Król, Zbigniew

Wstęp do starożytnych teorii proporcji

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 52/1, 77-96

2007

Zbigniew Król
Zakład Teorii Poznania i Filozofii Nauki
Instytut Filozofii i Socjologii PAN
Warszawa

WSTĘP DO STAROŻYTNYCH TEORII PROPORCJI

Starożytne teorie proporcji są przedmiotem badań od wielu lat, a nawet wieków. Nie da się zrozumieć matematyki starożytnej Grecji bez zrozumienia teorii proporcji. Rekonstrukcja dawnych teorii proporcji pokazuje ponadto z całą jaskrawością odmienność sposobu myślenia współczesnych matematyków i skutkuje w ścisłym opisie różnic pomiędzy matematyką starożytną a dzisiejszą[1].

Duża ilość zachowanych fragmentów dzieł filozoficznych, np. pitagorejczyków, Platona, Arystotelesa, nawiązuje do teorii proporcji i do sytuacji w matematyce swych czasów. Można nawet powiedzieć więcej: to teksty filozoficzne często oparte są na określonych wynikach badania matematycznego. Znajomość ich jest więc częstokroć warunkiem *sine qua non* rozumienia tych tekstów filozoficznych.

Tymczasem, przeważnie w polskiej literaturze przedmiotu, analizuje się fragmenty, np. pitagorejskie, bez żadnych odniesień do stanu badań matematycznych. Przykładem mogą być analizy filozofii Archytasa z Tarentu czy Filolaosa, gdzie stwierdzenia posiadające ścisłe, matematyczne znaczenie traktuje się jako filozoficzne ogólniki. Zapomina się, że Archytas jest autorem księgi VIII *Elementów* i jednej z teorii proporcji, a nie tylko kilku, tzw. fragmentów.

Na podstawie tekstu *Elementów* rekonstruuje się teorie starożytnych matematyków. Dlatego za głównych autorów niektórych ksiąg lub pewnych partii tekstu uznaje się konkretnych matematyków. Na przykład O. Becker zrekonstruował

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 52: 2007 nr 1 s. 77–96

najstarszą grecką teorię matematyczną (archaiczna, pitagorejska „arytmetyka Beckera"), zawierającą naukę o parzystości i nieparzystości, z końcowych fragmentów księgi IX (twierdzenia IX. 21–34 i IX. 36)[2]. Podobnie wiemy, że księga VII zawiera teorię proporcji Teajteta, VIII – Archytasa. Ogólnie mówiąc: teorie arytmetyczne pitagorejczyków rekonstruujemy z ksiąg VII, VIII i IX.

Elementy zawierają aż 6 różnych teorii proporcji[3] (powszechnie przyjmuje się, że 4). Księga VI jest wcześniejsza niż księga V, autorstwa Eudoksosa – wszystkie twierdzenia VI księgi można uzyskać bez księgi V, w tym można dowieść czysto geometryczny analogat twierdzenia V. 13.

Odkrycie niewspółmierności uniemożliwiło wprowadzenie „jednej" matematyki, tzn. matematyki, która w jednolity sposób opisywałaby rzeczywistość geometryczną i arytmetyczną. Oznacza to, że geometria Greków nie była metryczna. Dążenie do jednolitej teorii opisującej zarówno wielkości liczbowe, jak i przestrzenne trwało całą starożytność. Teoria wielkości Eudoksosa też taką nie była (tj. umożliwiającą wprowadzenie metryki, pozwalającej mówić o długości np. boku trójkąta jako o wielkości liczbowej), gdyż nie obejmowała np. wielkości niearchimedesowych: kątów rogowych (znane Euklidesowi; por. twierdzenie III. 16).

Grecy nie byli w stanie mówić o długości boku, czy polu powierzchni jako o liczbie i mieli problem w ogóle z jakąkolwiek miarą, oraz z porównywaniem wielkości, a nie tylko z miarą jako liczbą. Z tego powodu nieprawdziwe jest przekonanie wyrażone w zdaniu:

„Z intuicyjnego punktu widzenia, »równość« to dla Euklidesa »równość miary«: odcinki są równe, jeśli są równej długości, kąty są równe, jeśli mają równe miary, wielokąty są równe, jeśli mają równe pola."

Problem z *Elementami* polega właśnie na różnicy w tych „intuicjach": współczesnych i starożytnych. Geometria Hilberta nie jest w żadnym razie jedynie uściśleniem („łataniem dziur") i poprawnym opisem jednej i niezmiennej idei przestrzeni euklidesowej. Pojęcie to w ogóle nie występuje w *Elementach*. Dotyczy to także przypadków, w których stwierdza się występowanie takich pojęć, np. w twierdzeniu I. 12. Dodajmy także: definicji I. 23, postulacie I. 5, twierdzeniach I. 22, I. 29. Wszędzie tam jest mowa – jak tłumaczy Proklos[4] [158, 6; 286, 7–8] – o przedłużaniu danej linii, tak aby konstrukcja była możliwa. Intuicyjne pojęcia np. prostej nieskończonej były znane Grekom[5], ale z tekstu *Elementów* zostały wyeliminowane. Dlatego w *Elementach* jest mowa np. o „przedłużaniu" – na mocy postulatu I. 2 – danej, czyli już skonstruowanej uprzednio linii, albo „w jednym kierunku" (por. twierdzenia I. 5, 14, 16, 17, 20, 21, 27, 29, 31, 32, albo w dwóch (np. I. 37, 38). Konstrukcja zawsze kończy się wytworzeniem konkretnej, skończonej linii.

Klasyfikację linii, którą – jak w kanonie architektonicznym – można otrzymać przy pomocy cyrkla i liniału z jednej absolutnie wyróżnionej linii, zawiera X księga. Linia ta odpowiada „linii niepodzielnej" u Platona. Związki Platona z *Elementami* to oddzielny temat. To Platon wymyślił zawężenie dozwolonych konstrukcji do cyrkla i liniału (por. np. P r o k l o s : *In Euclidem* ..., s. 66, 3) – czyli wpłynął na sformułowanie postulatów z ks. I. Inny ślad tego typu to związki Platońskiego *Teajteta* z X księgą etc.

Uwzględnienie związków I księgi z Platonem i dyskusjami filozoficznymi (np. z eleatami) pozwala odczytać definicje z tej księgi jako pełne konkretnej treści stwierdzenia, a nie jedynie jako dziwny wyraz niejasnych intuicji i skojarzeń (por. np. prace Á. Szabó odnośnie wątków eleackich). Podobnie, istnieją związki z „równoważnością przez rozkład", dziełem Euklidesa *O podziałach figur* i, na przykład *Timajosem* Platona. Dowód Apolloniusza aksjomatu I. 1, też wiąże się z „diadycznością" starszych ksiąg *Elementów*[6].

1. WCZESNE TEORIE PROPORCJI: TEORIA PROPORCJI P_1

P_1 to oznaczenie umowne. W rzeczywistości nie jest to jedna teoria proporcji, lecz cały konglomerat różnych zagadnień związanych z teorią proporcji i wielkości proporcjonalnych we wczesnej fazie rozwoju matematyki greckiej. Najogólniej mówiąc, wczesne rozważania o wielkościach proporcjonalnych charakteryzuje naiwne metryczne podejście.

Matematyka przed Euklidesem nie była monolityczną strukturą. Istniało wiele różnych teorii matematycznych, kilka różnych geometrii „euklidesowych". Dwie z nich rekonstruuję w swojej książce *Platon i podstawy matematyki współczesnej. Pojęcie liczby u Platona.* Inne warianty geometrii dotyczą posługiwania się wielkościami nieskończonymi i (zmiennym) kanonem dozwolonych metod konstrukcji, a także posługiwania się różnymi aksjomatykami. Informacje o tym są zawarte w *Komentarzu do I księgi „Elementów" Proklosa.*

Różnymi teoriami matematycznymi były, na przykład, *arytmetyka psephoi* (sztuka liczenia na liczbach przedstawianych za pomocą kropek, kamyczków itp. wielkości nieciągłych) i algebra geometryczna, która z czasem wyparła dyskretne przedstawiania liczb.

W. R. Knorr (dz.cyt., s. 6–8) wyróżnia dwa podejścia: „topologiczne" (księgi I, III i VI *Elementów*) oraz *naive metrical approach* (w księgach II, IV, X, XIII i w części księgi VI; mój termin oznacza co innego). *Naive metrical aproach* jest – zdaniem Knorra – podejściem późniejszym, pojawiającym się w czasach Teodora.

Wcześniejsze podejście topologiczne jest charakterystyczne dla matematyki jońskiej, a – wedle Knorra – swoje apogeum osiąga w matematyce Hippokratesa z Chios, któremu możemy[7] przypisać organizację ksiąg I, III oraz części materiału z ksiąg VI i XII (miara koła). Wzajemne relacje pomiędzy obydwoma podejściami omawia Knorr na stronach 7–8. Księga VI jest oparta na intuicyjnym pojęciu proporcji geometrycznej.

Moim zdaniem rzeczywisty rozwój matematyki greckiej przebiegał według innego schematu, którego świadectwem są teorie proporcji P_1 – P_6.

Do czasu odkrycia niewspółmierności matematycy twierdzili, że „wszystko jest liczbą". W szczególności liczby były cielesne i posiadały rozciągłość przestrzenną (por. np. Ekfantos). Oznaczało to, że także odcinki (linie) geometryczne były opisywane przez liczby. Przypominam, że liczba dla Greka to tyle, co nasza liczba naturalna większa od dwóch.

Odkrycie niewspółmierności było w starożytności dlatego tak wstrząsające, że pokazano, iż jeśli bok kwadratu jest liczbą, to przekątnej nie opisuje żadna liczba. Gdyby przekątna była jakąś liczbą, to ta liczba musiałaby być równocześnie liczbą parzystą i nieparzystą. Nie wszystko jest liczbą – oto, co pokazywał dowód niewspółmierności. Z matematycznego punktu widzenia oznaczało to wzajemną nieredukowalność geometrii i arytmetyki. Pierwotnie pitagorejczycy nie oddzielali rozważań liczbowych i geometrycznych.

Jeśli zgodzimy się, że odkrycie niewspółmierności musiało mieć miejsce pomiędzy ok. 460–430 r. p.n.e., to naturalne wydaje się przyjęcie, że podejście topologiczne w sensie Knorra było wcześniejsze niż jego *naive metrical approach*. Sama konstrukcja dowodu niewspółmierności zakłada takie podejście jako znane wcześniej i „obalone" przez ten dowód.

Z drugiej strony, znamy także wiele rezultatów i problematów związanych z pojęciem proporcji oraz podstawowych jej własności. Należą do nich rozważania o księżycach Hippokratesa czy problem podwojenia sześcianu i – przypisywana także Hippokratesowi – jego redukcja do problemu znajdowania dwóch średnich proporcjonalnych do danych linii. P_1 zawiera więc wczesną teorię proporcji wielkości geometrycznych i liczbowych.

Badania Hippokratesa potwierdzają istnienie wczesnej teorii proporcji wielkości geometrycznych. Wskazuje na to również obecność takich pojęć jak średnia arytmetyczna, harmoniczna, „złoty podział"[8] itp. P_1 świadczy także o istnieniu problematyki i fragmentów teorii proporcji liczbowych.

Wydaje się naturalne wyróżnienie dwóch faz w rozwoju teorii proporcji P_1:

1. Faza I. Teoria proporcji była tworzona jako jedna teoria proporcji zarówno liczbowych jak i geometrycznych. Motywowana była także zagadnieniami muzycznymi. Faza ta dotyczy problematyki matematycznej teorii proporcji w czasach przed odkryciem niewspółmierności. Istnieje tradycja przypisująca znajomość trzech głównych proporcji (arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej) już Pitagorasowi[9]. (Wydaje się konieczne dokładniejsze zbadanie tej fazy, co odkładam do innej pracy.)
2. Faza II. Po odkryciu niewspółmierności teoria proporcji P_1 najprawdopodobniej podzieliła się na dwa oddzielne nurty rozważań: P_1a i P_1b. Pierwszy z nich zawierał wczesne teorie arytmetyczne i zaczątki teorii proporcji liczbowych[10]. Drugi natomiast dotyczył proporcji geometrycznych,

a zakres ich badania wytyczały bieżące potrzeby matematyczne, związane z rozwiązywaniem konkretnych problemów (np. problemu delijskiego).

Na rzecz istnienia P_1a świadczy wiele faktów[11]. Są to, na przykład, równoległe prowadzenie badań nad algebrą geometryczna i teorią liczb, fakt istnienia geometrycznych i arytmetycznych wersji wielu twierdzeń[12], w tym twierdzenia Pitagorasa, pojęcie „liczb podobnych" i analiza związanych z nimi zagadnień, a także szereg twierdzeń należących do wczesnej arytmetyki pitagorejskiej, np. IX. 30[13]. Także twierdzenia dotyczące tzw. gnomicznych podziałów liczb w arytmetyce kamyczków (*psephoi*[14]), czy tzw. trójek pitagorejskich[15] oraz twierdzenia o podzielności[16] należą do P_1a. Harmonika starożytna musiała być oparta na informacjach, które ściśle opisała dopiero teoria proporcji Teajteta P_5 – wskazują na to nawet nazwy interwałów muzycznych i pojęcie diastemy (por. np. Á. Szabó, dz.cyt., *Part II*).

Głównym reprezentantem P_1b był Hippokrates z Chios. Na podstawie przekazów dotyczących jego prac matematycznych, a zwłaszcza o pochodzących od Simplikiosa informacji o kwadraturze księżyców[17], wiemy, że Hippokrates znał np. twierdzenia I. 47, II. 12, 13, a także jakąś wersję twierdzenia XII. 2.Wskazuje to na znajomość części problematyki z ksiąg I, II i VI *Elementów* Euklidesa. Od Proklosa (por. 213.3 – 11) wiemy natomiast, że Hippokrates zredukował problem podwojenia sześcianu (tzw. problem delijski) do zagadnienia znajdowania dwóch średnich geometrycznych do danych linii. Simplikios przytacza także definicję wielkości proporcjonalnych Hippokratesa:

> „podobne obszary są takimi samymi częściami odpowiadających kół; na przykład, półkole jest podobne do półkola i trzecia część koła do trzeciej części."

Definicja powyższa jest oparta raczej na pewnych intuicjach, niż na dojrzałej teorii proporcji (por. W. R. Knorr, dz.cyt. s. 41 i przypis 62)[18]. W każdym razie – możliwe było uzyskanie szeregu twierdzeń z tzw. algebry geometrycznej i teorii podobieństwa. Algebra geometryczna (zwłaszcza z księgi II *Elementów*) służyła także do porównywania i badania związków pomiędzy własnościami arytmetycznymi i geometrycznymi. Algebra geometryczna i teoria podobieństwa (księga VI) są oparte na niesprecyzowanych intuicjach metrycznych. Uściślenie intuicji, na których oparta jest księga VI *Elementów* stało się możliwe dopiero w ramach P_5 i P_6.

Proklos (dz.cyt. s. 176, 186), opierając się na *Historii geometrii* Eudemosa, przypisuje tzw. metodę stosowania obszarów (do danej linii), która jest podstawą algebry geometrycznej, już pitagorejczykom. Na pewno jednak tylko niektóre zagadnienia z ksiąg II i VI były znane wczesnym pitagorejczykom, tj. przed czasami Teodora i Archytasa. W czasach Hippokratesa na pewno znano sporą część teorii podobieństwa trójkątów[19].

Intuicyjnie metryczne podejście zakłada możliwość porównywania wielkości geometrycznych. Podstawową trudność w takim podejściu stanowi brak wspólnej jednostki miary porównywanych wielkości geometrycznych, gdyż są one często niewspółmierne. Tak więc to, co jest oczywiste dla każdego współczesnego ucznia, tzn. że wielkości geometryczne – na przykład linie – można nie tylko porównywać, ale także *dobrze uporządkować*, było w starożytności właśnie problematyczne i nieoczywiste po odkryciu niewspółmierności. Ten fakt spowodował badanie problemu niewspółmierności i poświadczony jest wzajemnymi związkami matematycznej natury pomiędzy teoriami proporcji i klasyfikacją wielkości niewspółmiernych. Knorr, wskazuje na przykład na związek algebry geometrycznej z II księgi *Elementów* z badaniami Teodora nad niewymiernościami[20].

Omówienie wszystkich przekazów historycznych, jakie posiadamy odnośnie wczesnych teorii proporcji, przerasta ramy obecnej pracy.

2. TEORIE PROPORCJI LICZBOWYCH MOTYWOWANE BADANIAMI NAD NIEWYMIERNOŚCIĄ: P_2 I P_3

Po wkroczeniu P_1 w fazę II, teorie proporcji P_2 i P_3 są kolejnymi wariantami rozwojowymi teorii P_1a. Są to teorie proporcji liczbowych. P_2 jest teorią proporcji liczbowych Archytasa (zdaniem Van Der Waerdena), której wykład zawiera głównie księga VIII *Elementów* Euklidesa. P_3 natomiast jest teorią proporcji liczbowych zawartą w księdze VII *Elementów*, a jej autorem jest najprawdopodobiej Teajtet z Aten[21].

W teoriach tych porównywane mogą być tylko liczby. W teorii P_3 możliwa jest zamiana miejscami terminów:

jeśli $a : b = c : d$, gdzie a, b, c, d są liczbami, to (twierdzenie VII. 13), to $a : c = b : d$.

Teorie te powstawały dla rozważenia określonych problemów matematycznych. Na przykład P_3 stanowi podbudowę teoretyczną dla podziału wielkości geometrycznych na wielkości odpowiadające liczbom kwadratowym i sześciennym w części dotyczącej własności arytmetycznych odpowiednich liczb.

Związek teorii proporcji P_2 i P_3 z klasyfikacją wielkości niewymiernych znakomicie omawia W. R. Knorr[22].

Wzajemne zależności pomiędzy tymi teoriami i ich własności matematyczne są stosunkowo dobrze zbadane. Konieczne jest jednak zbadanie związków zwłaszcza pomiędzy teorią P_3 i nową teorią P_5. Dodatkowym problemem jest sprawa zależności logicznych pomiędzy P_2 i P_3, przy zachowaniu pierwszeństwa czasowego P_2 w stosunku do P_3: wyjaśnienia wymaga matematyczna zależność P_2 od P_3.

Ogólnie można stwierdzić, że P_2 opiera się na intuicyjnym zastosowaniu pojęcia proporcji Hipokratesa do liczb. Pojęcie to zostało natomiast ściśle zdefiniowane dla potrzeb arytmetyki w ramach P_3 (por. definicja VII. 20).

Dodatkową motywacją dla badań w ramach P_2 były problemy harmoniki muzycznej. Zdaniem Á. Szabó, dz.cyt. (*passim*), odkrycie niewymierności było spowodowane badaniami nad podziałem tzw. kanonu w muzyce. Badania te musiały być prowadzone początkowo w obrębie P_1. Z kolei, spora część materiału z tzw. *Sectio Canonis* (i *De Institutione Musica* Boecjusza), dotyczy badań muzycznych w ramach P_2[23]. Zachowane fragmenty dzieła Archytasa, np. u Porfiriusza (*In Ptolemaei Harmonica*, s. 267 (Diels)), zostały zebrane i zatytułowane przez Dielsa jako *Traktat o harmonii*. Zawierają one podobne definicje odpowiednich średnich matematycznych, co *Timajos* Platona (por. 31c – 32a, 36a–b)[24]. Badania motywowane muzyką wiążą się także z następną teorią proporcji: P_4.

3. TEORIA PROPORCJI WIELKOŚCI CZYSTO-GEOMETRYCZNYCH: P_4

Jest to teoria proporcji wielkości geometrycznych, jaką zawiera głównie księga VI *Elementów*. W teorii tej porównujemy tylko wielkości geometryczne takie jak odcinki, odcinki i figury płaskie, figury płaskie itp.

Systematycznie tworzył ją Teajtet z Aten. Teoria ta, niezależna od księgi V *Elementów*, została zrekonstruowana w cytowanych pracach Töplitza, Beckera i Van Der Waerdena. Becker pokazuje, jak Teajtet uzyskał czysto geometryczny odpowiednik dla twierdzeń VII. 13 i V. 16; por. O. Becker, *Eudoxos-Studien I.*, B. L. Van Der Waerden, dz.cyt. s. 175–179.

Z proporcji $A : B = C : D$ otrzymujemy równość:

pr AD = pr BC = pr DA = pr CB (pr XY oznacza prostokąt o bokach X i Y.)

Z tego wnioskujemy (O. Becker, *Eudoxos-Studien I.*, s. 311), że $A : C = B : D$.

Korzystamy tu (por. Arystoteles: *Topiki* 158b) z – trywialnej dla dzisiejszego matematyka, lecz niezmiernie interesującej dla matematyka starożytnego – własności, łączącej „to, co liniowe"' z „tym, co płaskie"':

$A : C$ = pr AD : pr CD.

Dodatkowo wnioskowanie opiera się na własności:

pr AD : pr BD = $A : B = C : D$ = pr BC : BD.

Wystarczy teraz dowieść, że jeśli w proporcji terminy drugie są równe, to terminy pierwsze są równe, tj. prostokąt AD równa się prostokątowi BC. Do dowodu tej ostatniej własności trzeba użyć tzw. lematu Archimedesa, który – znów, jak pokazuje Becker – wynika z tw. X.1.

Wszystkie użyte własności były znane Grekom przed Eudoksosem.

Można próbować ustalić, które twierdzenia z księgi VI *Elementów* były znane w ramach teorii P_1b, a które należały do P_4. W. Knorr ustala, że dla potrzeb księgi X konieczne są twierdzenia VI. 1, 14, 16, 17 i 22; por. op. cit., s. 305. Tworzą one wydzieloną grupę wśród twierdzeń księgi VI.

4. PIERWSZA PRÓBA METRYZACJI GEOMETRII: TEORIA PROPORCJI TEAJTETA P_5

To zupełnie nowa teoria proporcji. Jest teorią pośrednią pomiędzy teorią P_4 i teorią proporcji Eudoksosa P_6. Ta zrekonstruowana przeze mnie teoria jest pierwszą udaną próbą opisu wielkości geometrycznych i liczbowych w jednej teorii proporcji.

Arystoteles w *Etyce Nikomachejskiej* wyraźnie odróżnia proporcje liczbowe (arytmetyczne: 1131b 12) od geometrycznych (1132a 1).

Początkowe twierdzenia X księgi *Elementów*, które wydają się „zbędne", gdy znamy już teorię Eudoksosa, tworzą podstawę teorii proporcji P_5. Dlatego Teajtet jest autorem lub współautorem księgi VI. Na teorię proporcji Teajteta, a nie Eudoksosa, powołuje się Platon w *Epinomis*.

Teoria Teajteta pozwala dodatkowo na sformułowanie własności proporcji potrzebnych przy dowodach tej księgi. Użycie księgi V staje się zbędne[25].

Moim zdaniem teoria proporcji „mieszanych", dotycząca porównywania stosunków między liczbami i pewnymi wielkościami geometrycznymi, musiała dla Greków tworzyć jeszcze jedną, inną niż dla proporcji czysto geometrycznych, teorię proporcji.

Umożliwiła ona porównanie *ratio* liczbowego z *ratio* geometrycznym. Jej terminami są liczby a, b, ... i wielkości geometryczne A, B, ...

$a : b = A : B$, gdzie wielkości geometryczne mogą być odcinkami, lub np. $A : B$, może oznaczać *ratio* „kwadrat do odcinka".

Nie można zamieniać terminów i nie ma możliwości porównania *ratio* mieszanych w P_5, np. „liczby do odcinka" – $a : B$. W teorii tej nie można więc sformułować odpowiedników twierdzenia VII. 13 (dla liczb P_3), twierdzenia o zamianie terminów geometrycznych z P_4, ani odpowiednika twierdzenia V. 16 z teorii Eudoksosa.

Podstawowe własności matematyczne P_5 określają początkowe twierdzenia i definicje z X księgi *Elementów*[26]. Brakującym ogniwem w tej teorii jest sposób konstrukcyjnego wyznaczania dwóch odcinków lub pól pozostających do siebie w *ratio* jak „liczba do liczby" ($a : b$). Konstrukcję przy pomocy „cyrkla i linijki" podałem w *Platon i podstawy matematyki współczesnej*, przy okazji dowodu lematu 6 w części II książki[27].

LEMAT

Każda linia *medial* jest wyznaczona przez linie *rational* i współmierne tylko w kwadracie.

DOWÓD:

Wprost z twierdzenia X. 22; dłuższy dowód jest jednak bardziej konstruktywny, a konstrukcja w drugiej jego części jest niezwykle przydatna. Dodatkowo, dowód ten rekonstruuje podstawową metodę teorii proporcji P_5.

Korzystając z twierdzenia X. 22, rozumujemy następująco:

Niech R będzie dowolną linią *rational*, a M, dowolną linią *medial*. Zastosujmy do linii *rational* R tw. X. 22, tj. znajdźmy linię D taką, że kwadrat o boku M równa się prostokątowi o bokach R i D. Linia D jest linią *rational*, współmierną tylko w kwadracie z R.

Linia *medial* to z definicji taka, która albo jest wyznaczona bezpośrednio przez linie *rational* i współmierne tylko w kwadracie, albo współmierne (tylko w kwadracie lub liniowo) z inną linią *medial* (por. twierdzenie X. 21). Musimy pokazać, że:

1) zgodnie z definicją z twierdzenia X. 21, linia współmierna z linią *medial* jest wyznaczona przez dwie różne linie *rational* współmierne tylko w kwadracie,

2) zgodnie z definicją z twierdzenia X. 21, linia współmierna tylko w kwadracie z linią *medial* jest wyznaczona przez linie *rational* współmierne tylko w kwadracie.

Ad 1). Niech M_1 będzie linią *medial* wyznaczoną przez linie A_1 i B_1, a linia M_2, linią współmierną z M_1. Znajdujemy największą wspólną miarę M_1 i M_2, tak jak w twierdzeniu X. 3. Sprawdzamy (por. ad. 2.), ile razy ta miara mieści się w M_1 (powiedzmy i razy, gdzie i jest liczbą), a ile razy w M_2 (powiedzmy j razy). Weźmy linię A taką, że:

$A\_1 : A =$ kwadrat $M\_1 :$ kwadrat $M\_2 = i^2 : j^2$

Prostokąt o bokach A_1 i B_1 (pr A_1B_1) jest równy kwadratowi o boku M_1 (kw M_1).

Z twierdzenia VI. 1:

pr $A\_1B\_1 :$ pr $AB\_1 =$ kw M_1 : kw $M\_2 =$ kw $M\_1 :$ pr AB_1.

Ponieważ dla danych trzech wielkości istnieje tylko jedna proporcjonalna do nich, więc

pr $AB\_1 =$ kw M_2.

Boki prostokąta pr AB_1 są współmierne tylko w kwadracie i *rational*. Z X. 6 $A\_1 : A$ ma się tak jak liczba do liczby. Stąd A_1 i A są współmierne i *rational* (X. 11 i X. 13).

Ad 2). Niech M_1 będzie linią *medial* wyznaczoną przez linie A_1 i B_1 *rational* i współmierne tylko w kwadracie, a M, linią *medial*, współmierną z M_1 tylko w kwadracie. Wówczas, kw M_1 ma się do kwadratu kw M, jak liczba do liczby (X. 6). Znajdźmy największą wspólną miarę kw M_1 i kw M (X. 3). Niech będzie to kw Y. Ustalamy, ile razy ten kwadrat mieści się w kw M_1 (np. i razy, gdzie i jest liczbą), a ile razy w kw M (np. j razy):

Przekształcamy abcdef (por. rys. 1 w Z. K r ó l , *Platon i podstawy...*, s. 151) w kw M_i podobny do kw Y, o polu równym polu kw M_1 minus kw Y (II. 14). Tę czynność powtarzamy aż kw M_i = kw Y. Wtedy i jest równe szukanej liczbie.

Czynność ta wymaga zawsze skończonej liczby kroków, gdyż kw Y i kw M_1 są współmierne i ich największą wspólną miarą jest kw Y (tw. X. 2). Mamy:

kw M_1 : kw $M = i : j$.

Znajdźmy teraz linię C taką, że $A : C = i : j$. Wtedy:

kw M_1 : kw M = pr AB : pr CB

Analogicznie jak w Ad. 1 stwierdzamy, że kw M jest równy prostokątowi o bokach C i B, a linie te są współmierne tylko w kwadracie i *rational*. [Q.E.D.]

Drugą ważną operacją w P_5 jest skorelowane wyznaczanie największego wspólnego podzielnika dla liczb w sposób geometryczny, poprzez znajdywanie największej wspólnej miary odpowiadających im linii lub na odwrót. Operacja ta wskazuje na obecność tzw. *antyphairetycznej* teorii proporcji, jako metody P_5[28].

Teoria proporcji P_5 wraz z teorią proporcji czysto geometrycznych umożliwia wyeliminowanie teorii proporcji Eudoksosa P_6 z rozumowań i dowodów w księgach X i XIII *Elementów*.

W naturalny sposób teoria Eudoksosa była uogólnieniem teorii Teajteta P_5. Widać także, że to Teajtet jako pierwszy uświadomił sobie wyróżnioną rolę tzw. wielkości archimedesowych, gdyż tak zwany „lemat Archimedesa" wynika z twierdzenia X. 1. Ta własność (drugiego rzędu) pozwala i dzisiaj odróżniać (w modelach dla arytmetyki pierwszego rzędu) standardowe i niestandardowe liczby naturalne[29].

Pozostaje sprawą otwartą, czy *anthyphairetyczna* teoria proporcji była jedną z metod teorii P_5, czy też stanowiła jeszcze jeden wariant przejściowy pomiędzy P_5 a P_6 lub jest wcześniejsza niż P_5. Uważam, że najwięcej danych przemawia za pierwszą z możliwości, jeśli dodatkowo uwzględnić różność procedur *anthyphairetycznych* w różnych teoriach proporcji.

5. TEORIA PROPORCJI EUDOKSOSA: P_6

Jest to słynna teoria proporcji Eudoksosa zawarta w księdze V *Elementów* Euklidesa.

Pomimo tego, że teoria ta pozwala na porównywanie *ratio* mieszanych (np. „liczba do odcinka") i na zamianę terminów, nie obejmuje wszystkich wielkości geometrycznych.

Jeśli:

$a : b = A : B$, to:

$a : A = b : B$ (twierdzenie V. 16).

Teoria ta nie dotyczy wielkości nieskończonych i tzw. wielkości niearchimedesowych, np. kątów rogowych. Wielkości nazywają się archimedesowymi, jeśli istnieje taka liczba naturalna n, że mniejsza wielkość „pomnożona" przez n jest większa od, lub równa wielkości większej.

Sformułowanie P_6 było rewolucyjnym krokiem w matematyce starożytnej, gdyż była to pierwsza niekonstruktywna teoria matematyczna. Zauważa to O. Becker w *Matematische Existenz*. Niekonstruktywność dotyczy fundamentalnej definicji V. 5 Eudoksosa, która jest sformułowana dla wszelkich możliwych liczb (naturalnych). Nie jest więc możliwe sprawdzenie *explicite* tej definicji przez żadnego matematyka.

Powyżej przedstawiłem jedynie schematyczny zarys starożytnych teorii proporcji. Niezależnie od innych źródeł, znajduje on potwierdzenie w szeregu uwag Pappusa w *Komentarzu do X księgi „Elementów" Euklidesa*[30].

Paragraf 8 (i 6) części I wyraźnie podaje, że termin „proporcja" jest używany w innym znaczeniu dla liczb i wielkości ciągłych (przestrzennych):

> „Dlatego, nie każdy stosunek da się znaleźć wśród liczb; ani nie wszystkie rzeczy, które mają wzajemny stosunek, mają go jak liczba do liczby, ponieważ w tym wypadku wszystkie byłyby współmierne, a więc naturalnie, skoro każda liczba jest jednorodna ze skończonością (lub z tym, co skończone), bo liczba nie jest wielością, mimo tej odpowiedniości, lecz określoną (lub ograniczoną) wielością."

Następne zdania paragrafu 8 wskazują, że w matematyce starożytnej istotne były Platońskie – jak pokazuję w swojej książce – odróżnienia na jedność nad wielością określoną i nieokreśloną, czyli pomiędzy tym, co arytmetyczne i tym, co geometryczne.

Paragraf 6 (część I) tłumaczy, że proporcja wielkości ciągłych jest określona w kilku znaczeniach, tj. „w tym sensie, że jest to wzajemna relacja skończonych wielkości ciągłych względem wielkości i małości [P_4], gdy w innych przypadkach jest rozumiana w tym sensie, że oznacza pewną taką relację, jaka istnieje pomiędzy liczbami, a wszystkie na przykład współmierne wielkości ciągłe mają oczywiście wzajemny stosunek jak liczba do liczby [P_6]; i wreszcie, w jeszcze innych przypadkach, jeśli wyrażamy stosunek przez określoną obraną miarę, poznajemy różnicę między wielkościami wymiernymi i niewymiernymi [P_5].”

Możemy teraz wyobrazić sobie, jak Eudoksos mógł podać swoje słynne definicje V. 1 – V. 7 wielkości proporcjonalnych, znane z *Elementów* i stanowiące podstawę P_6. Znając teorię proporcji Teajteta P_5 Eudoksos miał zapewne przed oczami poszczególne grupy linii wzajemnie współmiernych i niewspółmiernych. Wiedział już[31], że takich grup linii, z których każda zawiera linie wzajemnie współmierne liniowo, a niewspółmierne liniowo z liniami należącymi do innej grupy – jest nieograniczenie wiele. Jeśli w każdej grupie wybierzemy linię podstawową, czyli miarę, to każdej proporcji w sensie Teajteta P_5 odpowiada pewna proporcja w innej grupie. Na przykład możemy rozpatrywać w każdej grupie linie, które pozostają w stosunku takim, w jakim pozostają liczby 4 : 2.

Taką proporcję możemy ustalić w danej grupie linii wybierając dwie linie i znajdując ich największą wspólną miarę. Linie współmierne liniowo, to te, które pozostają do siebie w stosunku takim, jak liczba do liczby, lecz względem wybranej linii odpowiadającej jedynce – zasadzie liczb. Największa wspólna miara dla dowolnych dwóch linii z danej grupy linii współmiernych liniowo jest równa podziałowi linii podstawowej (w danej grupie) w *ratio* liczbowym równym *ratio* liczbowemu tych dwóch linii.

Wystarczy teraz tylko wiedzieć, która miara, tj. linia podstawowa, jest większa, mniejsza lub równa. Ten stosunek większości, mniejszości lub równości, określony najpierw dla linii podstawowych, będzie zachowany w każdej grupie linii dla dowolnych innych linii pozostających w dowolnym innym stosunku liczbowym. Jeśli, na przykład, w jednej grupie linii współmiernych liniowo, mamy dwie linie pozostające w *najmniejszym* stosunku jak liczby 4 : 2, to jeśli miara w pierwszej grupie jest większa od miary w drugiej grupie, to obydwie linie w drugiej grupie są też większe od linii z grupy drugiej. W ten sposób dochodzimy z łatwością do twierdzenia V. 16. Widać także, iż warunkiem proporcjonalności jest „archimedesowość” linii. Warunkiem powstania teorii proporcji Eudoksosa jest zatem zdolność operowania całościami (grupami linii) o nieskończonych zakresach.

Taki sposób myślenia wyjaśnia też, czemu mogły służyć rozważania nad liniami nieuporządkowanymi, rozszerzające klasyfikację z X księgi Elementów, a dokonane przez Apolloniusza: były to kolejne kroki w kierunku P_6[32].

Po sformułowaniu P_6 i dzięki zastosowaniu metody wyczerpywania matematycy rozwiązali szereg problemów. Ogólnie mówiąc, P_6 umożliwiła rozwój matematyki i badania takie, jak na przykład te, które prowadził Archimedes. Rozwój teorii proporcji następował poprzez wykazywanie dla poszczególnych rodzajów tworów geometrycznych, że są wielkościami archimedesowymi i dlatego możliwe jest do nich stosowanie twierdzeń P_6. Przykładowo, wiemy, że

Eudemos z Rodos, uczeń Arystotelesa, napisał „dzieło o kącie, stwierdzając, że jest on wielkością" (por. P r o k l o s : *In Euclidem* ..., 125.7–8).

Innego rodzaju impuls do rozwoju szczegółów teorii proporcji i rozważania nowych rodzajów proporcji były badania nad klasyfikacją wielkości niewymiernych i inne, związane np. z tzw. podziałami figur[33]. Eudoksos wymyślił trzy nowe rodzaje proporcji[34], oprócz dobrze znanych wcześniej (tj. arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej), a Teon ze Smyrny i Nikomachos z Gerazy omawiają 10 różnych typów proporcji.

Czytelnika zainteresowanego filologiczną analizą terminów związanych z teoriami proporcji pod kątem ich rozwoju historycznego odsyłam, na przykład do cytowanej już pracy Á. S z a b ó : *The Beginnings* ...(*passim*).

Warto także w tym miejscu powiedzieć kilka słów o teorii proporcji arabskiego matematyka i mistycznego poety Omara Khayyama[35] (druga połowa XI w n.e.), gdyż jego teoria proporcji stanowi naturalne zwieńczenie wysiłków matematyków starożytnych. Khayyam w swoim dziele *Dyskusja trudności Euklidesa*, podaje nową definicję proporcjonalności czterech wielkości, którymi mogą być zarówno wielkości ciągłe, jak i dyskretne.

Cztery wielkości są proporcjonalne ($A : B = C : D$), jeśli pewne liczby, otrzymane w opisany poniżej sposób są równe. Zakładając, że B jest większe od A, a D od C, odejmujemy od B wielokrotność A (wielokrotność określoną przez pewną liczbę; por. początek X księgi *Elementów*). Otrzymujemy resztę z B mniejszą od A. Następnie czynność powtarzemy odejmując od B pewną wielokrotność otrzymanej poprzednio reszty (otrzymujemy więc pewną nową liczbę, określoną przez nową wielokrotność). Proces ten albo skończy się w skończonej ilości kroków (w przypadku równości A i B już w pierwszym kroku), jeśli wielkości są współmierne, albo możemy go prowadzić w nieskończoność, gdy wielkości są niewspółmierne. Tak samo możemy postąpić z wielkościami C i D. Khayyam stwierdził, że wielkości A, B, C, D są proporcjonalne jeśli liczby otrzymane w kolejnych krokach dla strony prawej i lewej, są identyczne. Pokazał także w szeregu twierdzeń, że taka – oparta na procedurze *anthyphairesis* – definicja jest równoważna definicji z teorii proporcji P_6 z V księgi *Elementów*. Udało mu się także zdefiniować większość i mniejszość odpowiednich ratio, poprzez porównanie liczb dla lewej i prawej strony proporcji oraz określić iloczyn *ratios*, czego nie robili Grecy.

Od tej pory każda proporcja dowolnych wielkości mogła być uważana za określoną przez pewien *zbiór* liczb. Tak traktuje proporcje już Nasir ad-Din at-Tusi. Matematycy stopniowo arytmetyzują geometrię, ale nie oznacza to całkowitej eliminacji odwołań do intuicji geometrycznej. W przypadku Omara Khayyama widać to w jego uzasadnieniu twierdzenia, że gdy są dane trzy dowolne wielkości, zawsze istnieje czwarta, proporcjonalna do nich. Khayyam powołuje się tu na nieskończoną podzielność wielkości przestrzennych.

UWAGI KONCOWE

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że głównym problemem, który określał wysiłki badawcze matematyków starożytnych był fakt rozdziału i wzajemnej nieredukowalności arytmetyki i geometrii. Odkrycie niewspółmierności pewnych linii było nie tylko wstrząsającym doświadczeniem czysto intelektualnym, ale także przeżyciem religijnym. Grecy posiedli dowód bipolarności świata: parzyste i nieparzyste, wymierne i niewymierne, były częścią ich wizji świata na równi z innymi parami przeciwieństw – męskie i żeńskie, dobre i złe, jasne i ciemne ... Arystoteles przytacza fakt niewspółmierności jako przykład rzeczy, która wzbudza najwyższe zdumienie (*Met.* A, 983a 16).

Pierwotne przekonanie pitagorejczyków, iż „wszystko jest podporządkowane liczbie”[35] okazało się fałszywe. W filozofii i matematyce należało rozważać nie jedną powszechną zasadę bytów (tj. liczbę), lecz dwie wzajemnie nieredukowalne. Określiło to kształt filozofii i matematyki greckiej na wiele stuleci, a u Platona stało się główną przyczyną powstania protologii, czyli teorii dwóch najwyższych zasad: Jedności i Diady[36]. Bez zrozumienia wewnętrznego rozwoju matematyki greckiej nie da się zrozumieć filozofii starożytnej – były one związane ze sobą całkowicie. Z kolei badanie filozofii, na przykład filozofii Platona, dostarcza narzędzi do właściwej rekonstrukcji treści dzieł matematycznych, w tym *Elementów* Euklidesa.

Bibliografia

Oskar B e c k e r : *Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene.* „Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung“ 1927, 8, s. 539–809;

O. B e c k e r : *Die dihairetische Erzeugung der platonischen Idealzahlen.* „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik“. 1931, Abt. B. 1, s. 464–501;

O. B e c k e r : *Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionslehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid.* „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik“. 1933, Abt. B. 1, s. 311–333;

O. B e c k e r : *Die Aktualität des Pythagoreischen Gedankens.* W: *Die Gegenwart der Griechen im neueren Denken.* Red. O. B e c k e r . Tübingen 1960 (Darmstadt 1965);

O. B e c k e r : *Lehre vom Geradem und Ungeradem im Neunten Buch der euklidischen Elemente.* „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik“. 1936, Abt. B. 3, s. 533–553;

O. Becker: *Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen?* „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik". 1933, Abt. B. 2, s. 369–387;

David H. Fowler: *Ratio in Early Greek Mathematics*. „Bulletin of the American Mathematical Society (New Series)" 1979, 1, s. 807–848;

Konrad Gaiser: *Platons Ungeschriebene Lehre. Studien zur systematischen und geschichtlichen Begründung der Wissenschaften in der Platonischen Schule*. Stuttgard 1963 (wyd. II 1968);

Jean-Louise Gardies: *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris 1988;

Ivor Grattan-Guiness: *Numbers, Magnitudes, Ratios and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them?*, „Historia Mathematica" 1996, 23, s. 355–375;

Helmut Hasse, Heinrich Scholz: *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*. Berlin 1928;

Thomas Little Heath: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 3 vol., 2nd ed. Cambridge 1926;

T. L. Heath: *A History of Greek Mathematics*. 2 vol. Oxford 1921;

Jacob Klein: *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra*, I. Tl. „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik". 1936, Abt. B.3, s. 18–105;

J. Klein: *Greek Mathematics and the Origin of Algebra*. Cambridge Mass. & London 1968. (Republished Dover 1992);

Wilbur Richard Knorr: *The Evolution of Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Synthese Historical Library. Texts and Studies in the History of Logic and Philosophy, vol. 15. Dordrecht – Holland / Boston – U.S.A. 1975;

Gottfried Martin: *Platons Lehre von der Zahl und ihre Darstellung durch Aristoteles*. „Zeitschrift für philosophische Forschung" 1953, Bd. VII, s. 191–203;

Paolo Palmieri: *The Obscurity of the Equimultiples: Clavius' and Galileo's Foundational Studies of Euclid's Theory of Proportions*. „Archive for History of Exact Sciences" 2001, 55, s. 535–597;

Ken Saito: *Phantom Theories of Pre-Euclidean Proportions*. „Science in Context" 2003, 16(3), s. 331–347;

K. Saito: *Duplicate Ratio in Book VI of Euclid's Elements*. „Historia Scientiarum" 2nd Ser., 1993, 3–2, s. 115–135;

Árpád Szabó: *The Beginnings of Greek Mathematics*. Budapest 1978;

Otto Töplitz: *Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon*. „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik" 1931, Abt. B.1, s. 3–33;

O. T ö p l i t z : *Die mathematische Epinomisstelle.* „Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik“ 1933, Abt. B.1, s. 334–346;

Bartel Leendert V a n D e r W a e r d e n : *Science Awakening.* tłum ang. A. D r e s d e n . Groningen, Holland 1954.;

B. L. V a n d e r W a e r d e n : *Die Harmonielehre der Pythagoreer.* „Hermes“ 1943, 78, s. 163–199:

Anders W e d b e r g : *Plato's Philosophy of Mathematics.* Stockholm 1955;

Jacek W i d o m s k i : *Ontologia liczby.* Kraków 1996;

Zbigniew J o r d a n : *O matematycznych podstawach systemu Platona. Z historii racjonalizmu.* Poznań 1937.

Oczywiście podana bibliografia nie pretenduje do pełności (por. np. prace R. Dedekinda i Newtona). Dalsze odniesienia bibliograficzne można bez trudu ustalić na podstawie spisów literatury w przywołanych w tym miejscu pracach.

Przypisy

[1] Przykłady bezkrytycznego „zastosowania“ matematyki współczesnej do opisu matematyki starożytnej można znaleźć np. w książce David H. F o w l e r : *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction.* Oxford 1987. Książka ta, pomimo wspomnianego defektu, zawiera jednak szereg ciekawych spostrzeżeń.

[2] O. B e c k e r : *Lehre vom Geradem und Ungeradem ...*

[3] Przedstawiany schemat rozwoju starożytnych teorii proporcji potwierdza *explicite* A r y s t o t e l e s w *Analitykach Wtórych* we fragmentach 74a i 99a.

[4] P r o c l u s : *Procli Diadochi in Primum Elementorum Librum Commentarii.* Ed. Georg F r i e d l e i n . Leipzig 1873 (repr. G. Olms. Hildesheim 1967).

[5] Por. np. A r y s t o t e l e s *Topiki* 148b, *De caelo* 271b –276a, III i IV księga *Fizyki*, dwie ostatnie księgi *Metafizyki*; por. też *De generatione et corruptione* 332b –333a etc.; twierdzenie I. 10 pokazuje jak wyznaczyć środek danej linii – każdej linii – a środek miały tylko linie skończone.

[6] Uzasadnienie dla głoszonych w tym miejscu poglądów zawiera mój artykuł *Geometria starożytna i filozofia Platona na podstawie Komentarza Pappusa do X księgi „Elementów” Euklidesa.* „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki” 2006, 3–4, (w druku), oraz moja książka Platon i podstawy matematyki współczesnej. Pojęcie liczby u Platona. Złotoria k. Torunia 2005.

[7] Proklos twierdzi, że pierwszym twórcą, podobnych do Euklidejskich, *Elementów* był Hippokrates z Chios (Proclus, dz.cyt. s. 66).

[8] J a m b l i c h w *Introductio in Nicomachi Arithm.* podaje nawet, że Pitagoras nauczył się złotej proporcji od Babilończyków. Do P_1 należały też z pewnością pewne rozważania nad tzw. wielokrotnymi i epimorycznymi (‘επιμόριον διάστημα, superparticularis) *ratio.* Później, w obrębie P_2, Archytas mógł już dowieść swoje słynne twier-

dzenie dla liczb, że każde liczbowe *epimoric ratio* może być wyrażone w formie *n* : *n* + 1. Tak samo, uściślenie rozważań o liczbach pierwszych nastąpiło dopiero w P_3.

[9] Por. np. N i k o m a c h o s z G e r a z y : *Introductionis Arithmeticae Libri II.* Ed. Ricardus H o c h e . Leipzig 1866 (tłum. ang. Martin Luter D ' O o g e : *Nicomachus of Geraza Introduction to Arithmetic (with Studies in Greek Arithmetic* by Frank Egleton R o b b i n s and Louis Charles K a r p i n s k i . New York 1926) II. 22.1 i J a m b l i c h : *In Nicomachi Arithmeticam Introductionem*, s. 118, 23 (ed. H. P i s t e l l i , 1894). Podobnie, Teon ze Smyrny, pisze omawiając teorie proporcji, że „pochodzą z tradycji pitagorejskiej" (T h e o n : *Expositio Rerum Mathematicarum ad Legendum Platonem Utilium.* Ed. E. H i l l e r , Leipzig 1878, s. 47; por. też uwagi o proporcjach na s. 116).

[10] Podstawowymi źródłami do rekonstrukcji tych teorii są wymienione wyżej dzieła Nikomachosa (np. w sekcjach dotyczących klasyfikacji liczb związanych z parzystością i nieparzystością znajduje się dużo uwag dotyczących konkretnych ustaleń w ramach P_1 i P_1a) i Teona. W tym miejscu ograniczam się jedynie do uwag natury ogólnej.

[11] Później o proporcji mówi np. fragment 6 Filolaosa (Diels). Nikomachos potwierdza (II. 26.2), że Filolaos używał pojęć proporcji harmonicznej i geometrycznej. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na naukę Filolaosa o liczbach „parzysto-nieparzystych". Należała do nich na przykład jedynka. Ślady takiej nauki (omawia je np. W. R. K n o r r , dz.cyt. w wielu miejscach) wskazują, moim zdaniem, na próby ratowania w obrębie szkoły pitagorejskiej nauki o redukcji całej rzeczywistości jedynie do struktury liczbowej. Dowody niewspółmierności pokazywały, że jeśli bok kwadratu jest liczbą, to przekątna nie może być liczbą, gdyż musiałaby być równocześnie liczbą parzystą i nieparzystą. Nauka o liczbach, które są równocześnie parzyste i nieparzyste była prawdopodobnie próbą ratowania jedności matematyki, jako opartej na jednej zasadzie: liczbie. Późniejsze badania, zwłaszcza Teodora i Teajteta, pokazały nierealizowalność takich idei. Archytas w zachowanych fragmentach mówi już jednoznacznie o dwóch zasadach rzeczywistości: liczbie i wielkości przestrzennej.

[12] Knorr pisze: „The division of the proofs on incommensurability into separate arithmetic and geometric parts is standard in the historical accounts of these studies; cf. for instance, B. L. V a n d e r W a e r d e n : *Arithmetik der Pythagoreer*, p. 682. Cf. also our Chapters VII and VIII." (W. R. K n o r r , dz.cyt. s. 107, przypis 106). Poświadcza to dodatkowo obecność teorii proporcji P_1a i P_1b. (Istnieje spór o obecność i kształt wczesnych teorii proporcji w matematyce greckiej.)

[13] Zwracam uwagę na podobieństwo pojęciowe pomiędzy twierdzeniem IX. 30 a przytaczaną niżej definicją wielkości proporcjonalnych Hippokratesa.

[14] Liczby w arytmetyce pitagorejskiej, po odkryciu niewymierności, przedstawiane były jako wielkości dyskretne, za pomocą kamyczków, kropek, patyczków itp. Dopiero rozwój teorii proporcji, a zwłaszcza powstanie P_5 i P_6, umożliwiły obrazowanie liczb przy pomocy odcinków. Arytmetykę kamyczków zrekonstruował O. B e c k e r (*Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen 1957). Więcej informacji o tym można znaleźć w rozdziale V cytowanej książki Knorra. Sprawa sposobu przedstawiania liczb rodzi

wiele ciekawych zagadnień i pozwala na wysnucie konkretnych wniosków dotyczących historii matematyki. Prezentuje je Knorr w swej książce; por. np. rozdział V, VII i VIII.

[15] Por. np. twierdzenie 11 u Knorra (s. 155), które Proklos (i H e r o n , *Opera*, (Heiberg) IV, 218–220) przypisuje (wczesnym) pitagorejczykom (*In Euclidem*..., s. 428).

[16] Heron (I w. n.e.) używa na przykład (*Geometrica*) kryteriów podzielności przez 3 i 4 sformułowanych w terminach trójek pitagorejskich.

[17] Zob. jego *Komentarz do „Fizyki" Arystotelesa* (Comm. 60.22 – 68.32; por. Proclus, dz.cyt. s. 66). Por. W. R. K n o r r , dz.cyt. s. 40–41 (i przypisy 60 – 62), B. L. V a n d e r W a e r d e n , dz.cyt. s. 131–136, T. L. H e a t h , *A History*..., dz.cyt., t. I, s. 182–209.

[18] Definicja ta może być stosowana właściwie tylko do wielkości współmiernych.

[19] Por. W. R. K n o r r , dz.cyt. s. 204–205, przypis 18.

[20] Jw. s. 96.

[21] Van der Waerden uważa (dz.cyt. s. 49, 107–116), że księga VII zawiera starszą teorię proporcji niż księga VIII, gdyż opiera się na definicji proporcji zbliżonej do definicji Hippokratesa. Jednakże definicje te różnią się, gdyż jedna dotyczy wielkości geometrycznych (Hippokrates), druga (definicja VII. 20, oparta na definicjach VII.3 i 4) – pozornie bardzo podobna – dotyczy tylko liczb. Definicja VII. 20 mówi: „Liczby są proporcjonalne, gdy pierwsza jest tą samą wielokrotnością, lub tą samą częścią, czy tymi samymi częściami drugiej [liczby – *Z.K.*], jak trzecia jest czwartej." Wyraźne związki P_3 z badaniami Teajteta nad klasyfikacją wielkości niewymiernych przesądzają sprawę autorstwa i czasu powstania księgi VII. Studia nad teoriami proporcji są często obarczone błędem (i wszystkimi tego konsekwencjami) nieodróżniania wyraźnie proporcji liczbowych od geometrycznych. Przykładem może być nieodróżnialnie procedur *anthyphairetycznych*, które były inne dla wielkości geometrycznych i liczbowych, a jeszcze inne w ramach P_5.

[22] Dz.cyt., głównie rozdziały VII i VIII.

[23] Dotyczy to np. słynnego twierdzenia Archytasa, że nie istnieje liczba średnia pomiędzy liczbami n i $n + 1$. Problem ten ma oczywiście rozwiązanie geometryczne, jednak znaleziony w sposób geometryczny podział kanonu, nie jest obdarzony harmonicznym i pięknym brzmieniem. Tylko podziały liczbowe, a więc w ramach teorii proporcji liczbowych, powodowały pojawianie się piękna i harmonii w muzyce. Fakt ten – niewątpliwie zadziwiający i dziś – wiązał harmonikę starożytną z teoriami proporcji liczbowych i dodatkowo potwierdzał naukę Platona o dwóch najwyższych zasadach rzeczywistości: Jedności i Diadzie.

[24] W sprawie związków Platona z pitagoreizmem, a w szczególności roli filozofii pitagorejskiej w *Timajosie*, zob. Z. K r ó l : *Platon i podstawy matematyki* ..., dz.cyt.

[25] „A second problem is that the Euclidean proof [of the theorem X. 9 – *Z.K.*] employs two conceptions of proportion (V, Def. 5 for magnitudes and VII, Def. 20 for integers) without having proved their equivalence in the case of commensurable magnitudes." (K n o r r , dz. cyt., s. 253). Moim zdaniem wskazuje to na dwa fakty: 1) że Euklides zastąpił starszą teorię proporcji P_5, teorią Eudoksosa, oraz 2) że podstawowy układ i kolejność początkowych twierdzeń X księgi pochodzi od Teajteta.

[26] Uzasadnienie tej tezy wymaga długiego wywodu i rozważenia wielu szczegółów. Dla przykładu przytoczę uwagi Knorra, które potwierdzają tę tezę: „At some point the arithmetic and geometric parts of the theory [i.e. the theory from Book X – *Z.K.*] were separated, for only the latter is contained in the *Elements*; we have seen how this separation gave rise to a logical flaw in the Euclidean theory, whereby a strictly geometric theorem, X. 9, came to be applied as an arithmetic condition of commensurability." (W. R. Knorr, dz.cyt. s. 238). „Euclid proves this as X. 5 and X. 6. While a modern theory of rational magnitudes would treat this as a definition, Euclid is correct to provide it as a theorem, since his own definition of commensurable magnitudes (X, Def. 1) is based on the existence of a common measuring magnitude. But in his proof of X. 5 he appears to err in the same way as we mentioned in connection with X. 9. That is, he applies VII, Def. 20, the definition of proportion for integers, to the case of a proportion in which two of the terms are not integers, but rather commensurable magnitudes. What is needed, therefore, is a proof that a proportion of magnitudes (in the sense of Book V), where the magnitudes are commensurable, satisfies the properties of a proportion in the sense of Book VII. The absence of this step indicates that the original form of X. 5 did not resort to the Eudoxean definition, but that Euclid failed to perceive the necessity of revision." (jw. s. 253–254). Brak dostrzegania P_5 jest odpowiedzialny za trudności, o któ- rych pisze Knorr.

[27] Hippokrates z Chios wiedział jak wyznaczyć geometrycznie linie, zbudowane na których kwadraty pozostają we wzajemnej proporcji jak liczby 3 : 2 i 6 : 1 (por. B. L. Van der Waerden, dz.cyt. s. 136).

[28] Teorię tę, opartą na tzw. algorytmie Euklidesa, rekonstruuje Knorr (opierając się na ustaleniach O. Beckera) w rozdziale VIII i *Appendix B* swej książki (dz.cyt.).

[29] Por. np. A. Robinson: *Non-Standard Analysis. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Amsterdam 1966.

[30] Wiliam Thomson: *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements. Arabic Text and Translation by William Thomson with Introductory Remarks, Notes, and a Glossary of technical Terms by Gustav Junge and William Thomson.* Cambridge, London 1930 Harvard Semitic Series, vol. VIII.

[31] Por. Z. Król, *Geometria starożytna i filozofia Platona...* . „Kwartalnik Historii Nauki i Techniki" 2006 nr 3–4.

[32] Zob. jw.

[33] Zob. jw.

[34] O jakie nowe średnie chodzi możemy ustalić na podstawie Introductio Nikomachosa i cytowanego komentarza Jamblicha (s. 100, 113); por. też W. R. Knorr, dz.cyt. s. 274 – 277.

[35] Dokładniejsze omówienie tej teorii zawiera książka: B. L. Van der Waerden: *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether.* Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1985, s. 29–31.

[36] Jamblich: *O życiu pitagorejskim*. W: *Żywoty Pitagorasa – Porfiriusz, Jamblich, Anonim*. tłum. J. Gajda-Krynicka. Wrocław 1993, s. 84.

[37] Por. Z. Król, *Geometria starożytna i filozofia Platona ...* .

Recenzent: *doc. dr hab. Krzysztof Maślanka*

Zbigniew Król

INTRODUCTION TO ANCIENT THEORIES OF PROPORTION

Some of the things that are nowadays taken for granted in mathematics, namely that line segments of a certain length can be well ordered, and „Euclidean" space is characterized by continuity and metricity, were problematic in antiquity.

The main problem of ancient mathematics consisted in attempts to formulate anew a single mathematic theory after its disintegration into arithmetic and geometry caused by the discovery of incommensurability. Successive theories aimed at the metrization of geometric concepts and encompassed an ever increasing variety of mathematical objects.

The paper proposes a new scheme of the development of ancient theories of proportion, which includes:

1. Early theories of proportion (P_1), among which two phases of development and two further subtypes have been distinguished in phase two: P_1a - early theories of numerical proportions and P_1b - early theories of geometrical proportions.
2. Theories of numerical proportions motivated by studies of irrational magnitudes: the theory of Archytas (P_2) and the theory of Theaetetus (P_3).
3. Theories of purely geometrical proportions P_4 (mainly book IV of Euclid's Elements)
4. The first theory of proportion that included mixed proportions, i.e. numerical and geometrical proportions (P_5).
5. Eudoxus' theory of proportions (P_6).

The research of which the current paper presents the development of mathematics in a new light, and its results allow a reconstruction of the hermeneutic horizon for ancient mathematics.