Król, Zbigniew

Geometria starożytna i filozofia Platona na podstawie komentarza Pappusa do X Księgi "Elementów" Euklidesa

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 51/3-4, 169-203

2006

Zbigniew Król
Zakład Teorii Poznania i Filozofii Nauki
Instytut Filozofii i Socjologii PAN
Warszawa

GEOMETRIA STAROŻYTNA I FILOZOFIA PLATONA NA PODSTAWIE *KOMENTARZA PAPPUSA DO X KSIĘGI „ELEMENTÓW" EUKLIDESA*

Pappus z Aleksandrii żył na przełomie III i IV w. n.e (ok. 290–350), w czasach panowania Dioklecjana (284–305). Był autorem pism, które swoim zakresem obejmowały całość starożytnej geometrii greckiej. Zachowany w języku greckim zbiór pism został wydany przez Fr. Hultscha (1875–78)[1]. Pisał także komentarze, z których większość zaginęła.

Najbardziej znanym dziełem Pappusa jest *Komentarz do X księgi „Elementów" Euklidesa*[2]. Tekst tego komentarza zachował się tylko w języku arabskim (MS. 2457 w Bibliothèque Nationale w Paryżu)[3]. Istnieją trzy tłumaczenia (i edycje) komentarza na język francuski[4], niemiecki[5] i angielski[6].

Moim celem nie jest przedstawienie całej zawartości tego komentarza. W tym względzie odsyłam czytelnika do tekstu i uwag wydawców. Pragnę natomiast zwrócić uwagę na szereg zagadnień, które nie zostały – jak dotąd – wyjaśnione i są związane z przeprowadzonymi przeze mnie badaniami nad matematyką starożytną i filozofią Platona[7]. Badania te łączą się ściśle z analizą X księgi *Elementów* Euklidesa.

Już na wstępie muszę zaznaczyć, że, z jednej strony, komentarz Pappusa całkowicie potwierdza nowy obraz geometrii Euklidesa, jaki wyłonił się w wyniku badań, a z drugiej strony, uzyskane wyniki pozwalają odczytać w nowym świetle wiele miejsc w samym komentarzu.

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 51: 2006 nr 3–4 s. 169–203

Dlatego w pierwszej części przedstawię zarys najważniejszych idei dotyczących nowego odczytania geometrii *Elementów* Euklidesa i filozofii Platona, by w drugiej pokazać związek tych idei z *Komentarzem*.

Poniżej podaję pewne fakty opuszczając ich ścisłe uzasadnienie, które płynie ze źródeł historycznych i powodów rzeczowych. W tej sprawie odsyłam do książki *Platon i podstawy matematyki* ... .

I. NOWE ODCZYTANIE *ELEMENTÓW* EUKLIDESA

Współczesny czytelnik *Elementów* Euklidesa może zrozumieć tekst, a nawet dowieść wielu twierdzeń matematycznych wyrażających się w pozornie identycznej szacie słownej. Można jednak pokazać – i ścisłe udowodnienie tego faktu jest jednym z istotnych rezultatów przedstawionych w mojej książce – że dzisiejszy czytelnik rozumie tekst *Elementów* w zupełnie innym modelu intuicyjnym niż matematyk starożytny. Bez rekonstrukcji tego intuicyjnego modelu, czyli tzw. horyzontu hermeneutycznego, rozumienie matematyki *Elementów* jest niepełne i nieprawidłowe.

Jeśli szokiem dla filozofów i matematyków było odkrycie geometrii nieeklidesowych, gdy okazało się, że można zaprzeczyć pewnej pozornie samooczywistej prawdzie (piątemu postulatowi o prostych równoległych), i nie tylko nie otrzymamy sprzeczności czy absurdu, lecz poznamy nowy system geometrii – to zdumiewające wydaje mi się też pokazanie, że te same aksjomaty można rozumieć na co najmniej kilka, diametralnie różnych sposobów.

Nie chodzi tu o jakąś sztuczkę matematyczną. Okazuje się, że na poziomie tego, co oczywiste oraz łączonych z tekstem *Elementów* wyobrażeń zachodzi kilka różnych możliwości. Nawet sama teoretyczna możliwość tych alternatywnych sposobów rozumienia jest w najwyższym stopniu intrygująca. Ale ponadto mamy tu do czynienia z historycznym faktem innego rozumienia matematyki. Przy pomocy metod ściśle matematycznych oraz historycznych odkrywamy różnice w podstawowych kategoriach pojęciowych matematyki: liczby, przestrzeni, prostej, figury geometrycznej itp. i dostrzegamy ich zmienność.

Mówiąc o tzw. „micie euklidesowym" (R. Hersch), przedstawia się geometrię Euklidesa jako przykład niezmiennej teorii naukowej. Rzekomo w identyczny sposób rozumiemy twierdzenie Pitagorasa i inne.

Chcę od razu zaznaczyć, że jestem jak najdalszy od jakiejkolwiek destrukcji racjonalności w stylu wąsko pojętego historyzmu czy socjologizmu. Opisywane sytuacje odsłaniają podlegające racjonalnej analizie podstawy tworzenia i zmienności wiedzy matematycznej. Podstawę racjonalności stanowi możliwość pomyślenia tego samego sensu w identyczny sposób przez różne podmioty poznające. Możliwość ta nie jest jednak automatyczna i nie opiera się na całkowicie kontrolowanej aktywności świadomości.

Nawet w przypadku pojęć takich jak „kwadrat", prócz aktowych, mamy także nieaktowe (horyzontalne) składowe rozumienia[8]. Zawartość „horyzontu", czyli „tego, co oczywiste", zmienia się historycznie. Co innego było oczywiste dla matematyka starożytnego, a co innego jest takim współcześnie. Stąd możliwa i konieczna jest racjonalna rekonstrukcja zawartości horyzontu hermeneutycznego dla matematyki starożytnej. Podobnie dla matematyki współczesnej, nawet ściśle sformalizowanej, można pokazać, że taki horyzont jest obecny i poddaje się rekonstrukcji. Współcześnie taka rekonstrukcja skutkuje tworzeniem istotnie nowej wiedzy matematycznej.

Jak jest możliwe inne rozumienie geometrii Euklidesa i na czym to polega? Chociaż odpowiedź jest długa i dość skomplikowana, to w wyniku otrzymujemy jasny intuicyjnie i całkiem „klasyczny" zbiór założeń, przed-założeń i zasad oczywistych w starożytności. Nie wszystkie one były wtedy formułowane w jawnej postaci. Były natomiast aktywne „horyzontalnie", tzn. matematyk mógł dokonywać kolejnych kroków badania matematycznego kierowany „poczuciem oczywistości". Za tym „poczuciem oczywistości" stały jednak pewne konkretne przekonania, więc możliwa jest ich racjonalna rekonstrukcja.

Bardziej współczesnym przykładem takiej ukrytej intuicyjnej składowej, aktywnej w „poczuciu oczywistości", jest aksjomat wyboru. Został on wykryty przez Zermelo jako tzw. ciche założenie w dowodzie R. Cantora twierdzenia o dobrym uporządkowaniu każdego zbioru i wzbudził dobrze znane, burzliwe dyskusje nad zakresem swego obowiązywania. Potem okazało się, że po sformułowaniu tego aksjomatu w postaci wyraźnej zasady, był on stosowany nieświadomie w dowodach pewnych twierdzeń nawet przez matematyków, którzy go otwarcie zwalczali (Borel, Lebesgue).

Współcześnie wyobrażamy sobie twory geometrii Euklidesa jako zanurzone w nieskończonej przestrzeni, w której znajdują się „gotowe" do użycia nieskończone proste, płaszczyzny, asymptoty, krzywe stożkowe, kąty itp. Tymczasem pierwsza różnica, to nieobecność wszystkich nieskończonych pojęć w geometrii *Elementów*.

Nigdzie w *Elementach* nie występuje pojęcie nieskończonej „przestrzeni euklidesowej". Wydaje się to niewiarygodne, ale tak jest. Sprawa wyjaśnienia tego faktu i pokazanie, co mamy zamiast nieskończonej, sztywnej, jednorodnej przestrzeni, w której wszystkie miejsca są identyczne i niewyróżnione, komplikuje się dodatkowo, gdyż *Elementy* nie są dziełem jednego autora, lecz zbiorem odrębnych traktatów, pochodzących z różnego czasu, które zebrał Euklides i kolejni wydawcy, dokonując koniecznych zmian.

Największą pod względem objętości, najbardziej doskonałą logicznie i najtrudniejszą jest X księga *Elementów*. Autorem jej treści matematycznej jest przede wszystkim Teajtet z Aten, bohater dialogu Platona o tym samym tytule. Teajtet jest też autorem bądź współautorem ksiąg VI (teoria podobieństwa figur), VII (teoria proporcji liczbowych) i XIII (zawierającej słynne twierdzenia o liczbie wielościanów foremnych).

Istnieje wiele interpretacji X księgi – do tej księgi powstawało najwięcej komentarzy (np. arabskich) – lecz do dziś nie wiadomo dokładnie po co została napisana, jaki jest cel i powód pojawiania się kolejnych twierdzeń[9]. W swej książce opisałem pewne, do tej pory niezauważone, własności matematyczne geometrii przedstawionej w tej księdze.

Wiadomo, że X księga zawiera klasyfikację niektórych linii niewspółmiernych. Przez „linię" należy zawsze w *Elementach* rozumieć „odcinek", a nigdy „prostą". Starożytni matematycy zauważyli, że bok kwadratu i jego przekątna są niewspółmierne, tzn. żaden odcinek (jako jednostka miary), zawarty określoną liczbę razy w boku, nie zawiera się w przekątnej. Jeśli jakiś odcinek mierzy przekątną, to nie mierzy boku, i odwrotnie: jeśli wielokrotność jakiegoś odcinka-miary pokrywa się z bokiem (czyli mieści się w nim określoną liczbę razy), to żadna jego wielokrotność nie pokryje się z przekątną. Bok i przekątna nie posiadają *wspólnej* miary.

Ten prosty dla nas wynik, był w najwyższym stopniu zadziwiający dla starożytnych. Były to przecież czasy pitagorejczyków, którzy głosili, że „zasadą" całej rzeczywistości jest liczba. Liczba dla starożytnych to była zawsze liczba naturalna większa niż jeden – ułamków w matematyce nie znali w ogóle.

Odkrycie niewspółmierności było niezgodne z przekonaniem pitagorejczyków o tym, czym jest liczba. Dowód niewspółmierności, który ze świadectw historycznych rekonstruujemy jako dowód „nie wprost", był dla matematyków pitagorejskich dowodem „wprost". Zamiast prawa „wyłączonego środka" mieli oni zasadę, że każda liczba jest parzysta albo nieparzysta. Wykazywali, że jeśli bokowi kwadratu odpowiada jakaś liczba (naturalna), to przekątna nie da się opisać żadną taką liczbą. Gdyby przekątna była liczbą, bok byłby równocześnie liczbą parzystą i nieparzystą, co jest niemożliwe. W matematyce istniały dla nich dwa rodzaje wielkości: liczby oraz to, co przestrzenne. Dowód niewspółmierności pokazywał, że arytmetyka i geometria nie dają się do siebie sprowadzić, więc nie można opisać „tego, co geometryczne" za pomocą liczb (naturalnych).

Podstawą dla takiego opisu byłoby utożsamienie zasady liczb, czyli „jedynki", z jakimś wyróżnionym odcinkiem „jednostkowym" – miarą. Dowód niewspółmierności pokazywał, że nie ma jednego odcinka jednostkowego, który mierzyłby wszystkie linie.

Można było przyjąć dwie miary: jedną dla boków, a drugą dla przekątnych. „To, co geometryczne" byłoby wtedy opisane przez jakby dwa egzemplarze liczb, oparte na wzajemnie nieporównywalnych (niewspółmiernych) odcinkach jednostkowych. Szybko jednak, w wyniku badań Teodora (również bohatera Platońskiego *Teajteta*), okazało się, że przekątne są nie tylko niewspółmierne z bokami kwadratów, lecz także nieporównywalne między sobą.

Gdyby jednak dało się przyjąć kilka, lub przynajmniej skończoną liczbę typów linii, każda ze swą własną „zasadą" – linią jednostkową? Ten problem – jak sądzę – rozważył właśnie Teajtet w X księdze i pokazał, że nie jest możliwa skończona klasyfikacja linii w geometrii. Istnieje nieograniczona liczba różnych, wzajemnie nieredukowalnych typów linii w geometrii. Oznaczało to wzajemną nieredukowalność arytmetyki i geometrii.

Do czego służyła klasyfikacja linii z X księgi w codziennej praktyce badawczej? Przynależność linii do klasyfikacji, tzn. bycie jedną z linii *medial*, *apotome*, *binomial* itd., oznaczało, że linia ta daje się skonstruować przy pomocy cyrkla i linijki. Ograniczenie konstrukcji tylko do takich, był to pomysł Platona, co wiemy od Proklosa (por. np. P r o c l u s , dz.cyt. s. 66, 3).

„Cyrkiel i linijka" to pewne metafory i nie występują nigdzie w *Elementach*. Zamiast tego mamy w I księdze wykaz dozwolonych konstrukcji. Wymienione są tam jedyne dozwolone w geometrii operacje: kreślenie koła o danym promieniu i przedłużanie danej linii (odcinka) albo w jedną, albo w obie strony naraz.

Starożytni znali, jak wiemy, dużo więcej nieopartych na powyższych operacjach metod konstrukcji, ale te zostały pominięte. Przy pomocy jednej z takich niestandardowych metod Archytas rozwiązał słynny problem podwojenia sześcianu. Ale jego genialny dowód i metoda nie znalazły się w *Elementach*. Znane są z innych źródeł, np. od Archimedesa.

Teajtet wymyślił, że na początku nie mamy przestrzeni, prostych, płaszczyzn itd., lecz tylko jeden wyróżniony odcinek, tzw. linię podstawową i wymienione dozwolone konstrukcje. Z tej jednej linii tworzymy „siatkę" innych, budując z nich kwadraty, wielokąty, wielościany i pozostałe twory geometryczne, ograniczone jednak tylko do tych, które możemy otrzymać z tej jednej linii wyjściowej.

Linia podstawowa była absolutna i wyróżniona. Dla nas jest jasne, że zawsze otrzymamy „to samo", niezależnie jakiej „długości" odcinek przyjmiemy w punkcie wyjścia.

Natomiast Teajtet tworzył świat geometrycznych przedmiotów z przekonaniem, że jedna linia jest absolutnie wyróżniona. Nigdzie w *Elementach* nie pojawia się termin „linia podstawowa", czy „linia wyróżniona". Jednak fakt jej istnienia jako podstawy systemu Teajteta jest niewątpliwy, gdyż – jak pokazałem – klasyfikacja linii z X księgi nie jest niezmiennicza względem operacji zamiany linii podstawowej.

W drugiej części książki przedstawiłem, jak zachowują się sklasyfikowane linie, gdy daną linię podstawową zamienić na inną, która była względem niej np. linią *medial*. Obranie za nową linię podstawową np. linii *medial* sprawia, że inne linie w klasyfikacji Teajteta zachowują się w ściśle określony sposób, choć tracą często swą przynależność klasyfikacyjną.

Najważniejsze jednak, że zamiana linii, choćby tylko w obrębie podstawowej dla klasyfikacji grupy linii *rational*, powoduje rozpad klasyfikacji: linie mogą utracić swe własności klasyfikacyjne. Ten fakt, wraz z tym, że sam Teajtet w ogóle nie rozważył problemu zamiany linii podstawowej świadczy, że świadomie lub nieświadomie, powodowany poczuciem oczywistości, miał przed oczami jedną linię absolutnie wyróżnioną.

Sprawa jest fundamentalna, gdyż uznany za zwieńczenie matematyki starożytnej dowód Teajteta, że istnieje co najwyżej 5 wielościanów foremnych w tzw. „przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej" dowodzi czegoś całkiem innego. Teajtet dowiódł bowiem, że istnieje dokładnie 5 wielościanów foremnych względem *danej* linii podstawowej. Pełny dowód twierdzenia o wielościanach wymaga rozważenia dodatkowo ile jest wielościanów, gdy zamienimy linie podstawowe[10]. Tego nikt dotąd nie dostrzegał.

Teajtet tworzył swoją geometrię w analogiczny sposób jak artysta grecki dzieło sztuki. Linia podstawowa jest czymś podobnym do bazy kanonu architektonicznego czy rzeźbiarskiego. Wiemy od Witruwiusza, że znajomość jednego odcinka w danym porządku architektonicznym pozwala ustalić prawie wszystkie detale świątyni, nawet ilość i rozmiary żłobkowania kolumn.

Upraszczając, należy powiedzieć, że rekonstrukcja horyzontu hermeneutycznego dla matematyki starożytnej umożliwiła powstanie nowej teorii matematycznej, wyrażonej całkowicie starożytnymi środkami. Teoria ta tłumaczy wiele fundamentalnych cech matematyki, nie tylko starożytnej. Na przykład, jednym z powodów nieobecności teorii zamiany linii w starożytności była nieumiejętność (wynikająca z braku poczucia oczywistości) posługiwania się całościami o nieskończonych zakresach. Dla nas jest oczywiste, że możemy mówić o „zbiorze wszystkich linii *medial*" lub o zbiorze wszystkich liczb naturalnych. Tymczasem, na przykład Platon twierdził, że nie ma idei wszystkich liczb.

Także w *Komentarzu* Pappusa spotykamy stwierdzenia, które świadczą, że starożytni matematycy, nawet jeśli dostrzegali konwencjonalność wyboru jednostki miary, to samo rozpatrzenie zamiany linii podstawowej uważali za niepoddające się matematycznej analizie.

„Przeciwnie, linię, o której chcielibyśmy wykazać, że jest *medial*, ktoś inny uznawałby za nie bardziej *medial* niż rational, skoro nie jest pozbawiona miary. Ale to nie jest metoda naukowa." (część I, paragraf 14; o *zamianie* linii podstawowej mowa jest wprost w paragrafie 17 części I, zob. także paragraf 16).

Okazuje się jednak, że zamiana linii – jak pokazałem – prowadzi do ciekawej teorii matematycznej. Sam mechanizm zamiany linii może być także nową metodą tworzenia kolejnych (nowych) rodzajów linii niewymiernych.

Opisana przeze mnie teoria zamiany linii stanowi dodatkowo jakby drugą, niespisaną i brakującą część X księgi *Elementów*, gdyż wyjaśnia „białe plamy" w tej księdze. Rekonstrukcja „brakujących" twierdzeń pozwala znaleźć poszukiwaną od 2000 lat wewnętrzną logikę tej księgi i wytłumaczyć powody jej powstania. Teoria ta pozwoliła także na wyjaśnienie rozwoju teorii proporcji starożytnych, doprowadzając do rekonstrukcji tego rozwoju i wykrycia jednej teorii proporcji, dotychczas nieznanej[11].

Wróćmy do pojęcia przestrzeni euklidesowej. Zamiast gotowej, rozpostartej w nieskończoność przestrzeni jest jedynie możliwość przeprowadzenia dozwolonej konstrukcji na już skonstruowanej linii czy figurze. Miejsca jest tylko „tyle, ile trzeba", aby „pomieścić" najpierw linię podstawową, a potem wszystko, co da się z niej skonstruować. Miejsce to rozrasta się w miarę uprawiania geometrii i ogranicza tylko do tego, co już zostało *explicite* skonstruowane. W książce pokazuję, że przestrzeń nieskończona została w geometrii Teajteta zastąpiona Diadą „tego, co wielkie i małe" Platona, a linia podstawowa odpowiada tajemniczej „linii niepodzielnej", o której – zdaniem Arystotelesa – nauczał Platon.

Nie sposób podać wszystkich argumentów w tym miejscu, ale jeden warto przytoczyć. W zachowanych fragmentach komentarza Herona do *Elementów* (jeszcze z I wieku p.n.e.) znajdujemy alternatywne dowody niektórych twierdzeń (np. twierdzenie I. 20 i uwagi do twierdzeń I. 16, I. 48), polegające na podniesieniu zarzutu, że Euklides zakłada, iż obok skonstruowanej już figury „jest jakieś miejsce obok". Dlatego Heron wyznacza potrzebną w dowodzie linię wewnątrz już skonstruowanej, „rozpostartej" figury; por. P r o c l u s 12: *In Euclidem* ..., 275, 7 *ei de legoi tis topon me eidenai...*, 289, 18 *legei oun tis hoti ouk esti topos...* (por. Thomas L i t t l e H e a t h : *The Thirteen Books of Euclids Elements*. Cambridge 1926, s. 23). T. Heath za Van Peschem podaje, że z uwagi na podobieństwo argumentacji alternatywne dowody twierdzeń I. 5, I. 17, I. 32 u Proklosa, także należy przypisać Heronowi. Stanowisko Herona jest świadectwem, że pojęcie przestrzeni Euklidesowej nie było wcale tak jasne jak obecnie.

Twierdzę, że pojęcia infinitarne (np. prostej nieskończonej) były znane w starożytności, ale – jako niejasne (niemożliwe do matematycznego ujęcia w ramach starożytnych teorii proporcji) – zostały wyeliminowane metodycznie z matematyki *Elementów*. Geometria Euklidesa jest w rzeczywistości swego rodzaju geometrią nieeuklidesową. Na przykład: skoro linie nieskończone w niej nie występują, to przez punkt nie leżący na danej linii-odcinku można poprowadzić nieskończenie wiele linii równoległych do danej. Nie występuje też w tej geometrii pojęcie ciągłości, a klasyfikacja linii Teajteta ze współczesnego punktu widzenia (podałem zarys dowodu) stanowi fragment pewnego przeliczalnego modelu geometrii absolutnej, który jest nieciągły.

II. POTWIERDZENIE NOWEGO ODCZYTANIA *ELEMENTÓW* PRZEZ KOMENTARZ PAPPUSA

1. ELIMINACJA NIESKOŃCZONEJ PRZESTRZENI JAKO ARENY DLA UPRAWIANIA GEOMETRII

Pierwsze związane z tym informacje znajdują się w paragrafie 2 części I. Pappus stwierdza tam, że liczby różnią się od wielkości geometrycznych tym, że w liczbach istnieje granica podziału (jedynka), a wielkości geometryczne (tj. ciągłe) są zawsze ograniczonymi (skończonymi) wielkościami, które jednak można dzielić w nieskończoność. Liczby zatem nie są ograniczone „z góry", gdyż można zawsze znaleźć liczbę jeszcze większą, lecz „z dołu", a wielkości geometryczne na odwrót.

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, że Pappus nie dopuszcza nieograniczonego przedłużania, np. odcinka, stwierdzając wyraźnie, że wielkości geometryczne (ciągłe) mają zawsze maksimum, czego nie da się powiedzieć o liczbach.

To przekonanie starożytnych można wyjaśnić następująco: jak pokazały badania nad współmiernością i niewspółmiernością, linie nie tworzą jednej i jednorodnej rodziny. Dlatego mamy zawsze tylko *konkretne* już skonstruowane linie, a nie całość złożoną z wszystkich możliwych linii. Każda taka, konkretna linia jest skończona. Liczby natomiast tworzą jednorodną rodzinę, gdyż mają tę samą zasadę – jedynkę, która mierzy je wszystkie i umożliwia wzajemne ich uporządkowanie. W przypadku liczb też, każda następna jest wytwarzana przez tę samą jedność-jedynkę. Można wtedy opisać jednorodny i kontrolowany mechanizm generowania liczb. Brak wspólnej miary dla linii oznacza brak kontroli nad zawartością całości złożonej z tych linii.

„Powód jest taki, że liczby, rosnące stopniowo, wychodzą od najmniejszej przez dodawanie i kroczą w nieskończoność (czyli bez końca) [...] Jeśli zatem nie można znaleźć najmniejszej w przypadku wielkości ciągłych, jest oczywiste, że nie istnieje żadna miara (czyli wielkość), która jest wspólna im wszystkim, jak jedność jest wspólna liczbom. Lecz jest jasne, że wśród nich (tj. wielkości ciągłych) nie ma najmniejszej; i jeśli nie ma, to niemożliwe, by wszystkie były współmierne. Jeśli zatem szukać powodu czemuż to najmniejszą, lecz nie największą znajduje się w przypadku wielkości nieciągłej, zaś w przypadku ciągłej, największą, lecz nie najmniejszą, to trzeba odpowiedzieć, że rzeczy takie różnią się od siebie tylko z racji tego jak są zgodne ze skończonością lub nieskończonością; rzeczy wytworzone, które są wzajemnymi przeciwieństwami będąc skończone, podczas gdy pozostałe pochodzą od nieskończoności. Porównajmy na przykład przeciwieństwa: podobne i niepodobne, równe i nierówne, ruch i spoczynek. [Podobne, równe i spoczynek] prowadzą [czyli sprowadzają się do] skończoności; podczas gdy niepodobne, nierówne i ruch prowadzą (czyli sprowadzają się do) nieskończoności." (Por. *Komentarz*, par. 3, część I; tłumaczę na podstawie tekstu angielskiego Thomsona).

Dzisiaj jest dla nas oczywiste, że linie można dobrze uporządkować. Tymczasem, matematycy starożytni nie potrafili wprowadzić metryki w swojej geometrii. Dlatego, zamiast mówić o całości wszystkich linii, zadowalali się budową całości tych linii, które można otrzymać z jednej wyróżnionej linii. O tej wyróżnionej linii powiem w punkcie trzecim.

Można wskazać na zgodność wywodów Pappusa odnośnie ograniczenia przestrzennego tworów geometrycznych ze stanowiskiem Arystotelesa. Podkreśla to także W. Thomson przytaczając, np. następujące fragmenty:

„Nie to bowiem jest nieskończone, co już nie ma niczego poza sobą, lecz właśnie to, co ma coś poza sobą." (*Fizyka* 207a 1–5, tłum. K. L e ś n i a k ; por. cytowane powyżej w części I świadectwo Herona).

„Należy przyjąć zgodnie z rozumem, że nie istnieje nieskończoność przez dodawanie w sensie przekraczania wszelkiej wielkości, natomiast istnieje nieskończoność przez podział. Zarówno bowiem materia, jak i nieskończoność są »obejmowane«, jako należące do określonego przedmiotu [...]. Słusznie też trzeba uznać w liczbie najmniejszą granicę, w drugim zaś kierunku każda ilość może być przekraczana. Natomiast w dziedzinie wielkości [rozciągłych – *Z. K.*] rzecz ma się przeciwnie: w kierunku zmniejszania można przekroczyć każdą wielkość, a znowu w kierunku zwiększania nie ma wielości nieskończonej. [...] A skoro żadna wielkość postrzegalna zmysłowo nie jest nieskończona, przeto nie może istnieć wielość, która by przekraczała wielkość określoną; gdyby to było możliwe, wówczas mógłby istnieć twór większy od nieba." (*Fizyka* 207a–207b, tłum. K. L e ś n i a k).

Istnieje, oczywiście, dużo więcej świadectw w sprawie eliminacji pojęcia nieskończonej przestrzeni z geometrii starożytnej, które przytaczam w swojej książce. Uzasadniam tam także, że pojęcia nieskończone były znane w starożytności, ale zostały świadomie wyeliminowane z *Elementów* Euklidesa[13].

2. DIADA PLATONA ZAMIAST NIESKOŃCZONEJ PRZESTRZENI JAKO BAZA INTUICYJNA DLA GEOMETRII *ELEMENTÓW* EUKLIDESA

Nasuwa się oczywiste pytanie: jeśli pojęcie nieskończonej przestrzeni zostało wyeliminowane z geometrii *Elementów*, to co je zastępuje?

Odpowiedź, że zamiast przestrzeni „Euklidesowej" matematycy starożytni używali jakiejś „Diady" wygląda na arbitralną i sztuczną. Diada wydaje się być – o ile w ogóle występuje w matematyce starożytnej – pojęciem filozoficznym i zewnętrznym w stosunku do zagadnień, które są ściśle matematyczne.

Tymczasem Diada nie zajmuje pozycji analogicznej w stosunku do geometrii, jak mistyka liczb w stosunku do arytmetyki, lecz jest pojęciem zarówno *stricte* matematycznym, jak i filozoficznym. Podobne dwie warstwy – filozoficzną i matematyczną – da się wykryć w starożytnym pojęciu liczby.

Jak pokazałem, Platon posługuje się specyficznym pojęciem liczby. Do tej pory nie zauważono, że w starożytnej Grecji istniały trzy sposoby pojmowania liczby. Najstarszym, używanym jeszcze w Egipcie i Babilonii, było pojęcie liczby jako miary. Pojęcie liczby jako miary jest pojęciem hermeneutycznym, tzn. nie było ono zdefiniowane, lecz używane, a jego rekonstrukcja (dokonana po raz pierwszy w mojej książce) wyjaśnia podstawowe cechy i różnice w arytmetyce egipskiej, babilońskiej i greckiej. Zauważenie tego pojęcia i właściwe odróżnienie go od pozostałych dwóch pojęć liczby jest trudne. Prawdopodobnie brak jasnego widzenia różnic pomiędzy tymi pojęciami to główna przyczyna licznych trudności interpretacyjnych gdy chodzi o filozofię Pitagorejską i Platońską, i zrozumienie wzajemnych związków między nimi.

Przykładowo pojęciem liczby jako miary posługuje się Konrad Gaiser[14] przypisując je błędnie Platonowi. Pojęcie to jest ciekawe również z tego względu, że najczęściej posługuje się nim także współczesny czytelnik Platona i *Elementów*.

Liczba jako miara to traktowanie dowolnej (w tym ciągłej) wielkości lub przedmiotu: odcinka w geometrii lub pewnej ilości wody, wina lub oliwy albo stada owiec, jako jedności. Ta jedność podlega dalszym operacjom, np. podziałom na określoną liczbę porcji. Jak wiemy z papirusów, w Egipcie zajmowano się obliczeniami jak podzielić określoną ilość żywności pomiędzy pewną ilość robotników, aby wyżywić ich przez określoną liczbę dni.

W matematyce egipskiej, w przeciwieństwie do greckiej, znano ułamki i liczono głównie na nich. W zasadzie wszystkie ułamki w Egipcie były ułamkami o liczniku równym jedności. Odpowiadało to „traktowaniu jako jedności" wyjściowej wielkości do podziału. Zwróćmy uwagę, że za każdym razem *co innego* było tą jednością. Dlatego koncepcja ta była związana z pojęciem tzw. liczby zmysłowej u Platona. Podaję tu tylko ogólną charakterystykę pojęcia liczby jako miary i opuszczam cały – w zasadzie najbardziej istotny – kontekst pojęcia miary, uwzględniony w mojej książce.

Tymczasem zdaniem Platona i wszystkich matematyków greckich matematyka powinna być oparta na niezmiennej, zawsze takiej samej jedności. Matematyka kupców, rzemieślników i żołnierzy, czyli matematyka stosowana, nie jest właściwą matematyką. Dlatego greccy matematycy definiowali *explicite* pojęcie liczby. Dla większości z nich – i tak liczba jest definiowana w VII księdze *Elementów* i u Arystotelesa – liczba była *wielością* złożoną z identycznych jednostek-monad. Ale nie dla Platona. Dla Platona liczba jest pewną *jednością* złożoną z identycznych jednostek-monad.

Różnica jest pozornie bez większego znaczenia. Dlatego zapewne nikt nie zauważył jej fundamentalnych konsekwencji, a przede wszystkim tego, że kwestii czy liczba jest wielością, czy „jednością nad wielością" poświęcona jest w istocie dyskusja Arystotelesa z teorią idei Platona.

Jak pokazuję, Arystoteles twierdził, że do danej wielości (np. do trzech koni) nie dochodzi żadne *jedno* nad nimi. Liczba 3 jest zawsze związana z pewną dyskretną wielością niepołączonych i nieciągłych przedmiotów. Dlatego jest wielością złożoną z jednostek i wielością mierzoną przez jedność. Platon natomiast widział jedność liczby: jeśli liczba byłaby luźną wielością monad, to nie można powiedzieć czy w matematyce mamy do czynienia z liczbą 5, czy z dwoma liczbami: 2 i 3.

Matematyka współczesna przyznała rację Platonowi. Jego pojęcie liczby jest pewnym (nieekstensjonalnym) pojęciem zbioru. Dopiero R. Cantor, prawie 2500 lat później pokazał, że samo pomyślenie pewnej wielości jako jedności umożliwia ukonstytuowanie się pojęcia zbioru. Dla prawdziwego matematyka jest zadziwiające, co takiego „dochodzi" do elementów, że tworzą zbiór. Zbiór pojawia się tylko wtedy, gdy pewną wielość elementów potraktujemy jako jedność. Właśnie uświadomienie sobie tego faktu spowodowało powstanie współczesnej teorii mnogości. Pomijam w tym miejscu szczegółową dyskusję źródeł historycznych.

Po rekonstrukcji wymienionych pojęć liczby, przedstawiam w książce rolę struktury „jeden nad wielością" (termin pochodzi od Platona) w filozofii Platona. Każda idea jest „jednością nad wielością" uczestniczących w niej przedmiotów. Jeśli nie ma wielości, nie ma też idei. Dlatego nie ma idei pojedynczych przedmiotów, np. Sokratesa. Jedynka nie była liczbą dla Greków, lecz zasadą liczb. Najmniejszą liczbą była „elementarna wielość", czyli liczba 2.

Jeśli liczba jest „jednością nad wielością" identycznych zasad-jedności i każda idea jest „jednością nad wielością" uczestniczących w niej przedmiotów, to jest jasne, dlaczego każda idea jest dla Platona *liczbą*. Każda idea uczestniczy bowiem w strukturze idealnej „jeden nad wielością", której archetypem jest właśnie struktura liczbowa.

Idee uczestniczą nie w poszczególnych liczbach arytmetycznych, bo tych jest wiele; matematyk musi, na przykład dysponować, wieloma egzemplarzami liczb, żeby dodać do siebie 3 + 3 + 3, lecz wystarczy 10 liczb idealnych.

Liczby idealne są pierwowzorami wszystkich innych „jedności nad wielością *określoną*". Jest ich tylko 10, gdyż, podobnie jak geometria – arytmetyka starożytna jest konstruktywna.

W geometrii mieliśmy jedną linię podstawową, a w arytmetyce mamy 10 „liczb podstawowych" (idealnych) i określone mechanizmy tworzenia tych liczb. O narodzinach liczby i o sposobach tworzenia liczb mówią prawie wszystkie zachowane komentarze do Arystotelesa. System liczbowy Greków był dziesiętny, co oznacza możliwość zapisania każdej liczby przy pomocy kilku wyjściowych.

Badałem następnie rolę odkrycia niewspółmierności w filozofii Platona i pokazałem, że są dwa rodzaje przedmiotów idealnych: idee uczestniczące w liczbie idealnej, czyli „jedności nad wielością określoną", i przedmioty będące „jednością nad wielością nieokreśloną".

Przykładem jedności nad wielością nieokreśloną są odcinki, figury geometryczne i ogólnie, wszelkie wielkości przestrzenne. Należą tu także (por. *Fileb*) przyjemności i wszelkie wielkości, których może być „więcej lub mniej", a więc np. ciepłe i zimne, uczucia, odczucia zmysłowe etc. Platon odkrył dwa rodzaje wielkości, gdy okazało się w wyniku badań Teajteta, że arytmetyka nie redukuje się do geometrii, a więc, że „nie wszystko jest liczbą". Dlatego też, badania Teajteta były zapewne motywowane przez Platona i – prawdopodobnie – ujmowały istotne matematycznie fakty w ogólnej filozofii Platona. Podaję tego dowody.

Głównym skutkiem odkrycia niewspółmierności i teorii Teajteta była konieczność przyjęcia w wyjaśnianiu filozoficznym (dialektyce) dwóch, wzajemnie nieredukowalnych zasad. Są to najwyższe niespisane zasady, tworzące tzw. protologię Platona. Są to: Jedność i nieokreślona Diada „tego, co więcej i mniej".

Niestety, nie mogę w tym miejscu zaprezentować drobiazgowej analizy protologii Platona, czyli jego teorii najwyższych zasad[15]. Wspomnę tylko, że Platon w swojej, tzw. niespisanej nauce twierdził, że u podstaw wyjaśniania rzeczywistości stoją dwie najwyższe zasady: Jedność i Diada „tego, co wielkie i małe". Jedność odpowiedzialna jest za każdą formę określoności, skończoności i ograniczenia. Natomiast Diada odpowiada za „pierwotną przestrzenność", nieokreślone rozpostarcie (w dwóch kierunkach), możliwość nieokreślonej, ciągłej zmiany. Każdy poszczególny twór, np. przedmiot zmysłowy lub przedmiot idealny (idea), czy matematyczny (powiedzmy: odcinek) powstaje ze „zmieszania" tych dwóch zasad. Dlatego są one obecne we wszystkim, co istnieje.

Najwyższe zasady są wzajemnie nieredukowalne, tzn. nie da się wyjaśniać na przykład Diady przy pomocy Jedności. Są one jednakowo konieczne, gdyż nie da się wyjaśnić niczego, posługując się tylko jedną z nich. Zasady są najwyższe, gdyż próba mówienia o tych zasadach przy pomocy innych pojęć (idei) prowadzi do aporii. Wszystkie te fakty – jak pokazałem w swojej książce – są przedmiotem rozważań w Platońskim *Parmenidesie* i fakty te zostały tam dowiedzione. Słynne aporie w Parmenidesie są w rzeczywistości dowodami dialektycznymi najwyższej pozycji niespisanych zasad i wzajemnej ich nieredukowalności. Wszystko to prowadzi do ścisłego pojęcia uczestniczenia, które jest bardziej fundamentalne niż np. pojęcie idei. W książce pokazuję także związek protologii Platona z odkryciem i badaniami nad niewspółmiernością matematyczną.

Fakty te znajdują dodatkowe potwierdzenie w dialogach Platona. W książce podaję zarys nowego odczytania najbardziej kontrowersyjnych z nich, np. *Parmenidesa*, *Fileba* (który okazuje się dyskusją z poglądami Eudoksosa i jego teorią proporcji), *Timajosa* i *Teajteta*.

Nowa interpretacja *Parmenidesa* znajduje swoje potwierdzenie także w *Komentarzu* Pappusa. Na przykład, wrócimy teraz ponownie do – już cytowanego – pierwszego fragmentu z paragrafu 2 części I *Komentarza*[16].

Ostatnie zdanie tego cytatu – razem z całym przesłaniem paragrafu 2 – potwierdza dodatkowo moje spostrzeżenie, że tzw. najwyższe rodzaje Platona z *Sofisty* są uporządkowane parami, gdzie pierwszy człon uczestniczy w Jedności, a drugi w Diadzie[17].

Paragraf 2 *Komentarza* dostarcza technicznych wskazówek do nowego odczytania tekstu Parmenidesa, tak jak to pokazałem w swojej książce[18]. Dotyczy on bowiem rozumienia terminów część, całość, jedność i wielość, a także ich różnego znaczenia i przeciwstawienia odpowiednio w kontekście wielkości dyskretnych (liczbowych, „tego, co arytmetyczne") i ciągłych (przestrzennych, „tego, co geometryczne). Tekst tego paragrafu stwierdza bowiem *explicite* istnienie dwóch rodzajów wielości i całości, tj. „jedności nad wielością określoną" i „jedności nad wielością nieokreśloną" oraz wiąże je z filozofią Platona. Aby zakończyć już sprawę związku *Komentarza* z interpretacją *Parmenidesa* należy dodać, że Pappus wprost postwierdza moją interpretację tego dialogu odnośnie pierwszej hipotezy (por. *Parmenides* 137c–142a) w par. 13 księgi I. Aporie w *Parmenidesie* pojawiają się, gdy mieszamy zasady: Diadę i Jedność, zakładając współmierność wszystkiego. Parmenides zawiera więc dowody wzajemnej nieredukowalności i wyróżnionej, najwyższej pozycji protologicznych zasad z nauki niespisanej Platona[19].

„Jeśli tak, dyskusja w dziele Platona nazwanym imieniem Parmenidesa nie powinna temu przeczyć (tj. istnieniu wielkości niewspółmiernych), [zauważmy bowiem, że][20] rozważył on w nim Pierwszą Przyczynę (tj. Jedność) w powiązaniu z podziałem (czy oddzieleniem) linii współmiernych od niewspółmiernych." (Por. *Komentarz*, par. 13, część I).

Pappus potwierdza zatem związek *Parmenidesa* z matematycznymi badaniami nad niewspółmiernością i X księgą *Elementów*. Ten wątek jest szczegółowo wyjaśniony w mojej książce.

Wracając do roli Diady w geometrii starożytnej, należy zauważyć jej obecność nie tylko w komentarzach filozoficznych, ale także w ściśle matematycznych, jak u Pappusa. Przykładem komentarza filozoficznego może być *Komentarz Proklosa do pierwszej księgi „Elementów" Euklidesa*. Odwołania do protologii Platona są tam, zwłaszcza w *Prologu*, bardzo częste.

Zacytuję przykładowo tekst z rozdziału II (od 5.15):

„Aby odkryć zasady bytu matematycznego jako całości, musimy wznieść się do tych wszechprzenikających zasad, które wytwarzają wszystko z siebie: mianowicie do Granicy oraz Nieograniczonego. Bowiem te dwie zasady najwyższe zaraz po niewysłowionym i całkowicie niepojętym działaniu Jednego, rodzą wszystko inne, łącznie z bytami matematycznymi. Z tych zasad pochodzą wszystkie inne rzeczy razem i z osobna, lecz gdy się wyłaniają, pojawiają się we właściwym rozdzieleniu i zajmują swoje miejsce w uporządkowanym pochodzie, niektóre pierwsze, inne po środku, a inne u końca. Przedmioty Rozumu (*Nous*), na mocy sobie właściwej prostoty, są pierwszymi uczestnikami Granicy i Nieograniczonego. Swą jedność, tożsamość i stałość trwania w istnieniu czerpią od Granicy; lecz swe zróżnicowanie, twórczą płodność i swą boską inność i postęp, od Nieograniczonego. Przedmioty matematyki są potomstwem Granicy i Nieograniczonego [...] To dlatego w tych porządkach istnienia są stosunki idące w nieskończoność, lecz rządzone przez zasadę Granicy. Bowiem liczba, poczynając od jedności, jest zdolna do nieograniczonego wzrostu, chociaż każda liczba, którą wybierzesz, jest skończona; podobnie wielkości [przestrzenne, geometryczne – *Z.K.*] dzielą się bez końca, choć różne wielkości wszystkie są ograniczone, a rzeczywiste części całości są skończone. Gdyby nie było nieskończoności, wszystkie wielkości byłyby współmierne i nic nie byłoby niewyrażalne czy niewspółmierne, co uważa się za cechy odróżniające arytmetykę od geometrii [...] I jeżeli Granica byłaby nieobecna, nie byłoby współmierności lub identyczności stosunków w matematyce, ani podobieństwa i równości figur [...] Dlatego matematyka potrzebuje tych dwóch zasad tak, jak potrzebują ich inne dziedziny bytu. Co do najniższych jestestw, tych, które ujawniają się w materii i są kształtowane przez naturę, jest natychmiast całkiem jasne, że uczestniczą one w obydwu zasadach, w Nieograniczonym, jako podstawie, która wspiera ich formy, i Granicy – na mocy ich stosunków, postaci i kształtów. Jest zatem jasne, że zasady pierwotne w matematyce są tymi, które rządzą wszystkimi rzeczami."

Odwołania do Diady są częste w *Komentarzu*, natomiast nigdzie nie występuje przestrzeń nieskończona. Pappus nie używa wprawdzie w żadnym miejscu terminem „Diada", ale posługuje się nią jako zasadą w wyjaśnianiu wszelkich przejawów nieskończoności matematycznej (tj. nieskończoności arytmetycznej i geometrycznej). Za obecność nieskończoności w matematyce są odpowiedzialne dokładnie te funkcje, które Platon przypisywał Diadzie: możliwość nieograniczonego powielania (np. jedności i kolejnych egzemplarzy liczb w arytmetyce) i możliwość nieograniczonego przedłużania oraz dzielenia wielkości przestrzennych („tego, co wielkie i małe").

Odwołania do funkcji Diady i Jedności jako pryncypiów całej rzeczywistości matematycznej występują w następujących paragrafach części I *Komentarza* Pappusa:

1 (gdzie uwzględnia się także rolę drugiego pryncypium, Jedności, w dziedzinie linii niewspółmiernych, pisząc o określoności na mocy definicji; analogiczna uwaga odnosi się do paragrafu 3), 3 (najważniejsze świadectwo dotyczące funkcji Diady w I księdze, odwołujące się *explicite* do Platona), 6 (występuje tam termin „wielkość i małość"[21]), 8 i 9 (podkreślające determinującą rolę skończoności, która podpada pod Jedność, a w paragrafie 8 jest dodatkowo mowa o wielości określonej), 13 (paragraf ten dodatkowo pozwala ustalić, że Pappus przez „zasadę" w paragrafie 9 rozumie Jedność)[22].

Rola Diady jako pierwotnej przestrzenności, nieokreślonej co do rozmiaru i zawartości stanie się jeszcze bardziej widoczna, jeśli uwzględnimy zamiar Teajteta zbudowania geometrii w oparciu o jedną, daną bez uprzedniej konstrukcji, wyróżnioną linię podstawową. Wyjaśnię to lepiej w następnym punkcie rozważań.

3. WYRÓŻNIONA LINIA PODSTAWOWA. TEAJTET A EUKLIDES

Pappus podkreśla konwencjonalny charakter jednostki miary w geometrii w wielu miejscach, na przykład:

„[...] [Miara] istnieje, w przypadku wielkości ciągłych, umownie, jako wytwór siły wyobraźni. Zakładamy, mianowicie, taką lub inną określoną miarę i nazywamy ją łokciem czy piędzią lub jakąś podobną rzeczą. Następnie porównujemy tę określoną jednostkę miary, którą rozpoznaliśmy, i nazywamy te wielkości ciągłe, które możemy mierzyć nią, wymiernymi, podczas, gdy te, które nie mogą być przez nią mierzone, klasyfikujemy jako niewymierne. Dlatego, być wymiernym w tym sensie nie jest faktem, który wywodzimy z natury, lecz jest wytworem umysłowej fantazji, która dostarcza przyjętej miary. Dlatego wielkości ciągłe nie mogą wszystkie być wymierne w odniesieniu do jednej wspólnej miary. Dlatego obrana miara nie jest miarą dla wszystkich; nie jest wytworem natury, lecz umysłu" (par. 5).

Z drugiej strony w *Komentarzu* stwierdza się wyraźnie, że Teajtet i Teodor uważali, iż istnieje wyróżniona jednostka miary:

„Należy zauważyć, jednakże, że rozumowanie Teajteta nie obejmuje każdego kwadratu jaki istnieje, współmiernego liniowo, czy niewspółmiernego, lecz tylko te kwadraty, które pozostają w stosunku do tak czy inaczej wymiernego kwadratu, tego kwadratu mianowicie, którego miarą jest [jedna – *Z.K.*] stopa [kwadratowa]. Dlatego to ten kwadrat był podstawą, z której Teodor rozpoczął swoje badanie dotyczące kwadratów, których miarą są trzy stopy [kwadratowe] i kwadratów, których miarą jest pięć stóp [kwadratowych], i stwierdził, że są one niewspółmierne z kwadratem, którego miarą jest [jedna – *Z.K.*] stopa [kwadratowa]" (par. 11, część I).

Stanowisko, że istnieje jedna linia wyróżniona zostaje przeciwstawione poglądowi Euklidesa:

„W przeciwieństwie do tego, rozumowanie Euklidesa obejmuje każdy kwadrat i nie jest zależny tylko od jakiegoś obranego wymiernego kwadratu lub linii" (par. 11, część I).

Nieco dalej (przy końcu par.12) Pappus jeszcze raz potwierdza różnicę pomiędzy podejściem Teajteta, a Euklidesa:

„Zostało także wystarczająco jasno pokazane na podstawie twierdzenia (lub zdania) w księdze nazywanej imieniem Teajteta, czemu konieczne jest odróżnienie linii współmiernych liniowo oraz w kwadracie względem wybranej linii wymiernej, tej, której miarą jest mianowicie stopa, od linii współmiernych tylko w kwadracie."

Tymczasem, w następnych paragrafach Pappus zdaje się stwierdzać coś innego, niż to, co przypisał Euklidesowi w przeciwieństwie do podejścia Teajteta w paragrafie 11:

„§ 14. Musimy jednak wrócić do przedmiotu naszych rozważań i zastanowić się, czy jest możliwe, by pewne linie były wymierne mimo swej niewspółmierności z linią, o której na początku założyliśmy, że jest wymierna. W skrócie, musimy zbadać, czy pewna wielkość może być wymierna i niewymierna zarazem. Obecnie uważamy, że miary (tj. w przypadku wielkości ciągłych) istnieją tylko na mocy umowy, a nie z natury – fakt, na który często zwracaliśmy uwagę wcześniej. Stąd znaczenie terminów wymierny i niewymierny z konieczności zmienia się zgodnie z umowną miarą, jaka jest przyjęta; i, gdy rzeczy, które są wzajemnie niewspółmierne, nigdy nie mogą być współmierne w żadnym sensie, to niemniej byłoby możliwe, by coś wymiernego stało się niewymierne, skoro miary mogą się zmienić. Lecz, jako że jest pożądane, by własności wymiernych i niewymiernych [wielkości – *Z.K.*] były określone i ogólne, przyjmujemy pewną jedną miarę i własności wymiernych i niewymiernych wielkości ciągłych rozróżniamy względem niej. Bowiem gdybyśmy nie rozróżniali ich względem pewnej jednej rzeczy, lecz wzięli za wymierną jakąś wielkość ciągłą, której założona miara nie mierzy, z pewnością nie zachowalibyśmy wyraźnych i nieomylnych definicji tego uczonego badacza [tj. Euklidesa – *Z.K.*]. Przeciwnie, linię, o której chcielibyśmy wykazać, że jest *medial*, ktoś inny uznawałby za nie bardziej *medial* niż *rational*, skoro nie jest pozbawiona miary. Ale to nie jest metoda naukowa. Jak mówi Euklides, jedną linię konieczne trzeba [uznać za] wymierną.

§ 15. Niech zatem linia założona będzie wymierna, skoro koniecznie trzeba wziąć pewną jedną linię za wymierną; i niech każda linia, która jest z nią współmierna, czy liniowo, czy też w kwadracie, będzie zwana wymierną. [...] Wobec czego wyróżniona linia nie koniecznie mierzy każdą linię wymierną. [...] Współmierność z wyróżnioną linią wymierną jest wobec tego jedyną podstawą wymierności." (Euklides zatem jest przedstawiony raz jako zwolennik jednej linii podstawowej wyróżnionej, a raz jako jej przeciwnik i zwolennik konwencjonalności miary (par. 11, część I).

Stwierdzenia w podobnym duchu spotykamy także w następnych paragrafach Komentarza; por. § 16, 17 części I. Wyróżniona linia podstawowa występuje także *implicite* w dociekaniach czysto matematycznych w księdze II., na przykład w paragrafie 7. Stwierdza się tam, że dwie linie dodane mogą utworzyć nową linię niewymierną tylko wtedy, gdy obie są współmierne tylko w kwadracie lub są niewspółmierne ani liniowo, ani w kwadracie. Ten drugi przypadek jest rozważany w następnym, 8, paragrafie. Dla nas, współcześnie, jest zupełnie jasne, że dwie linie niewspółmierne w kwadracie (w sensie globalnym – por. część II mojej książki) niekoniecznie muszą utworzyć kwadraty, których sumy są obszarami wyłącznie albo *rational*, albo *medial*. Tymczasem Pappus formułuje takie, fałszywe ze współczesnego punktu widzenia[23] twierdzenie, postępując analogicznie do Euklidesa (por. twierdzenia z X księgi *Elementów* dotyczące *linii major, side of a square equal to a rational plus a medial area i side of a square equal to two medial areas*).

Można to wyjaśnić tylko odniesieniem do jednej linii wyróżnionej. Dodatkowo rekonstruujemy niesłychanie istotną dla zrozumienia zamiaru matematyków starożytnych cechę ich geometrii: w geometrii nie rozpatrywano wszystkich możliwych linii, lecz tylko te, które były odniesione do wyróżnionej linii podstawowej. Dlatego *continuum* starożytnych zawierało „luki". Oznacza to, że z Diady „wyławiano" tylko niektóre linie, te mianowicie, które dały się skonstruować w określony sposób z linii podstawowej, tj. przy pomocy cyrkla i liniału lub poprzez dodawanie i odejmowanie linii i obszarów.

W tekście *Komentarza* mamy tego bezpośrednie świadectwo w części I, w paragrafie 16:

„Euklides nigdy nie nazywa wymiernymi linii, które są niewspółmierne z daną linią wymierną pod obydwoma względami (tj. długości i kwadratu). A cóż miałoby go przed tym powstrzymać, jeśliby zamiast określać linie wymierne względem tej linii jedynie, określałby je także przyjmując jakąś inną miarę na podstawie z tych linii, które są zwane wymiernymi i odnosił je do niej?" [Nową miarę mógłby obrać spośród linii wymiernych, współmiernych tylko w kwadracie z daną linią podstawową – *Z.K.*].

To dlatego, że jedna linia jest wyróżniona, nie są niezmiennicze względem zamiany linii w obrębie linii wymiernych definicje sześciu linii binomial i sześciu apotome. W swojej książce podaję matematyczne dowody omawianych tutaj pobieżnie spraw; por. na przykład twierdzenie 14, s. 165 (Z. K r ó l : *Platon i podstawy ...*).

Sprawa jest nie tylko prosta (*sic*), ale i ma fundamentalne znaczenie dla zrozumienia X księgi *Elementów* i *Komentarza*. Tymczasem nikt tego do tej pory nie wykrył. Na przykład, cytowany przed chwilą fragment *Komentarza*, W. Thomson (i G. Junge) opatruje uwagą: "Not very clear, as already Suter has observed. G. J." (por. odnośnik nr 131, s. 110, u Thomsona).

Przykładem miejsca w *Elementach*, gdzie dla zwykłego rozumienia tekstu jest konieczna wiedza o istnieniu wyróżnionej linii podstawowej, są twierdzenia 39–41 wraz z odpowiadającymi im konstrukcjami z twierdzeń 33–35 (a także analogony tych twierdzeń dla obszarów odejmowanych, por. twierdzenia 74–78) z X księgi. Linie te, np. *major*, są definiowane ogólnie, ale konstrukcja przykładów tych linii jest zawsze odniesiona do jakiejś linii wymiernej, względem wyróżnionej linii podstawowej; por. także niżej uwagi o wariancie N_2a.

Paragraf 19 (część I) *Komentarza* tłumaczy, że liniami *medial*, które są definiowane ogólnie za pomocą średniej geometrycznej, nie są średnie geometryczne pomiędzy dowolnymi liniami (ani nawet pomiędzy dowolnymi liniami współmiernymi tylko w kwadracie), lecz tylko te, które są określone względem wyróżnionej miary, tj. linii podstawowej.

Możemy teraz wyjaśnić pozorną niezgodność początkowych cytatów przywołanych w tym punkcie, a przeciwstawiających stanowisko Teajteta, który wyróżnił jedną linię, stanowisku Euklidesa. Euklides bowiem, jak się wydaje, raz jest przedstawiony jako przeciwnik jednej linii wyróżnionej, a raz jako jej zwolennik.

Nie ma tu jednak żadnej niekonsekwencji. W paragrafach 10, 11 i 12 I księgi *Komentarza* jest mowa o poglądach Teajteta na podstawie dialogu Platona o tym tytule. Istotnie, we fragmencie 147d – 148a *Teajteta* jest mowa, że kwadraty o polach wyrażalnych przy pomocy liczb kwadratowych mają boki współmierne. Pappus zupełnie słusznie zauważa, że w *Elementach* podane jest znacznie ogólniejsze twierdzenie X. 9, tzn. że jeśli dowolne kwadraty pozostają do siebie w takim stosunku jak dwie liczby kwadratowe, to ich boki są współmierne. Jak argumentuje Pappus, nie oznacza to, że te boki muszą być współmierne z linią podstawową, chociaż może tak być. Na podstawie omawianych właśnie fragmentów *Komentarza* nie jesteśmy w stanie zrekonstruować poglądów historycznego Teajteta, gdyż Pappus wyjaśnia jedynie różnicę pomiędzy stwierdzeniem zawartym *explicite* w dialogu Platona, a zawartością X księgi. Można ponadto wykazać, że twierdzenie X. 9 jest także autorstwa Teajteta[24]. Sugestywne sformułowania dotyczące modyfikacji przez Euklidesa twierdzenia z dialogu prezentują więc prywatne wyjaśnienia Pappusa, a nie pochodzą, np. od Eudemosa.

Możemy natomiast na podstawie innych fragmentów *Komentarza* próbować zrekonstruować dorobek matematyczny Teajteta historycznego w odniesieniu do treści X księgi *Elementów*.

Poświęcę temu trochę miejsca, gdyż sprawa ta jest przedmiotem wielu kontrowersji i badań. Część z nich omawiam w swojej książce, ale dla większej pełności przypomnę, że stanowiska są tu bardzo zróżnicowane – od prawie całkowitej negacji dorobku matematycznego Teajteta[25], poprzez próby jego rekonstrukcji, m.in. na podstawie tekstu Pappusa[26], aż do stwierdzenia, że cała zawartość X księgi jest autorstwa Teajteta[27].

Dla Pappusa, podobnie jak dla Proklosa, źródłem wiedzy o dorobku matematycznym Teajteta historycznego, jest – jak sam podaje w paragrafie 1 części I – zaginione obecnie dzieło Eudemosa z Rodos, ucznia Arystotelesa, poświęcone historii geometrii. Napisał on także „dzieło o kącie, stwierdzając, że jest on wielkością”[28] (por. P r o c l u s , dz.cyt. s. 125.7–8). Jak wiemy, np. z fragmentu 379 u Proklosa, dzieło Eudemosa przytaczało też dowody różnych twierdzeń, a ideowo zależne było od filozofii Arystotelesa.

Tak więc, Pappus za Eudemosem podaje, że Ateńczyk Teajtet, po drobiazgowej analizie ustalił ścisłe definicje i podał niepowątpiewalne dowody w odniesieniu do nauki o wielkościach niewspółmiernych. Odróżnił także „linie, które są współmierne liniowo, od tych, które są niewspółmierne (tj. liniowo), i który podzielił najbardziej powszechnie znane linie niewspółmierne zgodnie z różnymi średnimi, przypisując linię *medial* geometrii, *binomial* arytmetyce i *apotome* harmonice" (por. paragraf 1).

Euklides natomiast miał określić niepodważalne zasady odnośnie współmierności i niewspółmierności, a więc nie tylko w odniesieniu do jednej linii podstawowej, lecz globalnie, tzn. niezmienniczo względem dowolnie obranej linii podstawowej. Określił także wiele rodzajów wielkości niewspółmiernych i „wyjaśnił ostatecznie jakiego rodzaju określoność (lub skończoność) jest w nich do odnalezienia" (czyli pracował nad klasyfikacją tych wielkości; por. paragraf 1, część I *Komentarza*).

Informacje o pracach Teajteta historycznego w I części *Komentarza* są ograniczone, w zasadzie, do paragrafu 1. Powracają one ponownie w paragrafie 17 części II:

„Ci, którzy pisali o tych rzeczach (tj. o wielkościach niewymiernych), głoszą, że Ateńczyk Teajtet, zakładał dwie linie współmierne w kwadracie i dowodził, że jeżeli wziął do nich linię stojącą w proporcji geometrycznej (tj. średnią geometryczną), to powstawała linia zwana *medial*, ale gdy wziął [linię] zgodnie z proporcją harmoniczną (tj. średnią harmoniczną), powstawała *apotome*[29]. Przyjmujemy te twierdzenia, skoro wypowiedział je Teajtet, lecz dodajmy tu przede wszystkim, że [omawiana] średnia geometryczna jest [i tylko] średnią [czyli *medial*] między dwiema liniami wymiernymi [względem linii podstawowej – *Z.K.*] i współmiernymi [tylko – *Z.K.*] w kwadracie, natomiast średnia arytmetyczna jest jedną z linii [niewymiernych], które tworzy się przez dodawanie, a średnia harmoniczna, jedną z linii [niewymiernych], które tworzy się przez odejmowanie, i po drugie, że te trzy rodzaje proporcji dają wszystkie linie niewymierne."

Następne paragrafy 18–20 zawierają dowody matematyczne, pokazujące jak otrzymać wszystkie rodzaje linii niewspółmiernych przy użyciu trzech proporcji. Dowody te – moim zdaniem – pochodzą od Teajteta i zostały usunięte przez Euklidesa z pierwotnego korpusu teorii X księgi *Elementów*. Mogły one być także zrekonstruowane przez Pappusa, który chciał wytłumaczyć przekazy starożytnych, na przykład Eudemosa, dotyczące związku teorii proporcji z teorią Teajteta. Na ten wariant wskazuje fakt, że dowody pokazują, jak otrzymać każdą z 12 głównych linii niewspółmiernych przy założeniu, że zostały one już zdefiniowane w inny sposób, tj. przy pomocy operacji dodawania i odejmowania linii. Tylko prezentacja związku linii *medial* ze średnią geometryczną jest zbyteczna, gdyż linia ta – jako jedyna w X księdze – jest zdefiniowana przy pomocy proporcji.

Ponadto cytowany fragment mówi nie o tym, że Teajtet zdefiniował linie niewspółmierne przy pomocy średnich matematycznych, ale że udowodnił, iż na przykład linia średnia harmoniczna do dwóch linii wymiernych, współmiernych tylko w kwadracie, jest linią zwaną apotome. Co prawda identyczne sformułowanie występuje w odniesieniu do linii *medial*, która jest zdefiniowana w *Elementach* tylko poprzez średnią geometryczną, ale koniec cytowanego fragmentu (tj. „te trzy rodzaje proporcji dają wszystkie linie niewymierne") wskazuje, że chodzi raczej o wtórne związanie klasyfikacji linii niewymiernych z teorią proporcji.

Na wtórne związanie teorii linii niewymiernych z proporcjami wskazuje także fakt, że w paragrafie 1 części I Pappus pisze nie o średnich matematycznych, lecz o związku odpowiednio linii *medial*, *binomial* i *apotome* z geometrią, arytmetyką i harmoniką. Wydawcy i komentatorzy dzieła Pappusa na ogół uważają to za błąd lub przejaw obrazowego sposobu mówienia. Tymczasem, jeśli założyć wtórność związania klasyfikacji z X księgi z teorią proporcji, to staje się to jednym z jego powodów.

W pracy *Wstęp do starożytnych teorii*... podaję uwagi o teorii proporcji Teajteta P_5, które uzasadniają przedstawione rozumienie omawianego fragmentu na podstawie prac Teajteta nad ogólną teorią proporcji. Tę ogólną teorię (P_6) sformułował dopiero Eudoksos.

Mamy więc pierwszy możliwy wariant rozgraniczający wkład Teajteta i Euklidesa w X księgę *Elementów*. Oznaczę go jako N_1. W tym wariancie cała matematyczna treść X księgi jest autorstwa Teajteta. Natomiast Euklides opierał dowody twierdzeń na teorii proporcji Eudoksosa, eliminując starsze teorie proporcji P_4 (teoria proporcji wielkości czysto geometrycznych z księgi VI *Elementów*) i P_5[30]. Teorie te są jednak dalej obecne w dowodach wielu twierdzeń w X księdze i wskazują wyraźnie w jaki sposób wyglądała pierwotna klasyfikacja linii Teajteta. Pozostałości starszych teorii proporcji pozwalają na selekcję starszych wersji dowodów, autorstwa Teajteta, od nowszych, zmienionych przez Euklidesa. Możemy otrzymać w ten sposób listę problemów, które w szczególny sposób interesowały Euklidesa[31].

Zgodnie z N_1, Teajteta należy uznać za autora łączących linie niewymierne z teoriami proporcji twierdzeń „pomostowych", które podaje Pappus w paragrafach 17 – 20 w części II[32]. W paragrafie 20 Pappus stwierdza, że:

„[...] twierdzenie Teajteta jest niniejszym sprawdzone. Bowiem średnia geometryczna dwóch linii *rational* i współmiernych [tylko – *Z.K.*] w kwadracie jest linią *medial*; ich średnia arytmetyczna jest linią *binomial*; a średnia harmoniczna, *apotome*."

Potwierdza to całkowicie wariant N_1.

Drugi możliwy wariant rekonstrukcji pierwotnej teorii linii niewymiernych Teajteta, to przypuszczenie, że wyróżnił on tylko trzy rodzaje linii niewspółmiernych, odpowiednio do trzech rodzajów proporcji, tj. linie *medial*, *binomial* i *apotome* (ten wariant oznaczmy jako N_2), natomiast cała pozostała klasyfikacja z X księgi pochodzi już od Euklidesa lub Eudoksosa. Tego zdania jest np. W. R. Knorr, dowodzący, że np. linia major, i inne, nie została odkryta przez Teajteta[33].

Świadectwa historyczne na rzecz udziału Eudoksosa w tworzeniu klasyfikacji wielkości niewspółmiernych są bardzo wątpliwe, gdyż jedynie pośrednie[34]. Dużo ważniejsza jest jednak sprzeczność tezy Knorra z bezpośrednimi przekazami, które podają, że Teajtet był autorem najważniejszych wyników w księdze XIII, gdzie pojawia się, np. linia *major*. Co więcej tezy Knorra są niezgodne z matematyczną treścią przekazów – dowody Pappusa pokazują, że wszystkie 12 linii niewspółmiernych można otrzymać za pomocą tylko trzech proporcji i nie trzeba do tego, np. trzech nowych, autorstwa Eudoksosa[35].

Najważniejsza część argumentacji Knorra wiąże się z wyjaśnieniem terminu „podziały" w pewnym fragmencie u Proklosa[36]. Argumentacja Knorra opiera się jednak na linii *major* i jest niezgodna z innymi świadectwami historycznymi. Knorr, na przykład, wyjaśnia w interesujący sposób pochodzenie nazwy linii *major* (por. s. 280–281), ale nie zgadza się to z tłumaczeniem pochodzenia tej nazwy u Pappusa (por. *Komentarz*, paragraf 8, część II). Nawet, jeśli przyjąć tłumaczenie Knorra, którego tu nie przytaczam, to potwierdza to jedynie, że Teajtet, jako główny twórca XIII księgi *Elementów*, znał linie *major* i *minor*.

Gdyby jednak przyjąć, że Teajtet w pierwotnej klasyfikacji z X księgi *Elementów* zdefiniował linie niewspółmierne przy pomocy trzech średnich – geometrycznej, arytmetycznej i harmonicznej, to w podobny łatwy sposób można otrzymać nie tylko wszystkie pozostałe linie sklasyfikowane, ale także całą treść X księgi[37]. Nawet dowody poszczególnych twierdzeń nie ulegają większym zmianom, z wyjątkiem twierdzeń X.112–114. W tym ostatnim wypadku konieczne twierdzenie pomocnicze formułuje Pappus[38].

Oznaczmy przez N_3 wariant stwierdzający, że treść matematyczna X księgi jest autorstwa Teajteta z Aten, ale linie niewspółmierne zostały zdefiniowane przy pomocy trzech średnich matematycznych. Zatem, w tym wariancie Euklides zmienił definicje linii, uwalniając je (z wyjątkiem linii *medial*) od związku ze średnimi matematycznymi oraz zmienił nieznacznie dowody twierdzeń. Dziełem Teajteta są wtedy także definicje współmierności i niewspółmierności liniowej i w kwadracie, i związane z tym twierdzenia (np. X. 9), gdyż są one bez żadnych zmian potrzebne w N_3.

Dodatkowo, jak pokażę niżej, w N_3 (i w N_1 także) można wyjaśnić matematyczny wkład Euklidesa w klasyfikację X księgi, zauważając, że Euklides mógł zastąpić starą teorię proporcji Teajteta P_5 (zob. Z. Król: *Wstęp do starożytnych teorii ...*), nową teorią proporcji Eudoksosa P_6, znaną dobrze z V księgi *Elementów*.

Pewnym problemem jest wyjaśnienie, jakiego rodzaju nowe linie niewspółmierne odkrył Euklides. Ogólnie mówiąc, możliwe są dwie odpowiedzi, prowadzące do dwóch nowych wariantów: N_3a i N_3b.

W pierwszym przypadku (N_3a) poszukujemy tych linii wśród linii sklasyfikowanych w X księdze. Jednym z kandydatów wydaje się być grupa sześciu linii *binomial* i sześciu linii *apotome*. Twierdzenia dotyczące tych linii tworzą bowiem dobrze wyróżnioną grupę dotyczącą szczegółowego problemu matematycznego. Są one jednak konieczne, żeby wykazać, iż nie istnieje skończona klasyfikacja linii niewymiernych i różności poszczególnych linii. Dlatego, wydaje się, że odpowiednie twierdzenia potrzebne dla dowodu twierdzenia X. 115, pierwotnie zastępowano rozważaniami o bokach odpowiednich obszarów i dopiero Euklides usystematyzował te rozważania nazywając i badając podstawowe własności sześciu linii *binomial* i sześciu *apotome*. Możliwe jest takie przekształcenie zawartości X księgi, które opierając się na definicjach linii niewspółmiernych przy pomocy średnich matematycznych i korzystając z twierdzeń podanych przez Pappusa, pozwala na dowód twierdzenia X. 115 bez systematycznego badania sześciu rodzajów linii *binomial* i *apotome*. Także wzmianka w traktacie Pseudo-Arystotelesa (Eudemos z Rodos?) *De lineis insecabilibus* (968b 20), gdzie o liniach *apotome* i *medial* mówi się, że „dopiero ostatnio zostały przedyskutowane", może przemawiać za wariantem N_3a.

Dlaczego jednak Euklides miałby zmieniać definicje linii niewspółmiernych? Wydaje się, że o ile zmiana taka rzeczywiście miała miejsce (por. wariant N_1), to motywował ją konstruktywizm geometrii starożytnej. Definicja linii *binomial* jako sumy dwóch linii wymiernych (względem podstawowej) i współmiernych tylko w kwadracie, a linii *apotome*, jako ich różnicy, pozwalała lepiej określić w wyniku jakich operacji otrzymujemy te linie. Definicja tych linii z użyciem odpowiednio średniej geometrycznej i harmonicznej była w tym względzie znacznie bardziej nieokreślona. W wyniku zmiany definicji pojawiły się nowe problemy, wcześniej trudne do systematycznego rozważenia. Należały do nich na pewno także te, które doprowadziły do wyróżnienia właśnie sześciu rodzajów linii *binomial* i *apotome*.

Pappus jednoznacznie stwierdza, że linie niewspółmierne otrzymujemy przy użyciu tylko trzech operacji. Są to: znajdywanie konstruktywne (por. np. twierdzenie II. 14) linii średniej geometrycznej do linii wymiernych współmiernych tylko w kwadracie i już wcześniej danych, tj. uprzednio skonstruowanych w odniesieniu do linii podstawowej, a następnie, dodawanie takich linii i – po trzecie – ich odejmowanie:

„§ 2. Po drugie, powinno być wiadome, że niewymierne [tj. linie niewymierne – *Z.K.*] znajduje się na trzy sposoby: albo przez proporcję, albo przez dodawanie, albo podział (tj. odejmowanie), i że nie są znajdywane w żaden inny sposób, nadto nieuporządkowane wywodzi się z uporządkowanych tylko na te trzy sposoby. Euklides znalazł tylko jedną linię niewspółmierną przez proporcję, sześć przez dodawanie i sześć przez odejmowanie; i te tworzą całkowitą liczbę uporządkowanych linii niewymiernych" (jest to cały tekst paragrafu 2 w części II; w sprawie wielkości uporządkowanych i nieuporządkowanych – zob. niżej).

Na obszarach, np. na figurach płaskich, możemy wykonywać też operacje dodawania i odejmowania. Nie są to jednak obszary całkowicie dowolne, lecz tyko te, które są określone przez którąś z linii otrzymaną w odniesieniu do linii podstawowej. W szczególności, aby otrzymać linie niewymierne należy rozpatrywać tylko niektóre obszary:

„Wobec tego obszary można brać na trzy sposoby: albo [linia – Z.K.] *medial* jest łączona z *rational*, albo *rational* z *medial* lub *medial* z *medial*. [...] Obszary mogą być albo dodawane do siebie, albo odejmowane jeden od drugiego." (część II, paragraf 15).

W obu fragmentach widoczny jest zarówno związek klasyfikacji z linią podstawową, jak i fakt, że starożytni nie operowali całością dowolnych, wszystkich możliwych linii niewspółmiernych. Diada była dla nich rzeczywiście *nieokreślona*, mimo uznania jedności nad wielościami nieokreślonymi (nieskończonymi; np. *medial*, *apotome*, etc.) i pokazania, że można je ściśle analizować.

Zauważmy, że opis twierdzeń w X księdze *Elementów* rozpoczyna się od linii podstawowej i konstrukcji związanej z nią grupy linii *rational*. Następnie definiuje się i konstruuje linię *medial*. Mamy wtedy do dyspozycji już trzy rodzaje linii: linie *rational* współmierne liniowo, linie *rational* współmierne tylko w kwadracie i linie *medial*. Rozporządzamy też tylko dwoma rodzajami obszarów: *medial* i *rational*.

Cała pozostała klasyfikacja tworzona jest tylko z tych uprzednio skonstruowanych *elementów* i nie rozpatruje się wszystkich możliwych linii i obszarów.

Konstruowanie kolejnych linii niewymiernych z danych i skonstruowanych uprzednio elementów jest ogólną metodą matematyczną, przenikającą całą X księgę. Metoda ta musiała pochodzić już od Teajteta, co wynika z jego definicji linii *rational* jako linii współmiernych nie tylko liniowo, ale także w kwadracie.

Umożliwiało to mierzenie linią podstawową za pomocą kwadratu o boku równym linii podstawowej nie tylko różnych linii, ale także obszarów płaskich.

Uwagi te jednoznacznie preferują wariant N_1, który uznaję za najbardziej prawdopodobny.

Jeśli jednak chcemy dalej poszukiwać innych, oprócz sześciu linii *binomial* i sześciu *apotome*, kandydatów na linie niewspółmierne odkryte przez Euklidesa i obecne w X księdze *Elementów* – czyli w omawianym wariancie N_3a – to możliwe jest jeszcze przyjęcie następującego kryterium:

(1) Linie, które są ściśle związane z linią podstawową zdefiniował Teajtet, a linie zdefiniowane bez bezpośredniego związku z linią podstawową pochodzą od Euklidesa.

Otóż, omawiając układ poszczególnych części księgi X *Elementów*, Pappus stwierdza w paragrafie 27 części I, że:

„W czwartej części zaznajamia nas on [tj. Euklides – *Z.K.*] z sześcioma liniami niewymiernymi, które są tworzone przez dodawanie. Te są złożone z dwóch linii wymiernych, współmiernych [tylko – *Z.K.*] w kwadracie, – dwóch linii [wymiernych], współmiernych liniowo, gdy są dodane tworząc jedną linię, która jest wymierna – albo z dwóch linii *medial*nych współmiernych [tylko – *Z.K.*] w kwadracie – dwóch linii *medial*nych współmiernych liniowo, gdy są dodane tworząc linię *medial* – albo z dwóch linii nieokreślonych [podkreślenie moje – *Z.K.*], które są niewspółmierne w kwadracie."

Linie „nieokreślone" to linie *major, the side of a rational plus a medial area* i *the side of a the sum of two medial areas*, które są zdefiniowane w *Elementach* jako sumy dowolnych linii, niekoniecznie *rational*, byle współmiernych tylko w kwadracie[39]. W podobnie ogólny sposób są zdefiniowane odpowiadające im linie otrzymywane z odejmowania; por. twierdzenia X. 76–78.

Jednak związek tych linii z linią podstawową ustalają warunki uzupełniające dla obszarów zawartych pomiędzy tymi liniami, o których zakłada się, że są tylko albo *rational*, albo *medial*. *Elementy* i *Komentarz* Pappusa zawierają dowody, że obszary *rational* i *medial* zastosowane do linii sklasyfikowanych nie wyprowadzają poza klasyfikację.

Tak więc, jest możliwe, że te linie wprowadził i odnośne twierdzenia o obszarach podał Euklides. To jednak wydaje się sprzeczne ze źródłami stwierdzającymi związek Teajteta z księgą XIII *Elementów*, gdzie, na przykład, występuje linia *major*.

Sprawę wyjaśnia ostatecznie Pappus w paragrafach 6–10 części II *Komentarza*. Tłumaczy, że w definicjach z twierdzeń X. 36 – 38 jest mowa o liniach współmiernych tylko w kwadracie z zastrzeżeniem, że te linie są *rational* lub *medial*, a w następnych definicjach (por. twierdzenia X. 39 – 41) mówi się ogólnie o liniach współmiernych tylko w kwadracie, jako że Euklides oparł się na pewnym dodatkowym, nieobecnym w *Elementach* twierdzeniu.

Twierdzenie to brzmi:

„Jest wobec tego udowodnione, że dwie linie niewspółmierne w kwadracie nie są także *rational* lub *medial*, gdy suma kwadratów zbudowanych na nich jest *rational* lub *medial*. Kiedy więc Euklides tego dowodzi (tj. twierdzenia o liniach *rational* lub *medial*, gdy suma kwadratów zbudowanych na nich jest *rational* lub *medial*), że jest prawdą w przypadku [linii] współmiernych w kwadracie, lecz nie w przypadku [linii] niewspółmiernych w kwadracie, nazywa współmierne w kwadracie *rational* lub *medial*, ale tych drugich tak nie nazywa. Nazywa je po prostu *niewspółmiernymi w kwadracie*" (paragraf 10, część II).

Oznacza to, że użycie linii nieokreślonych co do rodzaju, nie jest wynikiem innej, ogólniejszej metody definiowania, lecz skutkiem zbadania pewnej matematycznej własności.

Prowadzi to do odrzucenia kryterium (1). Przeciwko niemu przemawia ponadto fakt, że wszystkie konstrukcje omawianych linii (*major*, *minor* etc.) i dowody twierdzeń, w które są uwikłane, przebiegają w odniesieniu do jednej linii podstawowej.

Wszystkie uwagi Pappusa o dorobku matematycznym Teajteta i Euklidesa z wyjątkiem uwagi opartej na tekście Eudemosa o związku linii niewymiernych z teorią proporcji matematycznych sprawiają wrażenie, jakby czerpane były głównie z tekstu dialogu Platona i X księgi *Elementów*. Na przykład, w cytowanym już paragrafie 2 części II Pappus stwierdza, że „Euklides znalazł tylko jedną linię niewymierną przy pomocy proporcji, sześć przez dodawanie i sześć przez odejmowanie", chociaż wcześniej twierdził, że to Teajtet znalazł linię *medial* przez proporcję, etc.

Ponadto, greckie nazwy linii *apotome*, *medial* i *binomial* wskazują, że linie te były zdefiniowane pierwotnie tak samo jak w *Elementach*. Także odpowiedniki arabskie nazw tych linii potwierdzają, że tylko linia *medial* była zdefiniowana przy pomocy proporcji, *apotome* przy pomocy operacji odejmowania linii, a *binomial*, dodawania. Oznacza to, że wariant N_1 jest najbardziej prawdopodobny.

4. WKŁAD TEAJTETA I APOLLONIUSZA A BADANIA EUKLIDESA NAD KLASYFIKACJĄ LINII NIEWYMIERNYCH. REKONSTRUKCJA ZAGINIONEGO TRAKTATU APOLLONIUSZA O LINIACH NIEWYMIERNYCH

Pozostaje do omówienia jeszcze wariant N_3b, w którym poszukujemy nowych linii niewymiernych, odkrytych przez Euklidesa, poza kanonem X księgi *Elementów*.

Na podstawie źródeł, a zwłaszcza Komentarza Pappusa, posiadamy informacje o wielu rodzajach linii niewymiernych, o których nie ma mowy w *Elementach*.

Z tekstu Platońskiego Teajteta wiemy, że Teajtet historyczny rozważał linie niewspółmierne związane z liczbami sześciennymi. Prawdopodobnie rozszerzył on definicję linii *rational* i dołączył do nich także linie współmierne w sześcianie.

Badanie linii współmiernych także w sześcianie, prowadzi do rozważania – jak w problemie delijskim – dwóch średnich geometrycznych do danych linii *rational* współmiernych tylko w kwadracie. Dla sześcianów i innych tworów trójwymiarowych łatwo można sformułować odpowiednik twierdzenia VI. 1 z *Elementów* i ustalić dla nich *ratio* równe ratio dwóch obszarów płaskich. Następnie, korzystając ewentualnie z twierdzenia II. 14, można skonstruować *ratio* dwóch linii równe wyjściowemu *ratio* przestrzennemu. Na tej podstawie można konstruować nowe linie niewymierne w identyczny sposób jak w X księdze, rozważając dodawanie i odejmowanie określonych objętości *medial* i *rational*.

Powyższa procedura może być uzupełniona o przestrzenny analogat twierdzenia X. 9 i większości pozostałych, początkowych twierdzeń z X księgi (do 20 włącznie)[40]. Analogiczne twierdzenia da się także rozszerzyć i podać dla większości pozostałych twierdzeń u Euklidesa.

Metoda ta pozwala zdefiniować linie *rational* współmierne tylko w sześcianie i rozszerzyć klasyfikację. Rozwój takiej teorii był jednak ograniczony wskutek złego stanu stereometrii w czasach Platona, na co filozof narzeka w *Państwie* (528c–d). Same teoretyczne definicje były niewystarczające, gdyż konieczne było także przeprowadzenie odpowiednich konstrukcji przestrzennych. Nie wiemy, ile z omawianego projektu zrealizował Teajtet, lecz pewną wskazówką są linie z twierdzenia X. 115, należące do rodzaju linii niesklasyfikowanych, a nazywanych *nieuporządkowanymi*, które musiał znać już Teajtet.

Wskazówkę, jak rozumieć terminy linie uporządkowane i linie nieuporządkowane, zawiera fragment 220 w *Komentarzu* do I księgi „*Elementów*” Euklidesa u Proklosa:

„W ogólności zobaczymy, że pewne problemy posiadają jedno rozwiązanie, inne więcej niż jedno i pewne nieokreśloną liczbę. Nazywamy »uporządkowanymi«, używając terminu Amfinomusa, te, które mają tylko jedno rozwiązanie, »pośrednimi« te, które mają więcej niż jedno, ale skończoną [ich – *Z.K.*] liczbę i »nieuporządkowanymi« posiadające nieokreśloną różnorodność rozwiązań.”

Pappus stwierdza (paragraf 2, część II), że u Euklidesa linii uporządkowanych jest razem 13: jedna uzyskiwana przez proporcję geometryczną, sześć przez dodawanie i sześć przez odejmowanie i dopowiada, że „te tworzą ogół uporządkowanych linii niewymiernych”. Wiemy, na przykład, że istnieje tylko jedna linia średnia geometryczna do danych, tylko jedna linia *binomial* utworzona jako suma dwóch linii *rational* współmiernych tylko w kwadracie (bo *binomial* dzieli się jednoznacznie na tworzące ją linie) i tylko jedna linia *apotome* będąca ich różnicą. To samo można powiedzieć o innych liniach z X księgi *Elementów*.

Można natomiast utworzyć sumę lub różnicę dowolnej ilości linii *rational* współmiernych tylko w kwadracie, a także tworzyć ich różnice i znajdywać kolejne średnie geometryczne. Twierdzenie X. 115 omawia właśnie ten ostatni przypadek.

J. Heiberg uznał twierdzenie X. 115 za interpolację. Jednakże, jak argumentuję w książce, twierdzenie to jest najważniejszym twierdzeniem i podsumowaniem matematycznej treści całej X księgi *Elementów*. Potwierdza to Pappus, traktując twierdzenie X. 115, jako zwieńczenie i cel klasyfikacji:

„Odtąd, pragnąc dowieść, że ilość wielkości niewymiernych jest nieskończona, znajduje nieograniczoną (lub nieskończoną) ilość linii różnego rodzaju (lub porządku), wszystkie powstałe z linii *medial*nej. Tą wskazówką kończy traktat, odstępując od badania wielkości niewymiernych, ponieważ ich liczba jest nieskończona” (paragraf 36, część I; por. także końcówkę paragrafu 4 tej samej części).

Teajtet musiał więc znać linie nieuporządkowane powstające z linii *medial* za pomocą średniej geometrycznej.

Systematyczne studium nad rodzajami linii nieuporządkowanych miało być dziełem Apolloniusza z Pergi, gdyż „Euklides zajmował się wyłącznie uporządkowanymi" (paragraf 1, część II).

Moim zdaniem Pappus musiał mieć dostęp do – zaginionego obecnie – traktatu Apolloniusza *O nieuporządkowanych liniach niewymiernych* lub do jakiegoś matematycznego omówienia tego traktatu. Na podstawie *Komentarza* Pappusa możemy podjąć próbę rekonstrukcji treści i metody badania w tym traktacie.

Apolloniusz miał objaśnić rodzaje linii uporządkowanych i był odkrywcą nauki o liniach nieuporządkowanych, których opisał wielką ilość posługując się ścisłymi metodami i podając bardzo szczegółowe i żmudne dowody (por. paragraf 1, część I). Oznacza to, że Apolloniusz wprowadził podział na linie uporządkowane i nieuporządkowane. Musiał być także twórcą nauki o *jednorodności* i *niejednorodności* linii. Linie jednorodne są to linie podobne, gdyż związane z linią podstawową. Konstruujemy je bezpośrednio z linii *rational*. Do tej grupy należą także niektóre linie niejednorodne, mianowicie te, które otrzymujemy bezpośrednio z linii *rational*. Są to linie trinomial (sumy trzech linii *rational*, współmiernych tylko w kwadracie), *quadrinomial* (sumy czterech takich linii), itd. Takie są też linie uzyskiwane jako różnice większej ilości linii *rational* współmiernych tylko w kwadracie.

Istnieją też sumy i różnice linii oraz odpowiednich obszarów zawartych pomiędzy tymi, które są liniami niewspółmiernymi. Przykłady takich linii i pewne matematyczne ich własności podaję w części II swojej książki. Linie te są niejednorodne z liniami *rational*, jako coraz bardziej oddalone od linii podstawowej.

Metoda pracy Apolloniusza jest analogiczna do metody z X księgi *Elementów*: linie konstruuje się tylko z linii uprzednio skonstruowanych i obszarów już skonstruowanych, i tylko przy pomocy operacji znajdowania średniej geometrycznej, dodawania oraz odejmowania odpowiednich obszarów; por. paragrafy 1, 21 i 22 części I.

Na powyższe rozumienie terminu „jednorodny z" wskazuje także tekst paragrafu 12 i 13 części II. Linie tworzone przez dodawanie są tam nazywane liniami jednorodnymi z liniami uzyskiwanych przez odejmowanie, gdyż są związane jako wzajemne przeciwieństwa, ale przy wspólnym odniesieniu do linii *rational*. Na przykład: linia *apotome* powstająca jako różnica jest jednorodna ze swoim przeciwieństwem[41], tj. linią *binomial* (gdyż ta powstaje jako suma odpowiednich linii ***rational***). O jednorodności zawsze decyduje bliskość względem linii *rational* (por. także np. § 4, 21 części I oraz wiele innych miejsc w *Komentarzu*).

Bardziej szczegółowo zawartość traktatu Apolloniusza możemy zrekonstruować na podstawie paragrafów 21–23 części I oraz 4 i 35 części II *Komentarza*.

Traktat zaczynał się zapewne od definicji linii uporządkowanych, nieuporządkowanych, jednorodnych i niejednorodnych. Apolloniusz prawdopodobnie wyróżnił linie złożone i proste. Proste są to linie, które uzyskujemy przy pomocy średniej geometrycznej, a złożone to wszystkie linie otrzymywane jako sumy i różnice odpowiednich linii i obszarów.

Termin *linie złożone* występuje u Pappusa i jest zdefiniowany w paragrafie 13 części II. Apolloniusz prawdopodobnie nie zajmował się liniami współmiernymi w sześcianie. Ten problem częściowo sprowadzał się do badania dwóch średnich geometrycznych, a więc do pewnego zagadnienia dotyczącego linii *prostych nieuporządkowanych*.

Podobnie jak u Euklidesa, Apolloniusz mógł rozpocząć traktat od tych ostatnich linii, bowiem Pappus stwierdza, że studium większej ilości linii pozostających w ciągłej proporcji geometrycznej należy do samego początku badania wielkości niewymiernych (paragraf 22, część I). Status tych linii jako nowych, nieredukowalnych do innych linii uporządkowanych określa twierdzenie X. 115. Apolloniusz mógł ustalić różność tych linii od innych linii nieuporządkowanych, ale dopiero w końcowej części traktatu.

Następna część dzieła Apolloniusza musiała zawierać definicje linii nieuporządkowanych, tworzonych przez dodawanie i badała ich własności matematyczne.

Linie tworzone przez dodawanie były zapewne omawiane w kolejności malejącej ich jednorodności względem linii *rational*. Najpierw badane były linie *trinomial*, *quadrinomial*, etc., czyli sumy trzech, czterech i więcej liczby linii *rational* współmiernych tylko w kwadracie; por. paragraf 22 części I. „Dowód niewymierności linii złożonej z trzech linii współmiernych [tylko – *Z.K.*] w kwadracie jest dokładnie taki sam jak w przypadku [linii – *Z.K.*] *binomial*.” (por. paragraf 22, części I i *Elementy* X. 36). Każdy z sześciu rodzajów linii *binomial* prowadził do konkretnych wariantów i twierdzeń, a także pozwalał na wyróżnienie analogicznych typów linii, np. pod-rodzajów linii *trinomial*. W niektórych przypadkach otrzymywało się linie już sklasyfikowane i znane z *Elementów*.

Kolejnym rodzajem linii otrzymywanych przez dodawanie były linie nieuporządkowane i bardziej niejednorodne. Należały tu np. sumy dwóch, trzech i większej ilości linii *medial*, *binomial*, *apotome*, *major*, etc. Otrzymujemy wtedy linie, które wymienia Pappus w paragrafie 20 części I: *first trimedial* (otrzymywane jako sumy trzech linii *medial* współmiernych tylko w kwadracie, takich, że prostokąty pomiędzy nimi są *rational*; definicję rekonstruuję przez analogię do definicji linii *first bimedial* z twierdzenia X. 37), second *trimedial* (otrzymywane jako sumy trzech linii *medial* współmiernych tylko w kwadracie, takich, że każde dwie z nich zawierają prostokąt *medial*; por. twierdzenie X. 38), „linia, która jest utworzona z trzech linii prostych niewspółmiernych w kwadracie, takich, że biorąc jedną z nich z dowolną z [pozostałych] dwóch, suma kwadratów na nich jest wymierna, lecz prostokąt zawarty pomiędzy nimi jest *medial*” (powstaje wtedy linia *major*, jak stwierdza Pappus).

Cały czas była stosowana metoda dodawania linii i obszarów. Pappus – za Apolloniuszem – definiuje, na przykład, linię, na której kwadrat jest równy sumie obszaru *medial* i *rational* oraz linię będącą bokiem kwadratu równego sumie dwóch obszarów *medial*. Pokazuje też, że dwie wymienione przed chwilą linie należą do linii *trinomial*, gdyż są równe sumie trzech linii *rational* współmiernych tylko w kwadracie.

Paragraf 20 w części I, potwierdza, że badane były warunki, kiedy opisane operacje nie wyprowadzały poza klasyfikację z X księgi *Elementów*. Pappus podaje co prawda fałszywe twierdzenie o niewymierności pewnej linii *trinomial*[42], co wynika właśnie z braku analizy wspomnianego zagadnienia. Nie może to jednak oznaczać, że linie opisane w *Elementach* odkrył dopiero Euklides, a nie Teajtet, gdyż nazwy linii (np. *first trinomial*) wskazują na znajomość tych linii już przez Teajteta. Także inne fragmenty wskazują, że Apolloniusz pokazywał, iż nowe linie wyprowadzają lub nie wyprowadzają poza klasyfikację Teajteta (Apolloniusz był o całe pokolenie młodszy od Euklidesa – Euklides zmarł ok. 265 r. p.n.e., mniej więcej wtedy, gdy urodził się Apolloniusz (ok. 262 r. p.n.e.)).

W sposób całkowicie analogiczny do badania linii nieuporządkowanych i otrzymywanych przez dodawanie, Apolloniusz musiał badać linie nieuporządkowane otrzymywane w wyniku odejmowania linii i obszarów określonych względem wyróżnionej linii podstawowej. W oparciu o paragraf 23 części I *Komentarza* można ustalić odpowiednie, analogiczne nazwy, definicje linii nieuporządkowanych oraz podstawowe twierdzenia.

Metoda i taki układ treści wskazywałyby, że w zaginionym traktacie Apolloniusza badanie matematyczne opiera się na jednej, wyróżnionej linii podstawowej. Celem traktatu Apolloniusza było zapewne – podobnie jak w X księdze *Elementów* – wykazanie, że ilość linii otrzymywanych przez dodawanie i linii otrzymywanych przez odejmowanie jest nieograniczona[43]. Jest to badanie wzajemnej nieredukowalności arytmetyki i geometrii.

Pappus w podsumowaniu paragrafu 22 części I wyraźnie podaje jako najistotniejszy wniosek, że:

„Złożonych linii tworzonych przez dodawanie jest wobec tego nieskończona ilość."

Po omówieniu w następnym paragrafie linii tworzonych przez odejmowanie Pappus podaje jako najważniejszy ogólny wniosek:

„Nie może być wobec tego żadnego kresu ani dla linii tworzonych przez dodawanie, ani przez odejmowanie. Zmierzają one do nieskończoności, w pierwszym przypadku przez dodawanie, w drugim, przez odejmowanie od linii, która jest odcinana (tj. *annex*[44]). Wydaje się więc, że takie metody jak te [tj. średnia geometryczna, odejmowanie i dodawanie – *Z.K.*] uwidaczniają nieskończoną liczbę wielkości niewymiernych tak, że [ciągła] proporcja nie zanika przy określonej ilości [tj. liczbie] średnich, ani nie kończy się dodawanie złożonych linii, ani odejmowanie nie dochodzi do takiej czy innej granicy. Jak na razie musimy na tym poprzestać, gdy chodzi o naszą wiedzę o wielkościach wymiernych".

Z tego widać, że Teajtet musiał znać już wszystkie rodzaje linii z X księgi *Elementów*, a dopiero później badano, czy ilość linii otrzymywanych innymi metodami, tj. przy użyciu różnych rodzajów średnich, jest także nieograniczona. Potwierdza to wariant N_1.

Zatem, jeśli Euklides dodał nowe rodzaje linii, to najprawdopodobniej były to linie związane z podziałem linii i figur w określonych, nowych rodzajach proporcji. Wiemy przecież, że już Apolloniusz badał różne rodzaje proporcji i interesował się tymi zagadnieniami właśnie w związku z klasyfikacją linii niewymiernych. Badania te były kontynuowane przez Eudoksosa.

Cel badań Teajteta, Euklidesa, Apolloniusza i Eudoksosa stanie się jeszcze bardziej wyrazisty po przedstawieniu schematu rozwoju starożytnych teorii proporcji; por. Z. Król: *Wstęp do starożytnych teorii ...* .

III. UWAGI KOŃCOWE

Tradycyjnie przyjmowany schemat rozwoju geometrii, zgodnie z którym geometria euklidesowa rozwijała się jako teoria oparta na względnie niezmiennym zestawie podstawowych intuicji, takich jak nieskończona przestrzeń „euklidesowa", intuicja *continuum* i intuicje metryczne[45], a pierwszą rewolucyjną zmianą było odkrycie w XIX w. geometrii nieeuklidesowych – jest nie do utrzymania.

Geometria – jak dodatkowo potwierdzają wczesne teorie proporcji – na samym początku musiała obejść się bez współczesnej bazy intuicyjnej i pierwotnie była geometrią konstruktywną. „Platońska" przestrzeń nieskończona jako „arena" dla uprawiania geometrii, gdzie wszystkie miejsca są już „gotowe" i wystarczy je odkryć i opisać, pojawiła się znacznie później[46]. Ta zmiana intuicyjnego modelu dla geometrii umożliwiła powstanie mechaniki Newtona opartej właśnie na pojęciu absolutnej i nieskończonej przestrzeni euklidesowej. Ten „platonizm" geometrii kształtował się stopniowo, a pierwszymi jego metodycznymi przejawami było uświadomienie sobie możliwości operowania pojęciami o nieskończonych zakresach.

Współcześnie nikogo nie dziwi mówienie o dowolnych zbiorach punktów, czy wszystkich liczbach naturalnych (czyli o zbiorze N). Analizujemy także bez problemów całości złożone z wszystkich linii *medial*, *apotome* itp. Analiza klasyfikacji linii niewymiernych Teajteta uświadamia starożytne ograniczenia w operowaniu takimi pojęciami, a pierwszy, bardzo powolny po pierwotnej „rewolucji" Teajteta i Platona, przełom stanowi nabywanie zdolności do operowania pojęciami infinitarnymi. Już Pappus formułuje szereg nowych, nieznanych twierdzeń opisujących własności linii niewymiernych, właśnie dzięki – niezauważonej do tej pory przez komentatorów – oczywistości, z jaką operuje on całościami linii sklasyfikowanych w *Elementach*.

Wskazane w tekście różnice pomiędzy matematyką starożytną i dzisiejszą, pokazują od strony rzeczowej na widoczną w wielu miejscach nieprzydatność matematyki współczesnej do eksplikacji zamierzeń matematyków starożytnych. Matematyka starożytna miała swoje własne środki i sposoby wyrazu, a powszechne „stosowanie" współczesnych metod przez komentatorów i historyków matematyki, jak na przykład użycie współczesnego pojęcia pierwiastka liczbowego, czy teorii liczb niewymiernych, uniemożliwia w wielu miejscach zrozumienie matematyki dawnej. Przekonanie, że matematyka starożytna daje się „zanurzyć" w pewnych współczesnych teoriach matematycznych, opiera się na ukrytym założeniu kumulatywnego modelu rozwoju wiedzy matematycznej. Tylko „zawieszenie" obowiązywania tego, co wiemy współcześnie, umożliwia pełne uzmysłowienie sobie przed jakimi rzeczywiście problemami stał matematyk starożytny. Wtedy konieczne – i możliwe – jest dokonanie rekonstrukcji horyzontu hermeneutycznego matematyki starożytnej i staje się możliwe nowe odczytanie *Elementów*.

Przypisy

[1] P a p p u s : *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt. (Collectio)*. 3 vol. Ed. Fredericus Hultsch. Leipzig 1875–78 (Berlin 1876–78). Paul V e r E e c k e : *Pappus d'Alexandrie: La Collection Mathématique*. 2 vol. Paris 1933 (reissued: Paris 1982) jest jedynym przekładem całości *Synagoge* na język nowożytny (tłumaczenie angielskie księgi VII – P a p p u s : *Book 7 of the Collection*. 2 vol. Ed. and trans. by Alexander Jones. Springer. New York 1986 – zawiera angielskie tłumaczenie „Treasury of Analysis"). Dla celów porównawczych związanych z niniejszą pracą najważniejsza jest księga III *Collectio*, omawiająca zagadnienie konstrukcji różnych średnich matematycznych, oraz pewne partie księgi VII.

[2] Z uwagi na różnice stylu i w zaawansowaniu matematycznym *Komentarza* w porównaniu z *Collectio*, powątpiewa się czasem w autentyczność Komentarza. Jednakże wzmianki o istnieniu *Komentarza do X księgi „Elementów"* u Proklosa i Eutocjusza są jednoznaczne.

[3] W tej samej bibliotece znajduje się manuskrypt (MS. 7377 A, fol. 68–70b) zawierający łacińskie tłumaczenie początkowych 11 paragrafów części pierwszej komentarza Pappusa. Autorem tego przekładu jest najprawdopodobniej Gerhard z Cremony.

[4] Franz W o e p c k e : *Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationelles d'aprés des indications tirées d'un manuscrit arabe. Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut impérial de France*, „Sciences Mathématiques et Physiques", Paris 1856 Tome XIV, (pracy tej nie udało mi się zdobyć).

[5] Heinrich S u t e r: *Der Kommentar des Pappus zum X. Buche des Euklides*, „Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin" Heft IV, s. 9–78, Erlangen 1922.

[6] William T h o m s o n: *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements. Arabic Text and Translation by William Thomson with Introductory Remarks, Notes, and a Glossary of Technical Terms by Gustav Junge and William Thomson.* Harvard Semitic Series, vol. VIII. Cambridge, London 1930.

[7] Uzyskane wyniki są częściowo opublikowane w mojej książce Zbigniew K r ó l: *Platon i podstawy matematyki współczesnej. Pojęcie liczby u Platona.* Złotoria k. Torunia 2005.

[8] Por. Zbigniew K r ó l: *Intuicja i hermeneutyka: analiza intuicyjnego pojęcia wielościanu.* „Zagadnienia Naukoznawstwa", 2006, 2 (w druku).

[9] Podobnie stwierdzają wydawcy tekstu angielskiego *Komentarza* w uwagach dotyczących rozszerzenia przez Apolloniusza z Pergi klasyfikacji z X księgi *Elementów*. Wydawcy uznają nowe twierdzenia Apolloniusza za „sztukę dla sztuki"; por. np. W. T h o m s o n, dz.cyt. s. 26 (niemieckojęzyczny wstęp autorstwa G. J u n g e). W części drugiej podam powody rozszerzania klasyfikacji przez innych matematyków, w tym Apolloniusza.

[10] W części czwartej księgi III *Collectio* Pappus pokazuje, że każdy wielościan foremny da się wpisać w kulę.

[11] Por. Z. K r ó l: *Wstęp do starożytnych teorii proporcji.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki", 2007, 1 (w druku), a także *Wstęp.* [W:] Z. K r ó l, *Platon i podstawy matematyki ...*, dz.cyt.

[12] P r o c l u s: *Procli Diadochi in Primum Elementorum Librum Commentarii.* Ed. Georg F r i e d l e i n. Leipzig 1873 (repr. G. Olms, Hildesheim 1967).

[13] W tej sprawie zob. także Zbigniew K r ó l: *Intuicja i hermeneutyka ...* dz.cyt..

[14] Konrad G a i s e r: *Platons ungeschriebene Lehre. Studien zur systematischen und geschichtlischen Begründung der Wissenschaften in der Platonischen Schule.* Stuttgard 1963 (wyd. II 1968).

[15] W języku polskim odsyłam do książki Seweryna B l a n d z i e g o: *Platoński projekt filozofii pierwszej.* Studia z Filozofii Systematycznej, t. 3. Warszawa 2002. Tam też dalsza bibliografia.

[16] Tj. do zdania: „[Podobne, równe i spoczynek] przyczyniają się do [lub: skierowują się ku] skończoności; podczas gdy niepodobne, nierówne i ruch przyczyniają się do [lub: skierowują się do] nieskończoności."

[17] Por. Z. K r ó l: *Platon i podstawy...* dz.cyt., s. 86.

[18] Tamże, s. 71–81.

[19] Thomson w przypisie 35 do I części *Komentarza* podsumowuje istotę wywodów Pappusa, wyjaśniającego cel hipotezy I w *Parmenidesie*: "That is, the three [tj. *równe* (uczestniczące w Jedności) oraz *większe* i *mniejsze* (obydwa uczestniczące w Diadzie)] ideas are different."

[20] Dopisek w nawiasie pochodzi od Thomsona.

[21] W. Thomson w przypisie nr 38 stwierdza, że „The Arabic phrase translated, »With respect to greatness and smallness«, renders the Greek, »κατὰ τὸ μηιξον καὶ ἔλαττον«".

[22] Thomson pisze w swoim komentarzu (odnośnie do zdania: "... the incommensurability of matter is necessary for the coming into existence of these things, the potentiality (or power) of incommensurability is found in them ..."): „Matter is here conceived of Platonically. It is the *Indefinite Dyad* (cf. Arist. Metaph., 1081a. 14; cf. also 1083b., 34), or *The Great and Small* (Cf. Arist. Metaph., 987b. 20; cf. also 1085a. 90), which as the material principle of sensibles is, as the Timaeus clearly enough says (52a.), space not yet determined by any particular figure and capable of indefinite increase and indefinite diminution."

[23] Żaden współczesny komentator nie zauważa tej sprawy!

[24] Por. argumentację z rozdz. VIII (opartą na arytmetycznych wywodach rozdz. VII) w Wilbur Richard Knorr: *The Evolution of Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Synthese Historical Library. Texts and Studies in the History of Logic and Philosophy, vol. 15. Dordrecht – Holland / Boston – U.S.A. 1975, a także moją argumentację w sprawie teorii proporcji P_5 Teajteta [W:] Z. Król: *Wstęp do starożytnych teorii...* dz.cyt.

[25] Takie, nieliczące się ze świadectwami historycznymi stanowisko reprezentuje np. Á. Szabó; por. Árpád Szabó: *The Beginnings of Greek Mathematics*. Budapest 1978. Sprawa jest kuriozalna, gdyż Szabó formułuje swój wniosek na podstawie filologicznej analizy źródeł, w wyniku której dochodzi do wniosku, że nie można wierzyć tym źródłom. Jest to rodzaj „filologicznej antynomii", ponieważ nie zostaje wtedy nic, żeby uzasadnić głoszoną tezę.

[26] Należą tu przede wszystkim prace W. R. Knorra (np. W. R. Knorr, dz.cyt.) i O. Beckera (por. np. Oskar Becker: *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene*. „Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung", 1927, 8, s. 539–809). Do tej samej grupy należą też cytowani już wydawcy i komentatorzy dzieła Pappusa, wraz z Heibergiem i T. Heathem.

[27] Tego zdania jest np. B. L. Van der Waerden; por. Bartel Leendert Van Der Waerden: *Science Awakening*. Tłum. ang. A. Dresden. Groningen, Holland 1954.

[28] Dzieło to musiało więc zawierać zasady porównywania kątów w ramach starożytnych teorii proporcji (zob. Z. Król: *Wstęp do starożytnych teorii*....) i mogło zmierzać do ujęcia w ramach teorii proporcji Eudoksosa wielkości niearchimedesowych (np. kątów rogowych). Łatwo można obmyślić konieczne definicje i twierdzenia potrzebne dla wykazania, że kąty są wielkościami archimedesowymi, i ustalić zasady ich porównywania.

[29] Suter i Thomson zauważają, że w zdaniu tym brakuje wzmianki o średniej arytmetycznej, co wynika z błędu kopisty lub przeoczenia samego Pappusa; por. W. Thomson, dz.cyt. s. 173, odnośnik 107 (H. Suter, dz.cyt. odnośnik 191).

[30] Zob. Z. Król: *Wstęp do starożytnych teorii...* dz.cyt.

[31] Rozważenie tego zagadnienia – nie przedstawiam tutaj stosunkowo łatwych do odtworzenia wyników – potwierdza wariant N_1.

[32] Są to twierdzenia pokazujące, że **każda** z linii obecnych w X księdze da się otrzymać jako odpowiednia średnia. Na przykład „jeżeli weźmiemy średnią arytmetyczną pomiędzy dwoma liniami *medial* i współmiernymi [tylko – *Z.K.*] w kwadracie i zawierającymi prostokąt *rational*, dana linia jest *first bimedial*" (por. par. 18, część II).

[33] Por. W. R. Knorr, dz.cyt. rozdział VIII.

[34] Por. s. 273–275 u Knorra. Knorr opiera się głównie na wzmiankach u Proklosa, że Eudoksos dodał do trzech proporcji następne ich trzy rodzaje (por. P r o c l u s : *In Euclidem* ... dz.cyt., s. 67) oraz na świadectwie, że Hermotimos z Kolofonu rozwinął badania Teajteta i Eudoksosa (tamże, s. 67–68). Nie wiadomo jednak o jakie badania chodzi, a wiemy, że Teajtet i Eudoksos pracowali też w dziedzinie arytmetyki.

[35] O jakiego rodzaju nowe średnie chodzi, znakomicie wyjaśnia W. R. K n o r r ; dz.cyt., s. 274–277. Knorr stwierdza jednak, że wyniki, jakie mógł uzyskać Eudoksos posługując się trzema nowymi średnimi byłyby całkowicie poboczne i niewiele wnoszące do teorii wielkości niewspółmiernych. Sam fakt, że Eudoksos wprowadził trzy nowe średnie wskazuje jednak z wielkim prawdopodobieństwem, iż prowadził jednak badania nad niewspółmiernością. Najważniejsze jest jednak, że badania związane z trzema nowymi średnimi nie znalazły się w korpusie X księgi *Elementów* i były nieistotne dla jej zawartości. Poszukiwanie nowych rodzajów średnich matematycznych w czasach Eudoksosa wskazuje także na wtórność metody definiowania linii niewymiernych poprzez średnie, w stosunku do pierwotnej teorii Teajteta.

[36] Por. P r o c l u s , dz.cyt. s. 67.6: περὶ τὴν τομήν. Trwa dyskusja, czy przez „podziały" należy tu rozumieć przekroje stożka, czy – na przykład – podziały linii, takie jak w przypadku podziału, powiedzmy, linii *binomial* na dwie określające ją linie. W tym ostatnim przypadku mielibyśmy argument, że Eudoksos pracował nad teorią wielkości niewymiernych. Bibliografię w tej kwestii podaje Knorr w odnośniku 68, s. 294. Moim zdaniem można ustalić o jakie „podziały" mogło chodzić na podstawie dziełka Euklidesa *O podziałach figur* (zachowane tylko w języku arabskim; por. też dzieło Herona o tym tytule). Nie musiały to być zatem podziały związane z klasyfikacją linii niewymiernych, chociaż były związane z teorią proporcji. Inne wyjaśnienie nasuwa – rozpatrywany poniżej – wariant N_3b i badania Apolloniusza.

[37] Knorr pokazuje w swojej książce jak tego dokonać; por. s. 236–238.

[38] Tamże, s. 237.

[39] Por. twierdzenia X. 39 – 41.

[40] Knorr zauważa w zasadzie tylko odpowiednik twierdzenia z dialogu *Teajtet*: „Niech będą dane dwie linie A, B i dwie liczby *c*, *d*, wtedy jeśli $A : B = c : d$, [to] $A\_3 : B\_3 = c\_3 : d\_3$, i na odwrót." (por. W. R. K n o r r : dz.cyt., s. 252).

[41] Warto zaznaczyć, że tekst arabski dopuszcza w przekładzie paragrafu 12 księgi II użycie słowa „podobieństwo" zamiast „przeciwieństwo"; por. W. T h o m s o n : dz.cyt., s. 131 i odnośnik 71. Pozostaje to jednak w sprzeczności z pozostałym tekstem: § 19, 22, 23, część II.

[42] Por. W. T h o m s o n : dz.cyt., przypis 169, punkt b) na stronie 113.

[43] Cel ten jest niewidoczny dla wydawców *Komentarza*, którzy uważają, że Apolloniusz bez widocznej potrzeby mnożył jakieś „algebrogeometryczne" własności; por. np. uwagi G. Junge we wstępie do angielskiego przekładu dzieła Pappusa.

[44] *Apotome* jest tworzona jako różnica $a - b$ dwóch linii *rational* współmiernych tylko w kwadracie. Linia odejmowana (*b*) to tzw. *annex*.

[45] W sprawie trudności związanych z używaniem pojęć metrycznych por. Z. K r ó l : *Wstęp do starożytnych teorii*... dz.cyt.

[46] Por. Z. K r ó l : *Intuicja i hermeneutyka* ...dz.cyt.

Recenzent: *doc. dr hab. Krzysztof Maślanka*

Zbigniew Król

ANCIENT GEOMETRY AND PLATO'S PHILOSOPHY ON THE BASE OF 'PAPPUS' COMMENT ON THE X^{TH} BOOK OF 'ELEMENTS' OF EUCLID'.

The article is treating of a new interpretation of ancient geometry (part I) and is willing to explain several mathematical and historical conceptions that were presented in *Pappus' Comment on the X^{th} Book of 'Elements' of Euclid* (part II). Euclid's *Elements* were a kind of 'intuitive model', quite different from the contemporary one. Elements were divested of the 'infinite space' notion. Reconstruction of the hermeneutic horizon of the ancient mathematics lets us explain structure and mathematics presented in the columns of the X^{th} book of *Elements*.

The following subjects were handled:

1. reasons for elimination of the Euclid's 'infinite space' notion and substituting it for Plato's Diad in ancient times,
2. basing geometry and searches over the incommensurable magnitudes on one distinguished line together with mathematical consequences,
3. differences in the way of thinking of ancient and contemporary mathematician.

Scientific studies let qualify from the historical point of view the share in development of the incommensurable magnitudes theories presented by Theaetetus of Athens, Apollonius of Perga, Euclid and Eudoxus. In the article there is also presented a reconstruction of the mathematical contents of the lost Apollonius' treatise on incommensurable magnitudes. A traditionally established pattern of the development of geometry, according to which Euclidean geometry used to extend as theory basing on relatively unalterable outfit of the fundamental intuition as, for instance, Euclid's infinite space, continuum intuitions and metric intuitions (what important, the first revolutionary change was a discovery of non – Euclidean geometry in the XIX^{th} century) – cannot be sustained.