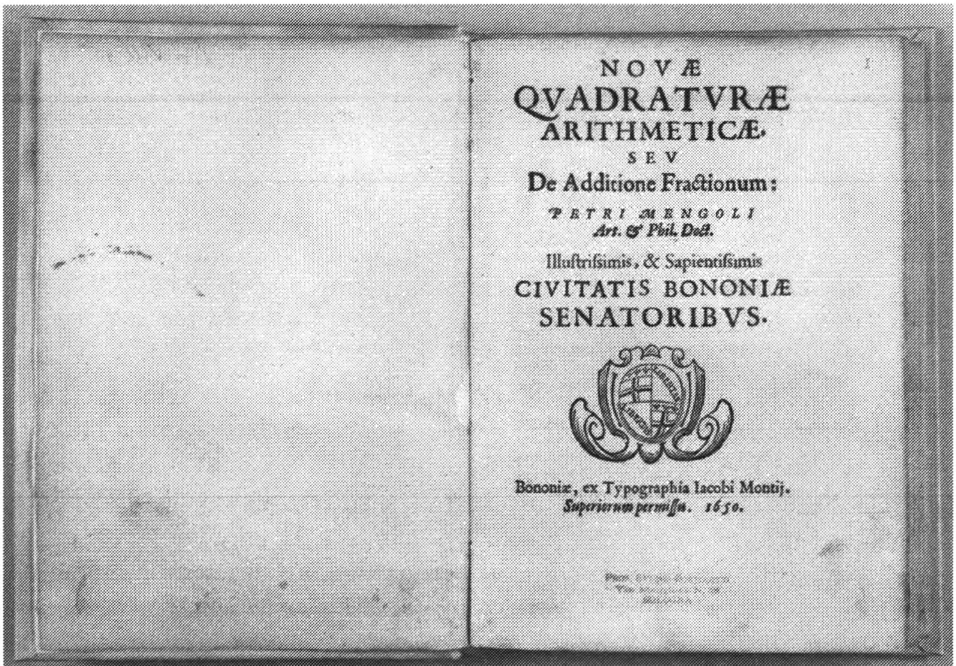
„Rodzicami jego byli Simone Mengoli i Lucia Ucelli, uczciwi i uprzejmi [*onesti e civili*] obywatele bolońscy. Pietro od młodości przykładał się do filozofii, z powodzeniem zaliczył kurs tejże, a w 1650 r. uzyskał dyplom uniwersytecki. Potem rozpoczął studia prawnicze, zaś 7 czerwca 1653 r. uzyskał kolejny dyplom na dwu kierunkach: prawa cywilnego i kanonicznego. Już jako duchowny oddał się całkowicie studiom matematycznym pod kierunkiem ojca Bonaventury Cavalierego[12]. Po jego śmierci, i przejęciu po nim katedry matematyki na Uniwersytecie w Bolonii, Mengoli prowadził intensywną i bardzo owocną korespondencję na temat geometrii ze swym przyjacielem Giovannim Antonio Rocca da Reggio. Dogłębne zainteresowania algebrą i geometrią stały się dlań polem zastosowań w dziedzinie kolejnej pasji: muzyki, którą dość profesjonalnie zajmował się od młodości.

19 kwietnia 1660 r. mianowano go proboszczem i przeorem [parocco e priore] kościoła św. Marii Magdaleny[13] w Bolonii.

Zmarł 7 (wg innych źródeł – 16) czerwca 1686 r., w wieku lat 60. Pochowano go bardzo uroczyście w jego kościele parafialnym[14]."

Nazwisko Pietra Mengolego pojawia się w przechowywanych w Uniwersytecie bolońskim dokumentach z lat 1648–1686: początkowo jako studenta tej uczelni, później jako jej cenionego wykładowcy i aktywnego uczonego. Mengoli ma w swym dorobku co najmniej osiem książek: sześć z nich dotyczy matematyki, jedna – obserwacji astronomicznych refrakcji i paralaksy Słońca, jedna – teorii muzyki (zob. Appendix). Ta ostatnia nie jest jedynie przypadkową odskocznią w dorobku zmęczonego matematyką i codziennymi obowiązkami księdza; do dzisiaj jest ona ceniona przez historyków muzyki.

Głównym niewątpliwie dziełem jego życia jest wspomniana już wyżej, licząca 130 stron książka *Nova quadraturœ arithmeticœ seu de additione fractionum* dedykowana „Najznakomitszym i najuczeńszym Senatorom, obywatelom Bolonii", wydrukowana w roku 1650 w bolońskiej drukarni Jakuba Montij[15]. Prawdopodobnie nie miała ona przekładów na języki zachodnie; nie istnieją też, nawet fragmenty, tłumaczone na polski.



Dzieło poprzedza wstęp, którego wyjątki warto przytoczyć nie tyle ze względu na treść matematyczną, co na swoisty styl. Mengoli, „sługa uniżony", prócz obowiązkowych hołdów dla wpływowych senatorów bolońskich, czuje potrzebę usprawiedliwienia się przed nimi z faktu zajmowania się tak osobliwym tematem, jak liczby i to w nieskończonej ilości:

„Najznakomitsi Ojcowie, [Senatorowie] odczuwam obawę, żeby masą liczb nie wywołać dysonansu w waszych uszach przyzwyczajonych w najwyższym stopniu do harmonii: ale czyż z uwagi na liczne zasługi [was, Senatorów] godzi się rezygnować z serii niezliczonych liczb [*innumeram numerorum*]. Piasek wydm morskich, liczba gwiazd, ogromne ilości śniegu – zasługiwałyby na odrzucenie [lekceważenie], gdybym wątpił w waszą nieskończoną łaskawość [szlachetność]. Na czole nigdy nie ujawnia się lepiej wysiłek, a pióro nigdy bardziej niespokojnie nie unosi się na fali atramentu, jak wówczas, gdy jest uświęcone waszym imieniem i nakazem. Takie oto będą moje czyste [skromne] ułamki [*fractiones*], bowiem najmniejsze wielkości ujawniają właśnie nikłość pracy. Tak więc, istotnie zebrane [tu] zostały pojedyncze przypadki [liczb] nieskończonych – dzięki waszej łaskawości i mojej [wobec was] uległości, a liczyć się będą dowody."

Pomijając typową dla autora kwiecistość stylu (która, jak wspomniałem, nie zachęcała potencjalnych czytelników do lektury), z dzisiejszego punktu widzenia wszystkie te usprawiedliwienia robią wrażenie nadmiarowych. Należy jednak pamiętać, że w przypadku sumowania szeregów liczbowych *explicite* pojawia się nieuchronnie, niełatwe psychologicznie, pojęcie nieskończoności. Trudności ze zrozumieniem faktu, iż suma nieskończonej ilości przyczynków może jednak dać wartość skończoną znane były już w starożytności. Trudności te najpełniej udało się spopularyzować Zenonowi z Elei, który żył w V w. przed Chrystusem. Był on ulubionym uczniem Parmenidesa, głowy szkoły eleatów, który pierwszy zaczął budować filozofię na podstawie rozumowań logicznych. Jak pisze Juszkiewicz, Zenon

„nadał swym rozumowaniom ostrą i barwną postać paradoksów, które już od 25 wieków z górą nie przestają przyciągać uwagi matematyków i filozofów. Każda epoka przyniosła swoje rozwiązanie tych paradoksów, czyli *aporii* (*ἀπορία* – trudność), zainteresowanie nimi nie osłabło do naszych dni, sądząc choćby po liczbie artykułów poświęconych temu tematowi. Jedno tylko angielskie czasopismo *Analysis* od r. 1951 do r. 1953 ogłosiło co najmniej siedem artykułów o aporiach Zenona"[16].

Po wspomnianym wstępie do dzieła Mengolego następuje obszerna, kilkustronicowa *Przedmowa* (*Præfatio*), zawierająca zwięzłe streszczenie omawianych dalej szczegółowo wyników. Mówiąc językiem dzisiejszych prac naukowych jest to swoisty „abstrakt". Tam też znajdują się dwa najważniejsze, z punktu widzenia tematu tego artykułu, przykłady. Pierwszy dotyczy tzw. szeregu harmonicznego, którego badanie zostało uwieńczone powodzeniem: Mengoli dowiódł, że jest on rozbieżny do nieskończoności. Używając języka nowoczesnej teorii funkcji analitycznych, można powiedzieć, że rozbieżność ta odpowiada jedynemu biegunowi funkcji ζ na płaszczyźnie zespolonej.

W przypadku drugiego szeregu spotkała Mengolego porażka. Staranna analiza przyczyn tej porażki, w szerokim historycznym kontekście rozwoju idei matematycznych, jest m. in. celem tego artykułu. Mengoli nie podejrzewał nawet – i przy ówczesnym poziomie wiedzy nie miał cienia powodu, by podejrzewać – że rozważając ten szereg dotknął przypadkiem przysłowiowego wierzchołka góry lodowej. Jak wspomniałem powyżej, trzeba było dwu stuleci rozwoju matematyki, by, poprzez długi ciąg wyrafinowanych rozumowań, doprowadzić do właściwego sformułowania i częściowego rozwiązania skrajnie trudnego problemu, jakim jest rozmieszczenie liczb pierwszych.

Pierwszy ze wspomnianych szeregów[17], przy użyciu dzisiejszej notacji, zapisuje się jako:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

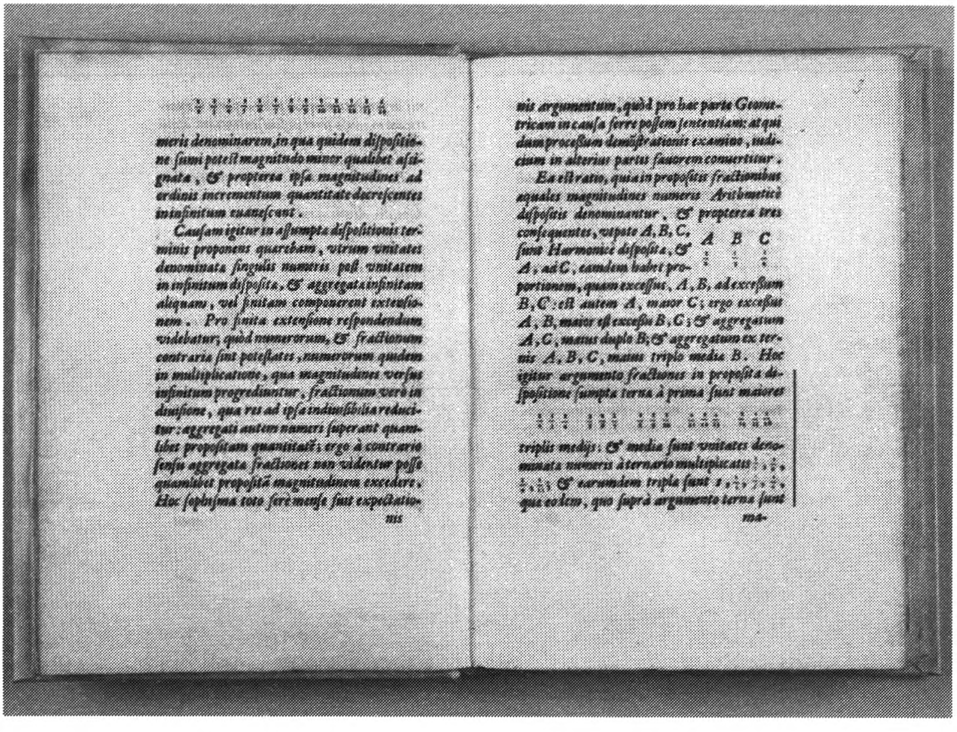
Mengoli najpierw grupuje kolejne wyrazy tego szeregu, bez początkowej jedynki, po trzy i zauważa, że

„fractiones in proposita dispositione sumptae ternae a prima sunt maiores

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}\quad\frac{1}{5}\frac{1}{6}\frac{1}{7}\quad\frac{1}{8}\frac{1}{9}\frac{1}{10}\quad\frac{1}{11}\frac{1}{12}\frac{1}{13}\quad\frac{1}{14}\frac{1}{15}\frac{1}{16}$$

triplis medijs: & mediae sunt unitates denominatae numeris a ternario multiplicatis 1/3, 1/6, 1/9, 1/12; & earundem triplae sunt 1, 1/2, 1/3, 1/4, quae eodem, quo supra argumento ternae sunt maiores tripli medijs."

Oto stosowny fragment z dzieła Mengolego (u dołu z prawej strony):



Innymi słowy: grupując wyrazy szeregu harmonicznego po trzy otrzymuje się zawsze pewną liczbę większą od jedynki plus ponownie tenże szereg harmoniczny. Powtarzając tę procedurę dostateczną ilość razy można otrzymać dowolnie dużą liczbę. Stąd już wynika rozbieżność szeregu harmonicznego. W języku dzisiejszych podręczników analizy można by powiedzieć, że Mengoli natknął się na przykład szeregu, który spełnia co prawda konieczny warunek zbieżności (kolejne wyrazy maleją do zera), ale nie spełnia warunku dostatecznego (zbieżność ta nie jest odpowiednio szybka). Opisują to precyzyjne kryteria zbieżności, których Mengoli oczywiście nie znał; sformułowano je ponad sto lat później.

W tym momencie rozwiązanie problemu było więc dla niego zakończone. Z pewnością nie odważyłby się on wówczas zadać pytania bardziej szczegółowego (i psychologicznie jeszcze trudniejszego, niż wspomniane paradoksy Zenona): *jak szybko* szereg ten jest rozbieżny do nieskończoności? Kilkadziesiąt lat później dokonał tego Leonhard Euler przy okazji odkrycia praktycznego wzoru na sumę szeregów asymptotycznych; niezależnie wzór ten znalazł też Colin Maclaurin (1698–1746). Odpowiedź na to pytanie zawarł Euler w swych *Uwagach o szeregach harmonicznych* (*De progressionibus harmonicis observationes, Commentarii* (1734–1735) 1740); brzmi ona: szereg harmoniczny jest rozbieżny tak jak logarytm. We dzisiejszej notacji zapisujemy to jako:

gdzie γ jest stałą zwaną *stałą Eulera* (niekiedy: Eulera-Mascheroniego) równą 0,5772156649... Pojawia się ona m. in. w wielu wzorach w teorii funkcji specjalnych. Wśród kilkuset (co najmniej) stałych matematycznych[18] ustępuje popularnością jedynie liczbom ? oraz e (nie licząc takich trywialnych stałych, jak: zero, jedynka oraz jednostka urojona i). Sam Euler obliczył wkrótce jej wartość z dokładnością najpierw do sześciu, potem do szesnastu cyfr znaczących (oczywiście, nie za pomocą powyższej definicji, która, ze względu na skrajnie wolną zbieżność, jest nieprzydatna do takich obliczeń). Do dziś nie wiadomo, czy ? jest liczbą wymierną czy nie[19]. Z punktu widzenia nowoczesnej teorii funkcji specjalnych stała Eulera jest pierwszą z całej rodziny tzw. stałych Stietjesa γ_n.

Co ciekawe, Mengoli doskonale znał pojęcie logarytmu naturalnego[20] – jako pierwszy (przed lordem Wiliamem Brounckerem (1620–1684), któremu czasem, niesłusznie, przypisuje się ten rezultat[21]) podał rozwinięcie dla ln 2:

$$\ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$$

Nie mógł jednak przypuszczać, że logarytm wiąże się tak ściśle z badanym przezeń szeregiem harmonicznym.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$$

W dalszym ciągu swego dzieła Mengoli dowodzi na trzy sposoby zbieżności do jedynki szeregu zbudowanego z odwrotności tzw. liczb trójkątnych: 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36,...

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 1$$

Na koniec przechodzi do najbardziej interesującego przypadku. W oryginale łacińskim stosowny fragment brzmi:

> „Ab huius fractionum dispositionis contemplatione faciliter expeditus, ad aliam progrediebar dispositionem, in qua singula unitates numeris quadratis denominantur. Haec speculatio fructus quidem laboris rependit, nondum tamen effecta est solvendo, sed ingenij ditioris postulat adminiculum, ut praecisiam dispositionis, quam mihimetipsi proposui, summam valeat reportare."

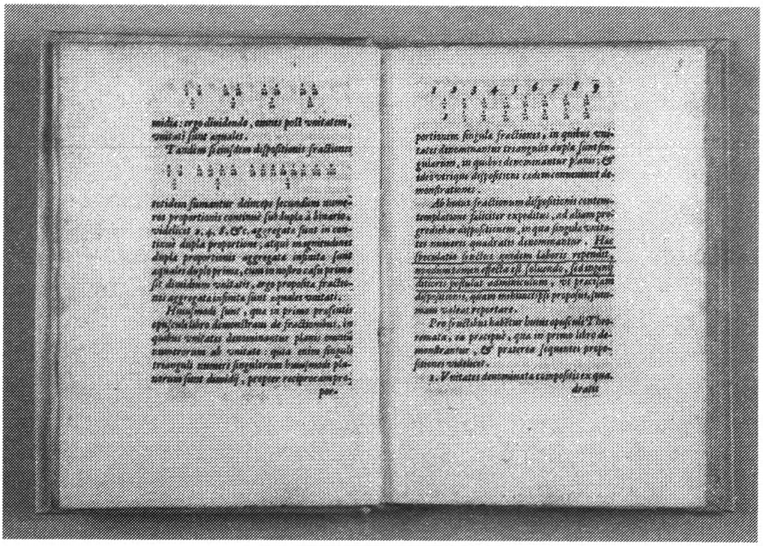
W tłumaczeniu natomiast:

> „Ukończywszy z łatwością badanie tego szeregu, przystąpiłem do innego, w którym jedynka jest dzielona przez kwadraty liczb. Badanie to dało pewne owoce, jednak nie doprowadziło do rozwiązania, wymaga bowiem udziału bogatszego talentu [niż mój], by dojść do znalezienia dokładnej wartości szeregu, o którym wspominam."

Chodzi tu oczywiście o szereg, który w dzisiejszej notacji zapisuje się jako:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

i który obecnie oznacza się po prostu $\zeta(2)$. Oto cytowany powyżej fragment z *Novæ quadratura...* (środkowy akapit prawej strony, podkreślony):



W kolejnych rozdziałach Mengoli nie wspomina już ani razu o tym szeregu – chociaż, za pomocą dostępnych mu skromnych metod, mógłby z łatwością dowieść przynajmniej jego *zbieżności*. Nie ujawnia też, jakie to „owoce dało badanie" owego szeregu. To bardzo charakterystyczna cecha jego podejścia: zadowala go jedynie *ścisła* wartość sumy szeregu (która, oczywiście, implikuje zbieżność). Wbrew temu, co w swej obszernej *Historii matematyki* pisze Juszkiewicz, Mengoli nie udowodnił zbieżności sumy odwrotności kwadratów[22]. W swym artykule wyraźnie pisze o tym Giusti:

> „W dalszym ciągu swej książki Mengoli nie wspomina już wcale o tym szeregu – po to chociaż, by dowieść jego zbieżności. Dowód taki nie byłby trudny za pomocą pojęć dostępnych w aksjomatycznej strukturze dzieła. Z drugiej strony, fakt, że określenie dokładnej wartości sumy badanego szeregu pozostawia on innym, świadczy o tym, że ową zbieżność uznał za coś pewnego [*sta a testimoniare che la sua convergenza era da considerarsi acquisita*]".[23]

W cytowanym powyżej fragmencie dzieła Mengolego uderza nas przede wszystkim, zwłaszcza w porównaniu ze stylem dzisiejszych prac naukowych, cecha, która w nauce dawno już zanikła zupełnie: autentyczna pokora, umiejętność jawnego przyznania się do porażki. Obecnie, w dobie walki o naukowy byt, gdy każdy usilnie stara się zareklamować swoje (mniej lub bardziej prawdziwe) osiągnięcia i skrzętnie ukryć porażki – takie naiwnie szczere wyznanie byłoby nie na miejscu.

Mimo woli też przypomina się w tym miejscu ironiczna uwaga Hardy'ego o „drugorzędnych umysłach", którą cytowałem na wstępie. Mengoli pokornie zalicza sam siebie to takich właśnie, niemniej jest to pokora prorocza: po upływie kilkudziesięciu lat (1734) zjawi się ów autentycznie „bogatszy talent" w osobie wielkiego Leonharda Eulera, najbardziej chyba płodnego matematyka wszystkich czasów. Ten dysponował już znacznie lepszym aparatem do badań szeregów. Najpierw udowodnił zbieżność szeregu odwrotności kwadratów. Potem, drogą żmudnych obliczeń numerycznych, oszacował jego wartość jako 1,64493... Na koniec, ku zaskoczeniu wszystkich pokazał, że $\zeta(2) = \pi^2/6$. Był to pierwszy z całej serii głębokich wyników, które zawierały sławną liczbę[24] π w stosownej potędze oraz nadzwyczaj ważne tzw. liczby Bernoulliego[25].

Niejako „na obronę" Mengolego trzeba tu zaznaczyć, że wspomnianą nieskończoną sumę odwrotności kwadratów próbował też później obliczyć matematyk o niewątpliwie „lepszym umyśle", bardziej w każdym razie znany i o znacznie większym dorobku: Jacob Bernoulli (1654–1705). Nie znał on rezultatów Mengolego. W swym dziele *Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita* (*Twierdzenia arytmetyczne o szeregach nieskończonych i ich skończona suma*), wydawanym w Bazylei w latach 1689–1704, potwierdził jedynie wynik Mengolego: podał dwa nowe dowody rozbieżności szeregu harmonicznego – jeden własny, drugi pochodzący od jego brata Johanna (1667–1748), który fakt ten stwierdził jako pierwszy.

Ślad niewielkiego postępu w tej kwestii zawiera korespondencja z lat 1728–1729 pomiędzy Christianem Goldbachem (1690–1764) a kolejnym matematykiem ze sławnego rodu Bernoullich: Danielem (1700–1782), którzy oszacowali wartość tego szeregu z dokładnością nie przekraczającą 0,01. W 1730 r. James Stirling (1692–1770) polepszył ten wynik uzyskując osiem znaków dziesiętnych; zatem, w zasadzie, przy pewnej dozie szczęścia, mógłby po prostu odgadnąć prawidłowy wynik, zauważając że znaleziona przezeń wartość jest (niemal) tożsama z rozwinięciem $\pi^2/6=1{,}6449340668482264...$

Ze wspomnianym szeregiem zmagał się też współtwórca rachunku różniczkowego Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) oraz Abraham de Moivre (1667–1754), ale i oni nie mieli dobrego pomysłu.

Oto szkic jednego z dowodów Eulera z jego pracy przedstawionej Akademii Petersburskiej w grudniu 1735 r. *O sumach szeregów odwrotnych*[26]. Podaję go tu nie tyle dla kompletności rozumowania, lecz dla ilustracji bardzo owocnej i często przez Eulera stosowanej strategii, polegającej na przedstawianiu tego samego obiektu matematycznego na dwa odmienne sposoby i wyprowadzeniu wniosków wynikających z ich porównania. (Szersze refleksje na temat tej strategii i jej zastosowań zostaną zamieszczone w kolejnym artykule). Chciałbym jednocześnie pokazać, że faktyczną przyczyną porażki Mengolego był nie tyle jego „gorszy umysł", co brak niezbędnej wiedzy z analizy matematycznej, w szczególności na temat rozwinięcia Taylora dla funkcji sinus. (Fundamentalna dla analizy matematycznej i teorii funkcji analitycznych praca Brooka Taylora (1685–1731), *Methodus incrementorum directa et inversa* (*Metoda przyrostów prosta i odwrotna*) zawierająca istotne rozwinięcie metody fluksji Newtona, ukazała się w Londynie w 1715, r. a zatem ponad ćwierć wieku po śmierci Mengolego).

Funkcja sinus posiada (po podzieleniu przez x) ogólną reprezentację w postaci rozwinięcia zbieżnego na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej[27]:

$$\frac{\sin(x)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Z drugiej strony, ta sama funkcja posiada jakościowo inną reprezentację w postaci iloczynu nieskończonego:

$$\frac{\sin(x)}{x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

z której w szczególności widać w sposób jawny wszystkie jej miejsca zerowe: $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$,... (mówimy, że jest to pełna faktoryzacja pierwszego szeregu). W szczególności, porównując współczynniki przy x^2 w pierwszym i drugim wzorze dostaniemy:

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots$$

skąd już wynika, że

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

W taki sam sposób można też znaleźć zwarte wyrażenia dla wszystkich sum typu

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

dla k parzystych. Jak wspomniano powyżej, wyrażają się one przez liczby Bernoulliego. Natomiast natura tych sum dla k nieparzystych jest znacznie bardziej skomplikowana i do dzisiaj niejasna. Nie istnieją zwarte wyrażenia dla nich. Dopiero w r. 1979 Apéry udowodnił, że suma ta dla $k = 3$ (czyli $\zeta(3)$) jest liczbą niewymierną[28].

Jak trudny i powolny był postęp w osiąganiu kolejnych wyników dowodzą najnowsze osiągnięcia: Rivoal[29] oraz Ball i Rivoal[30] dowiedli, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych n takich, że $\zeta(2n+1)$ jest niewymierna; co więcej, przynajmniej jedna z dziewięciu liczb: $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, ..., $\zeta(21)$ jest niewymierna[31]. Wynik ten nieco uściślił niedawno Zudilin, który pokazał, że jedna (lecz nie wiadomo, która) z czterech liczb $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ jest niewymierna[32].

Nie ulega zatem wątpliwości, że Mengoli nie miał najmniejszych szans, by rozwiązać postawiony przez siebie problem obliczenia sumy odwrotności kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Rozwiązanie podał przyszły, niewątpliwie „bogatszy talent": bogatszy o świadomość osiągnięć Newtona, Leibniza i Taylora w dziedzinie analizy matematycznej. Należy jednak podkreślić, że nawet dzisiaj, po ponad trzystu pięćdziesięciu latach, uogólnienia postawionego przezeń problemu są wciąż intensywnie badane. Mimo znacznego postępu w rozwoju narzędzi postęp jest niewielki i powolny.

Jak już podkreśliłem na wstępie, czas pokazał, że problem szczególnych szeregów liczbowych był jedynie wstępem do prawdziwej kariery funkcji ζ w analitycznej teorii liczb. Pół wieku po śmierci Mengolego Leonhard Euler znalazł nieoczekiwany związek pomiędzy tą funkcją a liczbami pierwszymi (1737 r.). Później Adrien-Marie Legendre[33] (1752–1833) oraz Johann Carl Friedrich Gauss[34] (1777–1855), opierając się na własnych eksperymentach numerycznych, odgadli niezależnie przybliżone prawo opisujące rozmieszczenie liczb pierwszych. W roku 1853 w dalekim Petersburgu rosyjski matematyk Pafnucy Lwowicz Czebyszew (1821–1894) ogłosił swe ważne wyniki dotyczące tych liczb. Prawdziwym przełomem okazała się ośmiostronicowa zaledwie praca Bernharda Riemanna z 1859 r. na temat rozkładu liczb pierwszych – jedyna, z nielicznych jego prac, poświęcona tematowi teorii liczb. Jak wspomniałem wcześniej, zawarta w tej pracy hipoteza stanowi, według powszechnej opinii matematyków, najważniejszy z nierozwiązanych problemów matematycznych. Związane z tym ściśle zagadnienie rozmieszczenia liczb pierwszych wśród wszystkich liczb naturalnych stanowi również skrajnie trudne wyzwanie. Matematycy od czasów Eulera i Gassa nie mieli złudzeń co do skali olbrzymich trudności tego problemu. Poniższa opinia matematyka, a jednocześnie znakomitego eksperta w kwestii liczb pierwszych:

> „Upłyną miliony lat nim zdobędziemy jakieś zrozumienie, ale i nawet wtedy nie będzie ono pełne, bowiem w tym przypadku stoimy naprzeciw Nieskończoności."[35]

nie jest bynajmniej przesadzona. Raczej mało skłonni do egzaltacji matematycy w tym jednym przypadku pozwalają sobie nawet na takie np. wypowiedzi:

> „Patrząc na te liczby [pierwsze] doznajemy uczucia, iż stoimy wobec jednej z niepojętych tajemnic stworzenia."[36]

Dziejom poglądów na te fascynujące zagadnienia poświęcony zostanie osobny artykuł.

APPENDIX:
DZIEŁA WSZYSTKIE PIETRA MENGOLEGO (WG P. RICARDIEGO)

1. *Novæ quadraturæ arithmeticæ, seu de additione fractionum*. Bononiæ, 1650, pp. 130, in-8°.
2. *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam et Planimetriam ornata, Maiestati Serenissimæ D. Christinæ Reginæ Suecorum*. Bononiæ, 1655, pp. 64, in-8°.
3. *Geometriæ speciosæ elementa*. Bononiæ, 1659, pp. 80, in-8°.
4. *Circolo del Mengoli*. Bologna, 1672, pp. 60, in-8°.
5. *Anno di Pietro Mengoli*. Bologna, 1673, pp. 280, in-8°.
6. *Arithmeticæ rationalis elementa quatuor*. Bononiæ, 1674, pp. 64, in-8°.
7. *Refrazioni e parallasse solare*, Bologna, 1670.
8. *Speculazioni di musica*. Bologna, 1670, pp. 295, in-8°.

Przypisy

[1] G. H. H a r d y : *Apologia matematyka*. Tłum. M. Fedyszak. Warszawa 1997, s. 49.

[2] S. J. P a t t e r s o n : *An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta-Function*. New York, Cambridge University Press 1988, s. XI.

[3] C. F. G a u s s : *Disquisitiones arithmeticæ*. Lipsiæ (Lipsk) 1801. Liczące ponad 500 stron dużego formatu, napisane wykwintną klasyczną łaciną przez 24-letniego raptem

autora dzieło nie robi bynamniej wrażenia naukowego debiutu – raczej pisanej u schyłku życia, dojrzałej monografii. Jego wpływu na matematykę nie sposób przecenić. Jak pisze G. Simmons, młody Lejeune Dirichlet (1805–1859) w czasie podróży nie rozstawał się nigdy ze swym starym i bardzo już zniszczonym egzemplarzem *Disquisitiones*.

[4] M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena: *Primes in P*. Indian Institute of Technology preprint, Kanpur 2002. Pracę tę uważa się dość powszechnie za przełom w teorii liczb. Sam algorytm jest zaskakująco prosty, lecz jego dowód odwołuje się do zaawansowanych technik.

[5] L. Euler: *Variæ observationes circa series infinitas*. „Commentarii" 1737, 1744. W tej przedstawionej Akademii Petersburskiej pracy pojawił się po raz pierwszy, fundamentalny dla analitycznej teorii liczb, związek funkcji ζ z liczbami pierwszymi (iloczyn przebiega po wszystkich liczbach pierwszych p):

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad s > 1$$

[6] G. F. B. Riemann: *Über die Anzahl der Primzahlen unter eine gegebener Grösse (O liczbie liczb pierwszych mniejszych niż zadana wielkość)*. „Monatsber. Akad. Berlin", 1859, s. 671–680. Niezwykła ta praca pełna jest skrótów myślowych i zaskakujących konkluzji. Jako taka z pewnością nie zadowoliłaby wymagających recenzentów dzisiejszych czołowych periodyków matematycznych. Najwyraźniej Riemann *widział* swoje wyniki zanim próbował ich dowieść. Postawiona przezeń, a nie dowiedziona do dzisiaj hipoteza mówi, że punkty, w których funkcja ζ przyjmuje wartość zero (z wyjątkiem przypadków trywialnych) układają się *dokładnie* wzdłuż pewnej prostej. Ewentualna prawdziwość tej hipotezy byłaby kluczowa dla poznania rozmieszczenia liczb pierwszych, podstawowych „cegiełek", z których zbudowane są wszystkie liczby całkowite.

[7] W roku 1900, u progu nowego stulecia, David Hilbert (1862–1943) wygłosił na II Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Paryżu sławny wykład, w którym przestawił listę 23-ch ważnych i nierozwiązanych problemów matematycznych. Sam fakt ich istnienia był dla Hilberta dowodem żywotności matematyki, zaś przyszłość tej dziedziny widział bardzo optymistycznie.

W roku 2000, u progu nowego tysiąclecia, sto lat po pamiętnym wystąpieniu Hilberta, było wiadome, że część problemów z jego listy została rozwiązana, lecz otwierająca ją hipoteza Riemanna skutecznie opiera się wszelkim próbom. Z inicjatywy multimilionera amerykańskiego Landona Thomasa Claya, założyciela prywatnego instytutu matematycznego jego imienia (*Clay Mathematics Institute*, Massachusetts), przekonanie o ważności tego oraz sześciu innych starych, sławnych i wciąż nierozwiązanych problemów matematyki trafiło do świadomości względnie szerokich kręgów społecznych w związku z tzw. Millenium Prize Problems. Do motywacji czysto ambicjonalnych doszły więc jeszcze przyziemne motywacje finansowe w postaci miliona dolarów nagrody za rozwiązanie każdego problemu; niemniej, w dobie postępującego daltonizmu matematycznego wśród typowych podatników inicjatywa Claya wydaje się bardzo cenna.

[8] To zdarzenie bez precedensu w dziejach nauki: pięć minut nieplanowanej rozmowy pomiędzy fizykiem Freemanem Dysonem a matematykiem Hugh Montgomerym miało miejsce w Institute for Advanced Studies w Princeton, New Jersey, w roku 1972 i zaowocowało narodzinami nowej, fascynującej dziedziny badań. (Obydwaj uczeni nigdy więcej już się nie spotkali.) W formule na tzw. korelację par dla miejsc zerowych ζ Riemanna, otrzymaną przez Montgomery'ego, Dyson rozpoznał natychmiast związek wynikający z teorii tzw. macierzy losowych. opisujących skomplikowane jądra atomowe. Tożsamość bardzo specyficznych relacji, odnoszących się do tak skrajnie różnych bytów, nie powinna być dziełem przypadku; jest to z pewnością przejaw jakiejś fundamentalnej prawidłowości, ale jak dotąd nikt nie podał spójnej teorii, która tłumaczyłaby ten fakt. Por. B. Cipra: *Prime Formula Weds Number Theory and Quantum Physics.* „Science" 1996, vol. 274, s. 2014; K. Sabbagh: *Dr. Riemann's Zeros: The Search for the –1million Solution to the Greatest Problem in Mathematics*, Atlantic Books, 2002, s. 134–136.

[9] S. Weinberg: *Dreams of a Final Theory.* New York 1992 Pantheon Books s. 211.

[10] Jedynym znanym mi wyjątkiem jest wybitny amerykański matematyk pochodzenia polskiego Andrew Michael Odlyzko, obecnie dyrektor centrum obliczeniowego uniwersytetu Minnesota, który w swych pracach na temat funkcji ζ Riemanna zamieszcza stosowne referencje do książki Pietra Mengolego.

[11] G. E. E. Vacca: *Sulle scoperte di Pietro Mengoli.* „Atti dell'Accademia nazionale dei Lincei. Rendiconti", ser. 5, 24.2 (Dec. 1915), 508–13.

[12] Bonaventura Francesco Cavalieri (około 1598–1647), zakonnik-hieronimita z Bolonii, nauczyciel Mengolego na tamtejszym uniwersytecie, twórca tzw. „metody niepodzielnych". Kontynuator pewnych idei Keplera na temat koncepcji nieskończoności. Korespondował z mieszkającym w niedalekiej Florencji Galileuszem, który wysoko cenił jego prace; gorąco też poparł w 1629 r. kandydaturę Cavalieriego na wakującą katedrę matematyki w Bolonii.

[13] Aktualny adres parafii, w której pracował Mengoli: *via* Zamboni 47, równoległa do głównej *via* San Donato, niedaleko od obecnej siedziby wydziału matematyki Uniwersytetu bolońskiego.

[14] G. Fantuzzi: *Notizie degle scrittori bolognesi.* Bologna 1788, Stamperia di S. Tomasso d'Aquino.

[15] Reprodukowane tu strony dzieła Mengolego pochodzą z oryginału pierwszego bolońskiego wydania należącego do księgozbioru prof. Ettore Bortolottiego (1866–1947), matematyka i historyka matematyki. Dzięki uprzejmości prof. Aldo Scimone, członka *Società Italiana di Storia delle Matematiche.* Sądząc z rozrzuconych po różnych bibliotekach świata starodruków, bolońska drukarnia firmująca swe woluminy „*ex Typographia Iacobi Montij*" działała w latach około 1637–1684.

[16] A. A. P. Juszkiewicz (red.): *Historia matematyki do XIX wieku.* Tłum. S. Dobrzycki. Warszawa 1964 t. 1–3, s. 97.

[17] Szereg ten nosi tradycyjną nazwę *szeregu harmonicznego*, ponieważ każdy jego wyraz (za wyjątkiem pierwszego) jest średnią harmoniczną wyrazu poprzedniego i następnego. Mengoli nie używa w swej książce tej nazwy; wprowadził ją lord Wiliam

Brouncker dopiero w r. 1668. Mówimy, że liczba *c* jest średnią harmoniczną różnych od zera liczb a oraz b gdy

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Natucci oraz Juszkiewicz twierdzą, że szereg harmoniczny był znany Mikołajowi Oresme (Nicole d'Oresme, 1323–1382), który żył 300 lat przed Mengolim. Jest to bardzo prawdopodobne: Mikołaj, przyjaciel i doradca w sprawach finansowych króla Francji Karola V, był wszechstronnie uzdolnionym uczonym: jako pierwszy używał potęg o wykładniku ułamkowym, oczywiście w innej, niż dzisiejsza notacji. Co ważniejsze, był prekursorem koncepcji współrzędnych w geometrii (przed Kartezjuszem), trafnie rozeznał pewne cechy ruchu jednostajnie przyspieszonego (przed Galileuszem), a nawet przeciwstawił się arystotelesowskiej koncepcji nieruchomej Ziemi postulując jej rotację (200 lat przed Kopernikiem). Niestety, sam odrzucił tę ostatnią nader trafną ideę.

[18] Por. staranie opracowaną stronę internetową zawierającą kilkaset stałych matematycznych: http://www.mathsoft.com/asolve/constant/table.html

[19] Por. np. R. L. Graham, D. E. Knuth i O. Patashnik: *Matematyka konkretna*. Warszawa 1996, s. 341.

[20] Logarytmy (naturalne) wprowadził do matematyki w 1614 r. John Napier (Neper) (1550–1617) w swym dziele *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Opisanie cudownej reguły logarytmów*).

[21] A. A. P. Juszkiewicz, op. cit., t. 2, s. 172.

[22] A. A. P. Juszkiewicz, op. cit., t. 2, s. 173.

[23] *Le prime ricerche di Pietro Mengoli: La Somma delle Serie* [w:] *Geometry and Complex Variables. Proceedings of an International Meeting on the Occasion of the IX Centennial of the University of Bologna*, ed. by Salvatore Coen, 1991, s. 206.

[24] Euler nigdy nie używał greckiej litery ? na oznaczenie stosunku obwodu koła do jego średnicy; konsekwentnie oznaczał go przez p. Pierwszym, który użył powszechnie dziś używanego oznaczenia, był William Jones (1675–1749) w dziele *Synopsis palmariorum mathesios* (1706). Najprawdopodobniej powodem dla takiego wyboru było to, iż jest to pierwsza litera greckiego słowa *περιμετρον* (*perimetron* = obwód, od *peri* = wokół oraz *metrein* = mierzyć).

[25] Liczby Bernoulliego grają nadzwyczaj ważną rolę w różnych, często zaskakująco odmiennych działach matematyki: w analizie, teorii liczb czy topologii różniczkowej. Po raz pierwszy pojawiły się w sławnym *Ars Conjectandi* (s. 97), opublikowanym pośmiertnie w 1713 r. traktacie Jakoba Bernoulliego (1654–1705).

[26] L. Euler: *De summis serierum reciprocarum*, „Commentarii" (1734–1735) 1740.

[27] F. W. Byron, R. W. Fuller: *Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej*. Tom 2. Tłum. A. Pindor, A. Szymacha. Warszawa 1974, s. 57, 71.

[28] R. Apéry: *Irrationalité de ζ(2) et ζ(3)*. „Astérisque" 1979, t. 61, 11–13. Na temat tego wyniku pisze szczegółowo A. van der Poorten: *A Proof that Euler Missed... Apéry's Proof of the Irrationality of ζ(3)*. „The Mathematical Intelligencer" 1979, t. 1, s. 195–203.

[29] T. R i v o a l : *La fonction Zeta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.* „C. R. Acad. Sci." 2000, t. 331, s. 267–270.

[30] K. B a l l , T. R i v o a l : *Irrationalité d'une infinité valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs.* „Invent. Math." 2001, t. 146, s. 193–207.

[31] T. R i v o a l : *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres ζ(5), ζ(7), ..., ζ(21).* Preprint 2001, http://xxx.lanl.gov/abs/math.NT/0104221/

[32] W. Z u d i l i n : *One of the Numbers ζ(5), ζ(7), ζ(9), ζ(11) Is Irrational.* „Uspekhi Mat. Nauk" 2001, t. 56, 149–150.

[33] A. M. L e g e n d r e : *Essai sur la théorie des nombres.* Paris 1798.

[34] Gauss nie miał wtedy jeszcze 18 lat. Analityczną postać asymptotycznego prawa opisującego rozkład liczb pierwszych zapostulował jako uczeń Brunswick Collegium Carolinum pomiędzy rokiem 1792 a 1795. Ponad sto lat później (1896) dowód tego prawa podali (niezależnie) Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) i Charles Jean de la Valée Poussin (1866–1962).

[35] P. E r d ö s w wywiadzie dla P. Hoffmana. „Atlantic Monthly" listopad 1987, s. 74.

[36] D. Z a g i e r : *The first 50 million of prime numbers.* „The Mathematical Intelligencer" 1977, t. 0, s. 7–19.

Recenzent: *doc. dr hab. Wiesław Wójcik*

Krzysztof Maślanka

PIETRO MENGOLI AND NUMERICAL SERIES THE PREHISTORY OF RIEMANN'S ζ FUNCTION

The article deals with the work of the 17th-century Italian mathematician, Rev. Pietro Mengoli (1625–1686), who was the forerunner of research on numerical series. The legacy of Mengoli, a scientist well-known and well-respected in Italy, but almost altogether forgotten in the West, has never been thoroughly analyzed in Polish historical writing. Yet it was Mengoli who first posed a number of problems related to finding the sums of an infinite number of fractions. He solved most of those problems, but he failed in one case – in the case of the sum of the inverse of squares of successive natural numbers. For fundamental reasons, which had not been understood until several dozen years later, Mengoli was unable to find a compact expression for the sum of this series. He himself, with a humility rarely found in the history of science, admitted that this problem required a "richer intellect".

This series turned out to be the first example of a fundamental function investigated later by Euler and Riemann, and called, in honour of the latter mathematician, the Riemann ζ (dzeta) function. This function constitutes the key to solving one of the greatest mathematical puzzles of all times – the distribution of prime numbers. Connected with this riddle is also the most important and most difficult of the hitherto unsolved problems of the famous list presented in 1900 by Hilbert at the 2nd International Mathematical Congress in Paris, the Riemann hypothesis.

The generalizations of the series considered by Mengoli continue to be researched by mathematicians today.

The aim of the article is to show, on the example of Mengoli's achievements and failures, a general regularity: the solution of a given mathematical problem is the result of the subtle interplay between, on the one hand, the scientists's knowledge, talent and effort, and, on the other, the level of general knowledge at a given time, which stems from the collective achievements of many previous generations of mathematicians.