Dadaczyński, Jerzy

Dlaczego Bernard Bolzano nie wprowadził (kardynalnej) liczby nieskończonej?

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki 55/2, 171-187

2010

Jerzy Dadaczyński
Katedra Filozofii Logiki PAT
Kraków

DLACZEGO BERNARD BOLZANO NIE WPROWADZIŁ (KARDYNALNEJ) LICZBY NIESKOŃCZONEJ?

Powszechnie wiadomo, że nieskończone (pozaskończone[1]) liczby – porządkowe i kardynalne – zostały wprowadzone do matematyki przez G. Cantora około roku 1880. Był to jeden z elementów budowanej przez niego od podstaw – choć nieaksjomatycznie – teorii mnogości. Tę ostatnią charakteryzuje się czasami jako „produkt" połączenia dwóch idei: zbioru i nieskończoności. Gdy czyta się dzieła zebrane Cantora, można zauważyć, jak wiele miejsca poświęcił on w nich konstrukcjom liczb (porządkowych i kardynalnych) na gruncie teoriomnogościowym. Z tego właśnie powodu zasadne wydaje się być powiedzenie, że Cantorowska teoria mnogości to skutek superpozycji trzech pojęć: zbioru, nieskończoności (czyli wcześniej wymienionych) oraz właśnie liczby.

Wiadomo, że pojęcie pozaskończonej liczby porządkowej „wyłoniło" się najpierw z badań Cantora dotyczących podstaw analizy[2]. Potem jednak zostało ono „przeniesione" na grunt teoriomnogościowy. Natomiast pojęcie pozaskończonej liczby kardynalnej miało od początku „rodowód" teoriomnogościowy[3]. Zasadniczymi „narzędziami" niezbędnymi dla zdefiniowania liczb pozaskończonych były następujące pojęcia: równoliczności zbiorów (będącej relacją równoważnościową), klasy abstrakcji (jeszcze wtedy tak nie nazywanej) oraz zbioru nieskończonego.

Bolzano – jak się uważa – antycypował niektóre elementy Cantorowskiej konstrukcji teorii mnogości. Tytułowe pytanie niniejszej pracy sugeruje, że definicja

Kwartalnik Historii Nauki i Techniki R. 55: 2010 nr 2 s. 171–187

liczb pozaskończonych była w zasadzie w „zasięgu" możliwości twórczych Bolzana. Jest to jednak pogląd wymagający rzetelnego uzasadnienia. Zatem, zanim udzielona zostanie odpowiedź na tytułowe pytanie, należy pokazać, że jest ono w ogóle sensownie postawione.

Wspomniane uzasadnienie będzie polegało na pokazaniu, że Bolzano dysponował odpowiednikami, wspomnianych wyżej, Cantorowskich „narzędzi": równoliczności zbiorów, klasy abstrakcji, zbioru nieskończonego, oraz że pierwsze dwa wykorzystywał do definiowania liczb.

Aby jednak zrealizować powyższe zadanie, trzeba najpierw pokrótce wprowadzić najważniejsze elementy ontologii i logiki matematyka z Pragi. Bolzanowskie przedmioty (*ein Ding, ein Gegenstand, ein Etwas*) to elementy uniwersum dyskursu samego Bolzana. Wszystkie one, i tylko one, istnieją (*es gibt sie*[4]). Klasa przedmiotów Bolzanowskich rozpada się na dwie rozłączne podklasy: przedmiotów rzeczywistych (*wirkliche*), które wszystkie – i tylko one – są przedmiotami czasoprzestrzennymi, przedmiotami będącymi równocześnie przyczyną (*Ursache*) dla czegoś innego[5], oraz przedmiotów nierzeczywistych, które wszystkie są przedmiotami nietemporalnymi i nieprzestrzennymi i nie stanowią przyczyny (*Ursache*) dla żadnego skutku (*Wirkung*)[6]. Przedstawienia same w sobie (*Vorstellungen ans ich*) są przedmiotami nierzeczywistymi, które przedstawiają przedmioty zarówno rzeczywiste, jak i nierzeczywiste[7].

Przy pomocy Bolzanowskiego pojęcia części całości – wyrażanego dalej przy pomocy dwuargumentowego predykatu „$\angle$" – można zrekonstruować pojęcie jednostki, którym posługiwał się matematyk z Pragi:

> Dla wszystkich x, v zachodzi: x jest *jednostką względem* v [*JEDNOSTKA*(x,v)] wtedy i tylko wtedy, gdy x jest *przedstawiane* przez v, i dla każdego y zachodzi: jeśli y jest *częścią* x, to y nie jest przedstawiane przez v[8].

Przy pomocy pojęcia jednostki można w systemie Bolzana zdefiniować pojęcie wielości:

> Dla wszystkich x, v zachodzi: x jest *wielością względem* v [*WIELOŚĆ*(x,v) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje cantorowski zbiór m i istnieją x', y' takie, że $x' \neq y'$ i $x' \in m$ i $y' \in m$, tak że x *złożone* jest z wszystkich elementów m i dla wszystkich y zachodzi: jeśli $y \in m$, to y jest *jednostką względem* v; i dla wszystkich y zachodzi: jeśli y jest *jednostką względem* v i y jest *częścią* x, to $y \in m$[9].

Pojęcie wielości (*Vielheit*) jest w Bolzanowskiej konstrukcji podstaw matematyki pod wieloma względami odpowiednikiem Cantorowskiego, teoriomnogościowego pojęcia zbioru (*Menge*). Zresztą w *Paradoxien des Unendlichen*, ostatniej dużej pracy Bolzana, terminy *Vielheit* i *Menge* używane są często zamiennie. Bolzano wyraźnie stwierdza, że zarówno w dziedzinie przedmiotów nierzeczywistych, jak i w dziedzinie przedmiotów rzeczywistych istnieją wielości nieskończone[10]. Są one odpowiednikami zbiorów nieskończonych G. Cantora

Poza tym Bolzano wprowadza w swoich tekstach pojęcie równości wielości [*rw*]. Zostało ono zrekonstruowane w sposób następujący:

$$\prod x,x',v,v' \ (\textit{WIELOŚĆ}(x,v) \wedge \textit{WIELOŚĆ}(x',v') \rightarrow \textit{WIELOŚĆ}(x,v)\ rw\ \textit{WIELOŚĆ}(x',v') \equiv \sum R\ (\prod z\ (z \angle x \wedge \textit{JEDNOSTKA}(z,v) \rightarrow \sum!\, z'(z' \angle x' \wedge \textit{JEDNOSTKA}(z',v') \wedge zRz') \wedge \prod z'(z' \angle x' \wedge \textit{JEDNOSTKA}(z',v') \rightarrow \sum!\, z\ (z \angle x \wedge \textit{JEDNOSTKA}(z,v) \wedge zRz'))))$$[11].

Udowodniono, że zdefiniowana relacja [*rw*] jest relacją równoważnościową[12]. Trzeba zauważyć, że relacja ta zachodzi pomiędzy wielościami wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie zbiory cantorowskie, z których elementów złożone są można na siebie jednojednoznacznie odwzorować[13]. Zatem relacja równości wielości jest precyzyjnym odpowiednikiem relacji równoliczności stosownych zbiorów cantorowskich.

W *Paradoxien des Unendlichen* Bolzano definiuje liczbę konkretną rodzaju *v* jako wielość względem *v* [*WIELOŚĆ*(*x*,*v*)]. Pisze on:

> (DEF) „Pomyślmy sobie ciąg, którego pierwszy wyraz jest jednostką rodzaju A, zaś każdy następny wyprowadzony jest ze swojego poprzednika w ten sposób, że bierzemy przedmiot jemu [poprzednikowi – J. D.] i łączymy go z nową jednostką w sumę, to wszystkie występujące w tym ciągu wyrazy – z wyjątkiem pierwszego, który jest zwykłą jednostką rodzaju – są wielościami rodzaju A i to takimi [...] (łącznie z pierwszym wyrazem), które nazywam liczbami, dokładniej: liczbami naturalnymi"[14].

Pokazano, analizując podobną definicję z publikowanej dopiero w XX w. *Reine Zahlenlehre*[15], że praski matematyk obok liczb konkretnych „szkicował" również definicję liczby abstrakcyjnej (danej liczby konkretnej). W rekonstrukcji tej definicji trzeba odwołać się do pojęcia klasy abstrakcji, która *implicite* kryła się na „zapleczu" wspomnianego „szkicu", a także na „zapleczu" Bolzanowskiej definicji liczby rzeczywistej. Zrekonstruowaną definicję liczby abstrakcyjnej (danej liczby konkretnej) Bolzana, przy założeniu, że liczba konkretna *LICZKON*(*x*,*v*) jest wielością *WIELOŚĆ*(*x*,*v*)[16], można sformułować następująco[17]:

$$(1)\ \textit{LICZABS}(\textit{LICZKON}(x,v)) =_{df} [\textit{WIELOŚĆ}(x,v)]_{rw}.$$

Pierwszym odruchem, po zapoznaniu się z tak zrekonstruowaną definicją, jest spostrzeżenie, że w ten właśnie sposób można prosto zdefiniować pozaskończoną liczbę kardynalną. Wystarczy wziąć nieskończoną wielość – a Bolzano akceptował ich istnienie – i określić ją jako nieskończoną liczbę konkretną. Potem zaś przypisać jej, zgodnie z (1), odpowiednią – nieskończoną liczbę abstrakcyjną.

W każdym razie powyższy przegląd „narzędzi", którymi dysponował Bolzano wskazuje wyraźnie – i to istotna konkluzja na obecnym etapie badań – że bez większego trudu, od strony „technicznej", był on w stanie zdefiniować liczbę (kardynalną) pozaskończoną. Dysponował bowiem odpowiednikami pojęć: zbioru nieskończonego, relacji równoliczności i klasy abstrakcji. Co więcej, odpowiedniki dwóch ostatnich pojęć wykorzystywał on w definiowaniu (skończonych) liczb abstrakcyjnych.

I dlatego należy najpierw wyrazić zasadnicze zdziwienie, że Bolzano nie zdefiniował liczby pozaskończonej (nieskończonej). Co więcej, trzeba stwierdzić, że w wielu miejscach swojej ostatniej dużej pracy *Paradoxien des Unendlichen explicite* zdecydowanie odrzucał – w „naturalny" sposób nasuwający się – pomysł utożsamienia wielości (*Vielheiten*) czy zbiorów (*Mengen*) (terminów tych używał tam zamiennie) nieskończonych, którymi operował, z liczbą nieskończoną konkretną[18]. Co najwyżej zgadzał się na określenie wielości (zbiorów) nieskończonych mianem „wielkości nieskończonych", ale nie na określenie ich jako „(konkretnych) liczb nieskończonych"[19]. A jeśli tak, to konsekwentnie – zgodnie z definicją (1) wprowadzoną wyżej – nie mógł też wprowadzić abstrakcyjnej liczby nieskończonej.

Rodzi się w tym miejscu od razu – tytułowe dla niniejszej pracy pytanie – dlaczego praski matematyk takiej definicji, odmiennie niż Cantor, nie zaproponował. Odpowiedź na to pytanie zawarta jest w dalszej części pracy.

Pierwsze próby odpowiedzi na tytułowe pytanie będą odpowiedziami *a priori* w tym znaczeniu, że nie będą się one zasadniczo odwoływały do tekstów Bolzana. Wydaje się, że można udzielić dwóch *apriorycznych* odpowiedzi.

Najpierw należy stwierdzić, że tradycja matematyczna, którą zastał Bolzano, była daleka od wprowadzania liczb nieskończonych. Trzeba tu uwzględnić co najmniej trzy wątki. Od starożytności znane były paradoksy związane ze zbiorami nieskończonymi. To zaś w prosty sposób prowadziło do tego, że środowisko matematyków było bardzo oddalone od tego, by przy pomocy paradoksogennych zbiorów nieskończonych definiować liczby. Po wtóre, obok wielkości aktualnie nieskończenie małych w podstawach analizy budowanych w XVII i XVIII w. pojawiły się symbole oznaczające wielkości aktualnie nieskończenie wielkie. Problem polegał na tym, że budowane we wskazanym czasie podstawy analizy matematycznej były niejasne i antynomiogenne. Dlatego przełom XVIII i XIX w. przyniósł rewizję podstaw analizy, prowadzącą do usunięcia z nich wielkości nieskończonych (wielkości niearchimedesowych). Po trzecie zaś, środowisko matematyków, odwołując się do tradycji, nigdy łatwo nie zgadzało się na rozszerzanie pojęcia liczby na nowe „obszary". Wystarczy w tym kontekście wskazać przykład liczb rzeczywistych czy zespolonych. Tak więc – szeroko rozumiana – tradycja matematyczna na pewno nie inspirowała Bolzana do wprowadzenia nowego typu liczb (liczby). Raczej stanowiła zasadniczy hamulec w tym względzie.

Dalej należy zauważyć, że Bolzano nie potrzebował liczby nieskończonej w prowadzonych przez siebie badaniach matematycznych, nie miał dla niej istotnych zastosowań „praktycznych". Była to sytuacja zupełnie odmienna od tej, w której znalazł się kilkadziesiąt lat później Cantor. Matematyk z Halle zastosował narzędzia topologiczne – pojęcie punktu skupienia i pojęcie pochodnej zbioru punktowego – w badaniach podstaw analizy. Potrzebne mu było pojęcie nieskończonej pochodnej, a potem i kolejnych pochodnych zbioru. To prostą drogą prowadziło do konieczności wprowadzenia pierwszej i drugiej porządkowej liczby pozaskończonej (∞, $\infty + 1$)[20]. Jak stwierdzono wyżej, taka „praktyczna" potrzeba wprowadzenia liczb pozaskończonych dla Bolzana nigdy nie powstała.

Kolejne prawdopodobne powody faktu niewprowadzenia przez Bolzana liczby nieskończonej będą się odwoływały już do tekstów praskiego matematyka. Jego rozproszone, przede wszystkim w *Paradoxien des Unendlichen*, uwagi powinny rzucić dodatkowe światło na wyjaśnianą kwestię.

Znanym faktem z dziejów matematyki jest to, że Bolzano w istotny sposób przyczynił się do zbudowania „nowoczesnych", arytmetycznych podstaw analizy matematycznej. Jest jednym z trzech autorów, którym matematyka zawdzięcza to dzieło. Obok niego wylicza się zazwyczaj A. Cauchy'ego oraz K. Weierstrassa. Jednym z filarów, na których Bolzano oparł swoją reformę podstaw analizy matematycznej, było systemowe usunięcie z tych podstaw wielkości niearchimedesowych – niespełniających aksjomatu Eudoksosa-Archimedesa. Tym samym wielkości aktualnie nieskończenie wielkie i przede wszystkim aktualnie nieskończenie małe, na których jeszcze w XVIII wieku fundowano analizę, znalazły się poza głównym „nurtem" matematyki.

Sam Bolzano nie był do końca konsekwentny. Wielkości aktualnie nieskończenie małe pojawiają się w jego badaniach w istotny sposób w czasie konstruowania liczb rzeczywistych. Praski matematyk w trakcie tej konstrukcji wprowadził wielkości niearchimedesowe równie ściśle i równie konsekwentnie, jak uczyniono to w latach 50. i 60. XX w. budując analizę niestandardową[21]. W ostatniej wielkiej pracy Bolzana, *Paradoxien des Unendlichen*, wielkości aktualnie nieskończenie małe są „pełnoprawnym" elementem Bolzanowskiego „świata matematycznego". Nie są one jednak nigdzie określane mianem „liczb" (nieskończenie małych), ale są nazywane właśnie „wielkościami". Dokładnie tak samo, mianem „wielkości" określany jest zbiór nieskończony – zbiór wszystkich liczb naturalnych, którego Bolzano nie chciał nazwać „liczbą"[22] (nieskończoną konkretną), ani nie chciał związać z nim – w opisany wyżej sposób (1) – pojęcia liczby (nieskończonej, abstrakcyjnej).

W tym miejscu pojawiają się istotne pytania. Po pierwsze: co to w ogóle jest liczba w pojęciu Bolzana? Po drugie: co to jest wielkość (również w pojęciu Bolzana)? I dalej: czy możliwe jest wyeksplikowanie różnicy między pojęciem liczby a pojęciem wielkości? To pozwoliłoby – być może – wyjaśnić, dlaczego Bolzano nie wiązał ze zbiorami nieskończonymi pojęcia liczby (nieskończonej), traktując je jednocześnie jako wielkości.

Wiadomo, że wskazanie generalnie, czym jest liczba, stanowi bardzo trudne przedsięwzięcie, o ile w ogóle jest możliwe. Odpowiedź na pytanie czym jest wielkość też jest ogromnie trudna. Można by podać aksjomatyczne dookreślenie wielkości pochodzące od Eudoksosa, ale w dziejach matematyki intuicje wiązane z tym pojęciem ulegały znacznym zmianom. Tym trudniej doszukiwać się odpowiedzi na trzecie pytanie.

W niniejszym opracowaniu podjęta zostanie krótka próba wyjaśnienia, jak Bolzano rozumiał pojęcie liczby, po to, by ewentualni udzielić odpowiedzi na tytułowe pytanie.

Bolzano wprowadził w *Reine Zahlenlehre* istotne rozróżnienie: mówił o liczbach w ścisłym tego słowa znaczeniu oraz o liczbach w dalszym znaczeniu tego słowa. Liczby w ścisłym znaczeniu tego słowa to wyłącznie liczby naturalne[23]. Innymi słowy: liczby to wyłącznie klasy abstrakcji obiektów zdefiniowanych w (DEF), a więc konkretnych liczb naturalnych. Tu można by się doszukiwać odpowiedzi na pytanie, dlaczego Bolzano nie wprowadził liczb nieskończonych. Odpowiedź brzmi: dlatego, że przy pomocy opisanej procedury, nie da się ich uzyskać – trzeba by bowiem wychodzić od wielości nieskończonych nie zaś skończonych jak w (DEF). Jednak dalej pozostaje pytanie: dlaczego Bolzano tak sztywno traktował pojęcie liczby, dlaczego tego pojęcia nie poszerzył.

Pozostawiając na razie tę ostatnią kwestię na boku wypada wyjaśnić, dlaczego Bolzano tak bardzo restryktywnie zdefiniował liczbę (w ścisłym tego słowa znaczeniu). Praski matematyk następująco wyjaśniał, dlaczego liczby wymierne, liczby urojone (zespolone) i rzeczywiste i wielkości aktualnie nieskończone (małe, wielkie) nie są liczbami w ścisłym tego słowa znaczeniu:

> „[...] przedstawienia, które wyrażane są przez znaki ½, $\sqrt{2}$, $\sqrt{-1}$, ∞, $1/\infty$, 0, itd., są samymi przedstawieniami liczb, którym nie odpowiada żaden przedmiot”[24].

Innymi słowy, znak „2” wyraża przedstawienie samo w sobie liczby dwa, któremu odpowiada pewien przedmiot, mianowicie liczba (naturalna) dwa. Tak jest w przypadku wszystkich liczb naturalnych.

Powstaje pytanie: do jakiej kategorii ontycznej należy liczba dwa, która podpada pod przedstawienie samo w sobie dwa? Czy należy ona do dziedziny przedmiotów nierzeczeczywistych (*nichtwirklich*), pozaczasowych i pozaprzestrzennych, czy też do dziedziny przedmiotów rzeczywistych (*wirklich*), czasowych i przestrzennych. Jeden z tekstów zamieszczonych w *Paradoxien des Unendlichen* prowadzi zdecydowanie do konkluzji, że w pojęciu Bolzana liczba dwa należy do dziedziny przedmiotów nierzeczywistych (*nichtwirklich*)[25].

Zatem z liczbą dwa nie można wiązać – w koncepcji Bolzana – jednego z obiektów zdefiniowanych w (DEF), czyli liczby konkretnej dwa. Jest tak dlatego, że każda wielość (*Vielheit*) jest całością (*Inbegriff*), zaś całość złożona z obiektów rzeczywistych (*wirklich*) jest przedmiotem rzeczywistym (*wirklich*)[26]. Innymi słowy: liczby konkretne Bolzana mogą być przedmiotami rzeczywistymi.

Zatem wzięta pod uwagę Bolzanowska liczba dwa i każda inna liczba (naturalna) może i powinna być utożsamiona z liczbą abstrakcyjną. Ta bowiem jest cantorowskim zbiorem, a więc może być traktowana jako przedmiot pozaczasowy i pozaprzestrzenny. Zatem znak „2" wyraża (nierzeczywiste) przedstawienie samo w sobie liczby dwa, której odpowiada nierzeczywisty przedmiot – liczba (abstrakcyjna) dwa. Nie trzeba dodawać, że dokładnie tak samo jest – według koncepcji Bolzana – w przypadku każdej innej liczby naturalnej, za wyjątkiem zera[27].

Natomiast zupełnie inaczej rzecz ma się – jak pokazuje to cytowany wyżej tekst Bolzana – w przypadku takich wielkości, jak aktualnie nieskończenie wielkie, aktualnie nieskończenie małe, liczby wymierne, liczby rzeczywiste, liczby urojone (zespolone). Dowolny znak z tego zakresu wyraża odpowiednie (nierzeczywiste) przedstawienie samo w sobie, pod które nie podpada żaden obiekt – ani z dziedziny obiektów nierzeczywistych, ani z dziedziny obiektów rzeczywistych. Tak więc „funkcję" danej liczby w szerszym znaczeniu, czy też wielkości (aktualnie nieskończonej małej czy też wielkiej) przejmuje samo nierzeczywiste przedstawienie samo w sobie. Można tylko dodać, że odpowiednich przedmiotów należałoby się raczej „spodziewać" w dziedzinie przedmiotów nierzeczywistych – tak jak to jest u Bolzana dla liczb naturalnych.

Trzeba w tym miejscu koniecznie wtrącić, że koncepcja Bolzana jest niekonsekwentna. Wykazano, że tak, jak w wypadku liczb naturalnych, które w koncepcji Bolzana można pojmować jako cantorowskie zbiory pewnych obiektów (wielości), również liczby rzeczywiste konstruowane przez niego są cantorowskimi zbiorami pewnych kongruentnych elementów. Mógł więc Bolzano owe cantorowskie zbiory kongruentnych elementów – tak jak w przypadku liczb naturalnych – potraktować jako nierzeczywiste przedmioty podpadające pod nierzeczywiste przedstawienia same w sobie odpowiednich liczb rzeczywistych. Na przykład, mógł uznać, że pod pojęcie samo w sobie wyrażane przez znak „$\sqrt{2}$" podpada odpowiedni cantorowski zbiór kongruentnych elementów. To, że Bolzano tego nie uczynił, jest świadectwem znacznej luki w jego ontologicznych podstawach arytmetyki.

Podobna uwaga odnosi się do wielkości aktualnie nieskończenie wielkich. Wystarczyłoby wziąć cantorowski zbiór wielości nieskończonych (klasę abstrakcji wyznaczoną przez relację równości wielości), których istnienie Bolzano akceptował, by – jak w przypadku abstrakcyjnych liczb naturalnych – otrzymać nierzeczywisty przedmiot podpadający pod przedstawienie samo w sobie wielkości (aktualnie) nieskończonej, wyrażanej przez symbol „∞". Wtedy status ontyczny wielkości (aktualnie) nieskończonej byłby dokładnie taki sam, jak abstrakcyjnych liczb naturalnych. Nie byłoby zatem tej przeszkody, która nie pozwalała określić Bolzanowi wielkości (aktualnie) nieskończonej mianem „liczby".

Ostatnie stwierdzenie można skomentować wcześniejszą konstatacją: wielkość nieskończona nie jest dla Bolzana liczbą w ścisłym tego słowa znaczeniu przede wszystkim dlatego, że nie można jej otrzymać w procesie stosującym jako jeden etapów procedurę (DEF).

Warto w tym miejscu przypomnieć, że Bolzano odmawiając wielkościom aktualnie nieskończenie wielkim (i małym) statusu liczb w ścisłym tego słowa znaczeniu wymienił je razem z liczbami wymiernymi, liczbami rzeczywistymi i liczbami urojonymi (zespolonymi). Czy automatycznie oznacza to, że praski matematyk wszystkie owe wielkości traktował jednakowo, tzn. wszystkim – a więc i wielkościom aktualnie nieskończonym – nadawał status liczb w szerszym tego słowa znaczeniu? Odpowiedź na to pytanie wydaje się być negatywna – wynika ona m.in. z § 28 *Paradoxien des Unendlichen*:

> „Przyznaję, że już pojęcie rachunku nieskończonych niesie pozór sprzeczności samej w sobie. Chcieć coś policzyć oznacza bowiem próbę określenia (zdeterminowania – *D. J.*) tego przez liczby. Jak jednak próbować określić (zdeterminować – *J. D.*) nieskończoność przez liczby – tę nieskończoność, która według naszego własnego wyjaśnienia ciągle musi być czymś takim, co traktujemy jako zbiór składający się z nieskończenie wielu części, tzn. jako zbiór, który jest większy, niż jakakolwiek liczba, a więc zbiór, który nie może zostać określony przez podanie liczby? – Lecz ta wątpliwość znika, kiedy ośmielimy się twierdzić, że powyższy rachunek nieskończoności nie ma na celu obliczenia (nieskończoności – *J. D.*), co właśnie na niej (nieskończoności – *J. D.*) nie jest możliwe przez żadną liczbę, mianowicie obliczenie nieskończonej wielości w sobie, lecz ma na celu określenie relacji pomiędzy (przedmiotami – *J. D.*) nieskończonymi; rzecz, która w pewnych przypadkach jest możliwa do przeprowadzenia, co chcemy pokazać na wielu przykładach"[28].

Z powyższego tekstu wynika, iż Bolzano inaczej traktował wielkości aktualnie nieskończenie wielkie, niż takie wielkości matematyczne jak liczby wymierne, liczby rzeczywiste, czy też liczby urojone (zespolone). Klasyfikował je „niżej" niż liczby w szerszym tego słowa znaczeniu. Powód tkwił w tym, że przy pomocy wielkości aktualnie nieskończenie małych nie można było – zdaniem Bolzana – „rachować". Nie można było zbudować ich rachunku, inaczej niż w wypadku takich wielkości, jak liczby wymierne, liczby rzeczywiste, liczby urojone (zespolone).

Skąd brało się wspomniane przekonanie Bolzana. Wynika ono najprawdopodobniej stąd, że praski matematyk był zdania, iż wszystkie zbiory (wielości) nieskończone są – używając późniejszego języka Cantora – tej samej mocy. Zatem wielości (i wielkości) nieskończone nie tworzą żadnej „skali" nieskończoności. Jedyne, co można czynić, to porównywać „wielkość" wielości nieskończonych przy pomocy relacji równości wielości [*rw*] (ta według Bolzana winna być zawsze taka sama) i teoriomnogościowej relacji inkluzji. Wydaje się, że właśnie tutaj może „tkwić" jeden – z całej palety, jak się okazuje – powodów, dla których Bolzano z wielkościami aktualnie nieskończonymi nie tylko nie związał pojęcia liczby w ścisłym tego słowa znaczeniu, ale także, jak się wydaje, liczby w szerokim tego słowa znaczeniu.

Oprócz naszkicowanej dotychczas palety przyczyn, dla których Bolzano – dysponując ku temu wszelkimi narzędziami – nie zdefiniował nieskończonej liczby kardynalnej, wydaje się istnieć jeszcze jedna przyczyna takiego stanu rzeczy. Ujawnia się ona w następującym sformułowaniu z *Paradoxien des Unendlichen*:

> „Kiedy bierzemy pod uwagę ciąg liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., to mamy świadomość, że zbiór liczb, które ten ciąg, poczynając od pierwszej (jednostki) do jakiejkolwiek, np. do liczby 6, zawiera, wyrażony jest zawsze przez tę ostatnią"[29].

Myśl Bolzana, zawartą w tym tekście, można oddać w ten sposób: jeśli jest dany ciąg kolejnych liczb naturalnych: 1, 2, ..., n-1, n, to mocą zbioru cantorowskiego $\{1, 2, \ldots, n\text{-}1, n\}$ jest n.

Warto zauważyć, że stwierdzenie Bolzana jakby „krążyło" intuicyjnie wokół definicji liczb porządkowych, a więc – w przypadku liczb skończonych – również liczb kardynalnych, podanej na początku XX w. przez J. von Neumanna. Matematyk pochodzący z Budapesztu definiował skończoną liczbę porządkową n jako cantorowski zbiór liczb ją poprzedzających, czyli $n = \{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$, przy czym $0 = \emptyset$. Można by też twierdzić, że liczba kardynalna n jest mocą cantorowskiego zbioru swoich poprzedników $\{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$.

Tutaj uwidacznia się zadziwiająca zbieżność podejść Bolzana i von Neumanna. Trzeba jednak też być świadomym różnic. Bolzano podchodzi do zagadnienia tak, że dany już jest „gotowy" zbiór wszystkich liczb naturalnych – liczba kardynalna będąca mocą zbioru jest sama elementem tegoż zbioru, tzn. $n \in \{1, 2, \ldots, n\text{-}1, n\}$. Natomiast w przypadku von Neumanna zbiór liczb naturalnych nie jest dany „z góry", kolejne, nowe liczby są „generowane" przez zbiór wszystkich poprzedników. Co więcej, przy podejściu Bolzana rozwiązanie w stylu von Neumanna – definiowanie kolejnych liczb kardynalnych – jest niemożliwe, byłoby bowiem tak, że n byłoby zawarte w generującym n zbiorze.

Ostatecznie zaś jest tak dlatego, że w ujęciu Bolzana zbiór liczb naturalnych rozpoczyna się od 1, natomiast w ujęciu von Neumanna od 0.

Podejście węgierskiego matematyka ma bardzo istotną zaletę. W „naturalny" sposób pozwala ono wprowadzić pierwszą pozaskończoną liczbę porządkową (kardynalną) ω ($\aleph_0$) na następującej zasadzie:

$0 = \emptyset$;
$1 = \{0\}$;
$2 = \{0, 1\}$;
$\ldots$;
$n = \{0, 1, \ldots, n\text{-}1\}$;
$\ldots$;
$\omega = \aleph_0 = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$.

Po prostu pierwsza porządkowa (kardynalna) liczba pozaskończona to zbiór wszystkich liczb naturalnych. Trzeba tylko przyjąć istnienie „gotowego" zbioru wszystkich liczb naturalnych, czyli zaakceptować istnienie paradygmatu nieskończoności aktualnej. Bolzano istnienie owego paradygmatu akceptował, ale nie był w stanie w powyższy sposób definiować kolejnych liczb kardynalnych (porządkowych), a lepiej powiedzieć, nie był w stanie wiązać liczby naturalnej n ze zbiorem wszystkich poprzedzających ją liczb. Powód był jeden – wymieniony już wcześniej – pierwszą Bolzanowską liczbą naturalną było 1 a nie 0.

Gdyby Bolzano przyjął jako pierwszą liczbę naturalną liczbę 0, to jego wyżej cytowany tekst przyjąłby prawdopodobnie następującą postać:

> Kiedy bierzemy pod uwagę ciąg liczb naturalnych: 0, 1,..., n, to mamy świadomość, że zbiór liczb, które ten ciąg, poczynając od pierwszej (zera) do n, zawiera, wyrażony jest zawsze przez liczbę $n+1$.

Każdy zbiór $\{0, 1, \ldots, n\}$ byłby, używając języka Bolzana, „wyrażany" przez pierwszą liczbę naturalną nie należącą do tego zbioru, co więcej, owo „wyrażanie" oznaczałoby – zgodnie z intuicjami zawartymi w oryginalnym tekście Bolzana – „liczebności", „moc" danego zbioru. Bolzano dysponowałby – w istocie – podanym wyżej schematem von Neumanna, za wyjątkiem wiersza pierwszego i ostatniego (liczba 0 byłaby niedefiniowana). Wtedy też – na zasadzie analogii – łatwo możnaby dojść do idei, by tak jak wszystkie poprzednie zbiory, również zbiór $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ związać z liczbą i to z liczbą nie należącą do owego zbioru. Ponieważ nie mogłaby to być żadna liczba naturalna – wszystkie one należą do zbioru $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ – musiałaby to być liczba nieskończona „wyrażająca", zgodnie z intuicjami Bolzana, „moc" zbioru $\{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$. Innymi słowy, wskazana analogia mogłaby prowadzić do „podniesienia" wielkości aktualnie nieskończonej ∞ do „rangi" liczby.

Jak już wcześniej podkreślano, Bolzano nie mógł dojść do powyższych wniosków przede wszystkim dlatego, że w jego systemie pierwszą liczbą naturalną była liczba 1 a nie liczba 0[30]. W związku z tym powstaje kluczowe pytanie dla prowadzonych badań: dlaczego praski matematyk nie zaliczał zera do zbioru liczb naturalnych?

Należy przypomnieć, że – w cytowanym wcześniej tekście – Bolzano, odmiennie niż liczby naturalne, nie zaliczył zera do liczb w ścisłym tego słowa znaczeniu. Powodem było to, że pod nierzeczywiste przedstawienie samo w sobie zera „wyrażane" przez znak „0" nie podpada żaden przedmiot[31]. Owo nierzeczywiste przedstawienie samo w sobie przejmuje „funkcje" liczby zero. Zatem ostatecznie w ontologii przedmiotów matematyki leży – brzemienny w skutkach, jak to pokazano – powód niezaliczenia liczby zero do zbioru liczb naturalnych.

Wypada zatem, konsekwentnie, zapytać: dlaczego według Bolzana pod nierzeczywiste przedstawienie liczby zero nie podpada żaden obiekt. Przypomnieć należy, że liczba naturalna to, w koncepcji Bolzana, przedmiot nierzeczywisty (abstrakcyjny, czyli pozaczasowy i pozaprzestrzenny). Jest to tzw. liczba abstrakcyjna, czyli klasa abstrakcji (cantorowski zbiór) wielości będących w relacji równości wielości z daną wielością (liczbą konkretną).

Gdyby na tej samej zasadzie próbować konstruować liczbę abstrakcyjną zero (liczbę naturalną zero), to trzeba by wyjść od czegoś, co trzeba by nazwać „wielością zerową", czyli ostatecznie – przez analogię z podaną na początku tej pracy definicją wielości – od cantorowskiego zbioru pustego. Bolzano zaś takiego zbioru nie znał i, o ile wiadomo, nie rozważał jego istnienia (przyjęcia w swojej koncepcji). Może to wiązać się z tym, że praski matematyk swoją teorię, na której starał się nabudować matematykę, pojmował bardziej jako mereologię a nie teorię mnogości w duchu cantorowskim[32].

Zatem ostatnią część prowadzonych badań można konkludować stwierdzeniem, że istotnego powodu, dla którego najprawdopodobniej Bolzano nie wprowadził nieskończonej liczby kardynalnej należy się doszukiwać w niezaliczeniu zera do zbioru liczb naturalnych. To zaś miało swe uzasadnienie w jego ontologii przedmiotów matematycznych, a jeszcze precyzyjniej w braku w jego koncepcji (odpowiednika) cantorowskiego zbioru pustego.

W prowadzonych w niniejszej pracy badaniach stwierdzono, że Bolzano dysponował wszystkimi koniecznymi narzędziami dla wprowadzenia liczby nieskończonej. Pokazano, że fakt, iż tego nie uczynił, wynika z całej palety przyczyn.

Tradycja matematyczna, którą zastał Bolzano, była daleka od wprowadzania liczb nieskończonych z trzech przynajmniej powodów. Po pierwsze, zbiory nieskończone były paradoksogenne, a zatem przy ich pomocy nie chciano definiować liczb. Po drugie, z antynomiogennych podstaw analizy XVII i XVIII

w. wyeliminowano dopiero co, na początku XIX w., wielkości niearchimedesowe, w tym (symbole oznaczające) wielkości aktualnie nieskończenie wielkie. Po trzecie, matematycy niechętnie rozciągali pojęcie liczby na nowe dziedziny. Przykładem były opory we wprowadzeniu liczb zespolonych (urojonych).

Dalej stwierdzono, że, inaczej niż Cantor (pozaskończona indeksacja pochodnych zbiorów), Bolzano nie potrzebował liczb nieskończonych do żadnych zastosowań „praktycznych".

Analizując teksty Bolzana stwierdzono, że nie chciał on określać wielkości aktualnie nieskończenie wielkiej – którą operował – mianem „liczby w ścisłym tego słowa znaczeniu" z dwóch powodów. Po pierwsze (przyczyna ontologiczna), jego (błędnym) zdaniem, nie ma przedmiotów abstrakcyjnych podpadających pod nierzeczywiste przedstawienie samo w sobie wielkości aktualnie nieskończenie wielkiej. Po drugie zaś, takiej wielkości nie można otrzymać w procesie stosującym jako pierwszy z etapów opisaną procedurę (DEF).

Bolzano klasyfikował wielkości aktualnie nieskończenie wielkie „niżej" niż liczby w szerszym tego słowa znaczeniu (liczby wymierne, rzeczywiste, zespolone) dlatego, iż przy ich pomocy nie można – zdaniem Bolzana – „rachować", nie można zbudować ich rachunku. Wynikało prawdopodobniej to stąd, że praski matematyk był przekonany, iż wszystkie zbiory (wielości) nieskończone są – używając późniejszego języka Cantora – tej samej mocy. Zatem nie tworzą one żadnej „skali" nieskończoności. Jedyne, co można czynić, to porównywać „wielkość" wielości nieskończonych przy pomocy relacji równości wielości [*rw*] i teoriomnogościowej relacji inkluzji.

Istotnego powodu, dla którego najprawdopodobniej Bolzano nie wprowadził nieskończonej liczby kardynalnej należy się doszukiwać w niezaliczeniu zera do zbioru liczb naturalnych. To zaś miało swe uzasadnienie w jego ontologii przedmiotów matematycznych, a jeszcze precyzyjniej w braku w jego koncepcji (odpowiednika) cantorowskiego zbioru pustego. Brak zera w zbiorze liczb naturalnych nie pozwalał Bolzanie „konstruować" kolejnych liczb porządkowych (kardynalnych) metodą von Neumanna, w efekcie nie pozwolił mu związać całego zbioru liczb naturalnych z nieskończoną liczbą porządkową (kardynalną).

Powyżej podsumowano przyczyny, dla których Bolzano nie zdefiniował nieskończonej liczby kardynalnej. Ich „paleta" rozciąga się od wpływu zastanej tradycji matematycznej na myśl Bolzana, po przyjmowaną przez niego ontologię przedmiotów matematyki. Aby jednak zasadnie postawić tytułowe pytanie niniejszej pracy trzeba było najpierw stwierdzić, że praski matematyk dysponował wszystkimi – analogicznymi jak Cantor – narzędziami, by wprowadzić liczbę nieskończoną. Obydwaj wypracowali te narzędzia od podstaw i samodzielnie. Zatem bardzo blisko było do kolejnego – po np. definicji ciągłości funkcji Bolzana i Cauchy'ego – „odkrycia (prawie) równoległego" w matematyce. Przy okazji pokazano też, że praski matematyk wcale nie był odległy od definiowania liczb porządkowych (kardynalnych) metodą von Neumanna. Skłania to do głębokiej filozoficznej zadumy nad fenomenem odkryć równoległych, czy odkryć niezależnych w matematyce, a dokładniej nad „mechanizmami" do nich prowadzącymi. Niniejsza praca jest – w pojęciu jej autora – jednym z przyczynków przygotowujących materiał historyczny do takich badań.

Przypisy

[1] G. Cantor nie posługiwał się zasadniczo terminem *unendliche Zahl*, preferował natomiast termin *transfinite Zahl*. Ich polskie odpowiedniki są stosowane w niniejszej pracy zamiennie.

[2] Por. G. Cantor: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 2*, „Mathematische Annalen" 13 (1880), Bd. 17, s. 355–358.

[3] Por. G. Cantor: *List do K. Laßwitza z 18.02.1884*, [w:] G. Cantor: *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*. „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik", 51 (1887) Bd. 91, s. 81–125. W liście tym Cantor podaje ogólną definicję liczby kardynalnej. Podpadają pod nią również nieskończone liczby kardynalne.

[4] Studium Bolzanowskiego wyrażenia „*es gibt*", które może być traktowane jako kwantyfikator egzystencjalny, zawiera praca E. Morschera; por. E. Morscher: *Das logische An-sich bei Bernard Bolzano*. Salzburg 1973, s. 142n.

[5] B. Bolzano: *Wissenschaftslehre* I [GA 1 11 2], § 73, s. 137 (strony *Wissenschaftslehre* podawane są według wydania krytycznego GA = *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*, Hrsg. von E. Winter, J. Berg, F. Kambartel, J. Loužil, B. van Rootselaar. Stuttgart-Bad Cannstatt 1985–2000 Friedrich Fromann Verlag. Pierwsze wydanie tej pracy ukazało się w roku 1837: B. Bolzano: *Dr. B. Bolzanos Wissenschaftslehre. Versuch einer ausfürlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter*. Seidel, Sulzbach 1837).

[6] Bolzano określa zamiennie przedmioty rzeczywiste (*wirkliche*) jako te, które: „*haben Sein*", „*haben Dasein*", „*haben Existenz*" (w odróżnieniu od przedmiotów nierzeczywistych). Szczególnie to ostatnie określenie musi zwracać uwagę. Okazuje się bowiem, że u Bolzana pojęcia „*es gibt*" i (*er, sie, es*) „*existiert*" nie są tożsame. „*Das* (*etwas*) *existiert*", w odróżnieniu od „*es gibt*" można orzec jedynie o przedmiotach rzeczywistych, czasoprzestrzennych, ale nie o przedmiotach nierzeczywistych: nietemporalnych i nieprzestrzennych. „*Es gibt*" można natomiast orzec o każdym Bolzanowskim przedmiocie, również nierzeczywistym. Jest to zatem pojęcie szersze, nadrzędnie w stosunku do (*er, sie, es*) „*existiert*". Użycie takiej terminologii generuje oczywiście problemy w badaniach prowadzonych w języku polskim. Badania E. Morschera (por. E. Morscher: *Das logische An-sich bei Bernard Bolzano*, s. 142n), w których Bolzanowskie „*es gibt*" interpretowane jest jako kwantyfikator egzystencjalny, pozwalają jednak tłumaczyć to wyrażenie za pomocą terminu „istnieje", natomiast o przedmiotach, o których orzeka się, iż (*er, sie, es*) „*existiert*", mówi się po prostu w niniejszej pracy – nawiązując do terminologii Bolzanowskiej – że są one (przedmiotami) rzeczywistymi (*wirkliche*).

[7] Por. B. B o l z a n o: *Wissenschaftslehre* I [GA 1 11 2], § 54, s. 48–49.

[8] Por. F. K r i c k e l: *Teil und Inbegriff. Bernard Bolzanos Mereologie*. Sankt Augustin 1994, s. 93.

[9] Por. J. D a d a c z y ń s k i: *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*. Tarnów 2006, s. 252. Rekonstruowana definicja wielości jest tu istotnie zmieniona w stosunku do pierwotnego projektu F. Krickela; por. F. K r i c k e l: *Teil und Inbegriff. Bernard Bolzanos Mereologie*, s. 94.

[10] Por. B. B o l z a n o: *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig 1851, 1921². Definicja zbioru (wielości) nieskończonej zawarta jest w § 20. tej pracy Bolzana. Jest ona antycypacją klasycznej Dedekindowskiej definicji zbioru nieskończonego.

[11] Por. F. K r i c k e l: *Teil und Inbegriff. Bernard Bolzanos Mereologie*, s. 226.

[12] Por. J. D a d a c z y ń s k i: *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, s. 377–385 (lematy 19, 20, 21).

[13] Por. J. D a d a c z y ń s k i: *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, s. 386–390 (lemat 23).

[14] „Denken wir eine Reihe, deren erstes Glied eine Einheit von der Art A ist, jedes nachfolgende aber aus seinem vorhergehenden auf die Weise abgeleitet wird, daß wir einen ihm gleichen Gegenstand nehmend, denselben mit einer neuen Einheit von der Art A zu einer Summe verbinden: so werden offenbar alle in dieser Reihe vorkommenden Glieder – mit Ausnahme des ersten, das eine bloße Einheit von der Art A darbietet – Vielheiten von der Art A sein und dies zwar solche, die ich [...] (und selbst mit Inbegriff des ersten Gliedes) Zahlen, bestimmter: ganze Zahlen nenne"., B. B o l z a n o: *Paradoxien des Unendlichen*, § 8.

[15] „Bilden wir uns eine *Reihe*, deren erstes Glied [ein]e Einheit beliebiger Art A, jedes andere Glied [a]ber eine Summe ist, welche zum Vorschein kommt, indem [wi]r einen Gegenstand, der dem nächstvorhergehenden [G]liede gleich ist, mit einer neuen der Art *A* verbinden: so heißt mir ein jedes Glied dieser Reihe insofern eine *Zahl*, als [ic]h mir dieses Glied durch eine Vorstellung aufgefaßt denke, welche uns seine Entstehungsart angibt. Zur Unterscheidung von anderen Reihen, welche zum Vorschein kommen, wenn statt der Dinge von der Art *A* Dinge von einer anderen Art zur Einheit angenommen werden, nenne ich die Glieder der vorhin betrachteten Reihe *Zahlen von der Art A* oder Zahlen, denen *die Einheit A zu Grunde liegt*. Die Beschaffenheit, vermöge deren ein jedes dieser Glieder zu einer Zahl wird (die es somit behält, wie auch die Gegenstände selbst, die man zu Einheiten annimt, gewechselt werden mögen) nenne ich eine *Zahl* in der *abstracten Bedeutung* des Wortes, oder eine *abstracte Zahl*; und im Gegensatze mit solchen abstracten Zahlen (d.h. den bloßen Beschaffenheiten) nenne ich die Glieder selbst *concrete* Zahlen oder Zahlen in der *concreten* Bedeutung des Wortes. Diese concret[e]n Zahlen werden in Deutschen, besonders mit Ausnahme der ersten oder der Einheit, auch *Anzahlen* genannt. Endlich die ganze Reihe selbst nenne ich die *Zahlenreihe*, oder zum Unterschiede von anderen Reihen, deren Glieder ebenfalls Zahlen sind, die *natürliche Reihe der Zahlen*, oder mit Einigen auch *die Reihe der natürlichen Zahlen*". B. B o l z a n o: *Reine Zahlenlehre* [*Bernard Bolzano-Gesamtausgabe* 2 A 8]. Hrsg. J. B e r g. Stuttgart-Bad Cannstatt 1976, § [1], s. 15.

[16] Trzeba dodać: chodzi tylko o te wielości, które „generowane" są przy pomocy (DEF), a więc tylko o wielości skończone.

[17] Por. J. Dadaczyński: *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, s. 290.

[18] Warto w tym kontekście jeszcze raz zwrócić uwagę na pełny tekst defininicji liczb konkretnych z *Paradoxien des Unendlichen*: „Denken wir eine Reihe, deren erstes Glied eine Einheit von der Art A ist, jedes nachfolgende aber aus seinem vorhergehenden auf die Weise abgeleitet wird, daß wir einen ihm gleichen Gegenstand nehmend, denselben mit einer neuen Einheit von der Art A zu einer Summe verbinden: so werden offenbar alle in dieser Reihe vorkommenden Glieder – mit Ausnahme des ersten, das eine bloße Einheit von der Art A darbietet – Vielheiten von der Art A sein und dies zwar solche, die ich **endliche oder zählbare Vielheiten, auch wohl geradezu (und selbst mit Inbegriff des ersten Gliedes) Zahlen, bestimmter: ganze Zahlen nenne** [podkr. *J. D.*]". B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, § 8. Pozostałe cytowane wypowiedzi Bolzana zawierają zdecydowane odrzucenie koncepcji liczby nieskończonej: "Woraus denn folgt, daß der Inbegriff all dieser Sätze eine Vielheit besitze, die größer als jede Zahl, d. h. die unendlich ist"., B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, § 13; „Wenn jede Zahl' [...] 'ihrem Begriffe nach eine bloß endliche Menge ist [...]'". B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, § 15; „Die Menge aller Zahlen zeigt sich sofort als ein nicht zu bestreitendes Beispiel einer unendlich großen Größe. Als einer Größe, sage ich; freilich aber nicht als Beispiel einer unendlich großen Zahl; denn eine Zahl ist diese unendlich große Vielheit allerdings nicht zu nennen, wie wir nur eben im vorigen Paragraphen bemerkten". B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, § 16; „Wie aber will man das Unendliche durch Zahlen zu bestimmen versuchen – jenes Unendliche, das unserer eigenen Erklärung nach stets etwas solches sein muß, das wir als eine aus unendlich vielen Teilen bestehende Menge, d. h. als eine Menge betrachten, die größer als seine jede Zahl ist, die sonach unmöglich durch die Angabe einer bloßen Zahl bestimmt warden kann?". B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, § 28.

[19] „Die Menge aller Zahlen zeigt sich sofort als ein nicht zu bestreitendes Beispiel einer unendlich großen Größe. Als einer Größe, sage ich; freilich aber nicht als Beispiel einer unendlich großen Zahl; denn eine Zahl ist diese unendlich große Vielheit allerdings nicht zu nennen, wie wir nur eben im vorigen Paragraphen bemerkten". B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, § 16.

[20] Por. G. Cantor: *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr 2*. „Mathematische Annalen" 13 (1880), Bd. 17, s. 355–358. Pierwsza pozaskończona liczba porządkowa została później oznaczona przez Cantora innym symbolem: „ω".

[21] Por. J. Dadaczyński: *Bernard Bolzano i idea logicyzmu*, s. 212–225.

[22] „Die Menge aller Zahlen zeigt sich sofort als ein nicht zu bestreitendes Beispiel einer unendlich großen Größe. Als einer Größe, sage ich; freilich aber nicht als Beispiel einer unendlich großen Zahl; denn eine Zahl ist diese unendlich große Vielheit allerdings nicht zu nennen, wie wir nur eben im vorigen Paragraphen bemerkten". B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, § 16.

23 Por. B. B o l z a n o: *Reine Zahlenlehre*, § [2], s. 17. Dyskusyjny jest w koncepcji Bolzana status liczb całkowitych ujemnych. Jednak aby pozostać w niniejszym opracowaniu przy jego istotnym wątku zagadnienie to nie zostanie podjęte.

24 „[...] die Vorstellungen, die durch die Zeichen ½, √2, √–1, ∞, 1/∞, 0 usw. ausgedrückt werden, bloße Vorstellungen sind, denen kein Gegenstand entspricht". B. B o l z a n o: *Reine Zahlenlehre*, § [2], s. 17.

25 „Ich betrachte es nun als genügend dargetan und verteidigt, daß es unendliche Mengen, wenigstens unter den Dingen, die keine Wirklichkeit haben, gäbe; daß namentlich die Menge aller Wahrheiten an sich eine unendliche sei. Man wird in ähnlicher Weise, wie §13 geschlossen wurde, auch zugeben, daß die Menge aller Zahlen (der sogenannten natürlichen oder ganzen, deren Begriff wir § 8 erklärten) unendlich sei". B. B o l z a n o: *Paradoxien des Unendlichen*, § 15.

26 „Wenn die Gegenstände, von deren Art die Eiheit **A** angenommen wird, etwas Wirkliches sind; so stellt die concrete Eins einen Gegenstand von dieser Art, somit etwas Wirkliches vor; und wenn es dieser wirklichen Gegenstände mehrere z. B. 2, 3, 4, ... gibt, so stellen auch die concreten Zahlen: zwey **A**, drey **A**, vier **A** unvidersprechlich etwas Wirkliches vor. [...] Das Gegentheil von diesem Allen gibt es, wenn jene Gegenstände, von deren Art die Einheit angenommen wird, nicht zu den wirklichen Dingen gehören z. B. bloße Begriffe oder Sätze an sich sind. Denn da ein Satz an sich nichts Existierendes ist, so ist auch ein Inbegriff solcher Sätze nichts Existierendes". B. B o l z a n o: *Reine Zahlenlehre*, § [14], s. 26.

Ponieważ w drugiej części cytowanego tekstu Bolzano mówi, na zasadzie przeciwieństwa, ogólnie o całościach (*ein Inbegriff solcher Sätze*) a nie tylko – jak w pierwszej części cytatu – o liczbach konkretnych (*die concreten Zahlen*), które są – jak się okaże dalej – wielościami jednostek, dlatego można z całego cytatu, jak się wydaje, wyciągnąć wnioski ogólne, czyli dotyczące całości: [1] każda całość, która złożona jest wyłącznie z części rzeczywistych (*wirkliche*), jest przedmiotem rzeczywistym, natomiast [2] każda całość, która złożona jest wyłącznie z części nierzeczywistych, jest przedmiotem nierzeczywistym.

27 Z cytowanego tekstu Bolzana wynika, że znak „0" wyraża przedstawienie samo w sobie liczby zero, pod który nie podpada jednak żaden przedmiot (ani w dziedzinie przedmiotów nierzeczywistych, ani w dziedzinie przedmiotów rzeczywistych). Zatem przedstawienie samo w sobie liczby zero przejmuje „funkcję" liczby zero.

28 „Schon der Begriff einer Rechnung des Unendlichen hat, ich gestehe es, den Anschein, einen Selbstwiderspruch zu enthalten. Denn etwas berechnen wollen, heißt doch, eine Bestimmung desselben durch Zahlen versuchen. Wie aber will man das Unendliche durch Zahlen zu bestimmen versuchen – jenes Unendliche, daß unserer eigenen Erklärung nach stets etwas solches sein muß, das wir als eine aus unendlich vielen Teilen bestehende Menge, d. h. als eine Menge betrachten, die größer als eine jede Zahl ist, die sonach unmöglich durch die Angabe einer bloßen Zahl bestimmt werden kann? – Doch diese Bedenklichkeit verschwindet, wenn wir erwägen, daß eine regelrecht vorgehende Rechnung des Unendlichen nicht eine Berechnung, was eben an ihm durch keine Zahl bestimmbar ist, nämlich nicht die Berechnung der unendlichen Vielheit an sich, sondern nur eine Bestimmung des Verhältnisses zwischen dem einen und dem

anderen Unendlichen bezwecke; eine Sache, die in gewissen Fällen allerdings ausführbar ist, wie wir durch mehrere Beispiele zeigen wollen". B. B o l z a n o: *Paradoxien des Unendlichen*, § 28.

[29] „Wenn wir die Reihe der natürlichen Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

betrachten: so werden wir gewahr, daß die Menge der Zahlen, die diese Reihe, anzufangen von der ersten (der Einheit) bis zu irgendeiner z. B. der Zahl 6, enthält, immer durch diese letzte selbst ausgedrückt wird". B. Bolzano: *Paradoxien des Unendlichen*, § 15.

[30] Prowadziło to w systemie Bolzana do paradoksalnych konsekwencji: „'Wenn jede Zahl' dürfte man sagen, 'ihrem Begriffe nach eine bloß endliche Menge ist, wie kann die Menge aller Zahlen eine unendliche sein?' Wenn wir die Reihe der natürlichen Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

betrachten: so werden wir gewahr, daß die Menge der Zahlen, die diese Reihe, anzufangen von der ersten (der Einheit) bis zu irgendeiner z. B. der Zahl 6, enthält, immer durch diese letzte selbst ausgedrückt wird. Somit muß ja die Menge aller Zahlen genau so groß als die letzte derselben und somit selbst eine Zahl, also nicht unendlich sein.

Das Täuschende dieses verschwindet auf der Stelle, sobald man sich nur erinnert, daß in der Menge aller Zahlen in der natürlichen Reihe derselben keine die letzte stehe: daß somit der Begriff einer letzten (höchsten) Zahl ein gegenstastandloser, weil einen Widerspruch in sich schließender, Begriff sei. Denn nach dem, in der Erklärung jener Reihe (§ 8) angegebenen Bildungsgesetze derselben hat jedes ihrer Glieder wieder ein folgendes". B. B o l z a n o: *Paradoxien des Unendlichen*, § 15.

[31] „[...] die Vorstellungen, die durch die Zeichen $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{-1}$, ∞, $1/\infty$, 0 usw. ausgedrückt werden, bloße Vorstellungen sind, denen kein Gegenstand entspricht". B. B o l z a n o: *Reine Zahlenlehre*, § [2], s. 17.

[32] Por. F. K r i c k e l: *Teil und Inbegriff. Bernard Bolzanos Mereologie*.