

**Henryk Gurgul, Roland Mestel,
Robert Syrek**

**Kopule i przyczynowość w badaniach
związków pomiędzy zmiennymi
finansowymi wybranych spółek z
DAX**

Managerial Economics 3, 7-20

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach
dozwolonego użytku.

Henryk Gurgul *, Roland Mestel **, Robert Syrek ***

Kopule i przyczynowość w badaniach związków pomiędzy zmiennymi finansowymi wybranych spółek z DAX

1. Wprowadzenie

Zgodnie z powszechnie przyjętym poglądem, ceny akcji danej spółki odzwierciedlają opinię inwestorów na temat jej przyszłej sytuacji. Poglądy te są oparte na dostępnej informacji dotyczącej analizowanej spółki. Nowa informacja napływająca na rynek powoduje rewizję oczekiwań inwestorów i staje się głównym źródłem zmian cen.

Przyjmuje się, że ceny mogą także nie reagować na nową informację, ponieważ zwykle inwestorzy różnie interpretują tę samą informację. Często jedni inwestorzy oceniają daną informację jako dobrą, podczas gdy inni interpretują ją zdecydowanie negatywnie. Można stąd wysnuć wniosek, że zmiany cen są uśrednionymi skutkami napływu nowych informacji na rynek.

Tak jak ceny, również wielkość obrotów reaguje na nowe informacje napływające na rynek. Inaczej jednak niż w przypadku cen zmiana oczekiwań inwestorów prowadzi zawsze do wzrostu obrotów, bo zmiana wielkości obrotów jest sumą reakcji inwestorów na nowe informacje.

Analiza łącznego zachowania cen i wielkości obrotów pozwala na lepsze poznanie mikrostruktury rynku akcji. Ma to także wpływ na badania m.in. nad opcjami i kontraktami *futures*.

* Katedra Ekonomii i Ekonometrii Wydziału Zarządzania AGH, Kraków.

** Institute of Banking and Finance, University of Graz, Austria.

*** Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii, Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki, Kraków.

Odpowiedź na pytanie, czy znajomość jednej zmiennej finansowej np. zmienności stóp zwrotu może poprawić krótkoterminowe prognozy innych zmiennych finansowych jest ważna zarówno dla ekonometryka, jak i przede wszystkim uczestników rynku [1], [5], [6]. Dlatego w ostatnich latach rośnie ilość prac poświęconych zależnościom pomiędzy zmiennymi finansowymi a przede wszystkim stopami zwrotu, ich zmiennością i wielkością obrotów.

Większość badaczy skupiła się na analizie zależności równoczesnych (por. [9], [11], [13], [14], [15], [16], [18], [19], [20], [20], [21], [24], [25]). W literaturze przedmiotu ustalono występowanie na niektórych rynkach zależności równoczesnych pomiędzy wielkością obrotów a zmiennością stóp zwrotu. W niektórych pracach jak np. w [9], [16] i [17] wskazano na związki równoczesne pomiędzy stopami zwrotu a wielkością obrotów.

W pracy [12] zajęto się związkami dynamicznymi, przyczynowymi w sensie Grangera. Z badań empirycznych przedstawionych w tej pracy wynika istotna obustronna przyczynowość pomiędzy stopami zwrotu i wielkością obrotów. W pracy o empirycznym charakterze Chordia et al. [4] podkreślili, że w wypadku akcji o wysokim wolumenie obrotów, obserwuje się szybką odpowiedź rynku na nadchodzącą informację. Poza wymienionymi pracami, koncentrującymi się na zależnościach równoczesnych bądź dynamicznych na rynkach krajowych Lee i Rui [19] zajęli się badaniem związków dynamicznych pomiędzy zmiennymi finansowymi z trzech największych na świecie rynków akcji, to jest amerykańskiego, brytyjskiego i japońskiego. Autorzy stwierdzili dominującą rolę rynku amerykańskiego.

W literaturze przedmiotu przeważają prace podające wyniki badań zależności równoczesnych i przyczynowych pomiędzy indeksami. Celem tego artykułu jest przedstawienie wyników badań przyczynowości w sensie Grangera oraz zależności równoczesnych za pomocą kopul pomiędzy zmiennymi finansowymi dla wybranych spółek niemieckich, notowanych w indeksie DAX. Autorzy wybrali duże spółki, które przez długi czas należały do DAX.

W badaniach wykazano istnienie zależności równoczesnych pomiędzy stopami zwrotu, ich zmiennością i wielkością obrotów oraz podano wyniki badań przyczynowości między tymi zmiennymi.

Pozostała część artykułu zawiera opis metodologii i danych (rozdziały 2 i 3). W rozdziale czwartym przedstawiono wyniki badań empirycznych, a w rozdziale piątym sformułowano wnioski.

2. Metodologia

Do badania zależności równoczesnych zastosowano teorię kopul. Przyczynowość, czyli zależności dynamiczne były badane za pomocą liniowych i nieliniowych testów przyczynowości. Najpierw przedstawimy krótko podstawowe pojęcia z zakresu kopul.

2.1. Kopule jako miary zależności

Korelacja jako miara zależności wykazuje istotne braki. Zmienne, dla których liczymy korelację muszą mieć skończoną wariancję. W przeciwnym wypadku korelacji liniowej nie da się zdefiniować. Ta okoliczność rodzi problemy szczególnie wtedy, kiedy analizujemy zależności w tzw. grubych ogonach. Poza tym dobrze znany jest fakt, iż z niezależności dwóch zmiennych losowych wynika ich nieskorelowanie. Implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa. Tylko w wypadku rozkładu normalnego, niezależność jest równoważna nieskorelowaniu. Liniowy współczynnik korelacji nie spełnia innego aksjomatu dobrze zdefiniowanej miary, a mianowicie nie jest niezmienniczy ze względu na monotoniczne transformacje jednej ze zmiennych, dla których obliczamy współczynnik korelacji. Poza tym współczynnik korelacji nie jest miarą odporną na zależność dwóch zmiennych losowych. Oznacza to, że pojedyncza („odstająca”) obserwacja może mieć dowolnie duży wpływ na liniowy współczynnik korelacji.

Poważne nieporozumienia mogą wyniknąć przy stosowaniu liniowego współczynnika korelacji w procesie konstrukcji optymalnego portfela. Brak korelacji pomiędzy dwoma rynkami może skłaniać inwestorów do budowy portfela z akcji firm działających na obu rynkach. Inwestor może sądzić, że w ten sposób zdwersyfikował portfel i w istotny sposób zmniejszył swoje ryzyko. Tymczasem jak wynika z obserwacji, mimo małej korelacji lub nawet braku korelacji między rynkami akcji, kryzysy na giełdach wybuchają zwykle równocześnie.

Lepszą miarą zależności od korelacji bezwarunkowej jest korelacja warunkowa. Powszechnie wiadomo, że korelacje warunkowe wyliczane przy różnych warunkach różnią się istotnie. Dane empiryczne potwierdzają, że korelacje warunkowe wyliczone przy warunku dużych zmian cen lub wielkości obrotów są wyższe niż przy warunku małych ruchów cen lub wielkości obrotów.

W literaturze zagranicznej efekt ten nazywa się „correlation breakdown”. Z tego właśnie powodu nawet warunkowy współczynnik korelacji liniowej nie odzwierciedla w sposób właściwy stopnia rzeczywistej zależności. Powodem jest to, że nawet w wypadku rozkładu normalnego współczynnik korelacji jest wyższy w fazie turbulencji na giełdzie niż w fazie stabilizacji.

Reasumując, chociaż współczynnik korelacji warunkowej dostarcza więcej informacji niż współczynnik korelacji bezwarunkowej, to jednak musi być interpretowany z dużą ostrożnością. Wyniki obliczeń mogą bowiem dawać błędne wskazówki inwestorom.

Głównym powodem błędnych wskazań współczynnika korelacji jest to, że nie uwzględnia on struktury zależności pomiędzy zmiennymi losowymi, w szczególności zależności w tzw. prawym oraz lewym ogonie rozkładów. Dlatego coraz częściej są wykorzystywane do pomiaru zależności między zmiennymi finansowymi

kopule. Kopula jest wielowymiarową dystrybuantą z jednostajnymi na przedziale $[0,1]$ rozkładami brzegowymi. Ścisłą definicję kopuli można znaleźć np. w [2], [7], [8], [10], [22], [23]. Tam też są opisane wszelkie własności kopuli.

Ograniczymy się tylko do podania podstawowego twierdzenia w teorii kopul sformułowanego przez Sklara:

Twierdzenie 1. *Niech H będzie łączną dystrybuantą z rozkładami brzegowymi F_1 i F_2 . Wtedy istnieje kopula C taka, że dla wszystkich x_1 i x_2 w R*

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (1)$$

Jeśli F_1 i F_2 są ciągłe, to kopula C jest jedyna; w przeciwnym wypadku, C jest jednoznacznie wyznaczona na brzegach $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2$. I na odwrót, jeśli C jest kopulą oraz F_1 i F_2 są dystrybuantami brzegowymi, to funkcja H zdefiniowana wyżej jest łączną dystrybuantą z brzegami F_1 oraz F_2 .

Charakteryzacja 1. *Niech H będzie dystrybuantą o brzegach F_1 i F_2 oraz niech C będzie kopulą. Wtedy dla wszystkich (u_1, u_2) z $[0,1]^2$ zachodzi*

$$C(u_1, u_2) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)),$$

gdzie: F_i^{-1} jest odpowiednim kwantylem.

W literaturze wymienia się trzy specjalne typy kopul. Kopulę $\Pi(u_1, u_2) = u_1 u_2$ nazywa się kopulą niezależności. Funkcje $W(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$ i $M(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$ są nazywane ograniczeniami Fréchet-Hoeffdinga. Reprezentują one odpowiednio doskonałą ujemną i doskonałą dodatnią zależność. Zatem dla każdej kopuli C zachodzi podwójna nierówność określona za pomocą twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Niech C będzie kopulą. Wówczas dla wszystkich u_1, u_2 z przedziału $[0,1]$ zachodzi:*

$$W(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq M(u_1, u_2).$$

Za pomocą kopul można modelować zależności w ogonach rozkładów. Zależności w prawym i lewym ogonie są mierzone za pomocą wskaźników podanych niżej.

Definicja 2. Jeśli istnieje dla dwuwymiarowej kopuli C granica

$$\lim_{u \uparrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lambda_U,$$

to C wykazuje zależność w prawym (górnym) ogonie, gdy $\lambda_U \in (0,1]$ i niezależność, gdy $\lambda_U = 0$.

Jeśli dwuwymiarowa kopula C spełnia warunek

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} = \lambda_L,$$

to dla $\lambda_L \in (0,1]$ ma miejsce w lewym (dolnym) ogonie zależność dwóch zmiennych losowych, zaś dla $\lambda_L = 0$ zmienne losowe są niezależne w lewym ogonie.

Podstawową klasę kopul stanowią tzw. kopule eliptyczne, do których należą kopula Gaussa oraz t -kopula (zmienne losowe mają dwuwymiarowe rozkłady Gaussa i t -Studenta). Są one używane do modelowania zależności, gdy występuje symetria zależności w ogonach rozkładów. Bardziej przydatne są (stosowane w tym artykule) tzw. kopule Archimedesesa uwzględniające ewentualny brak symetrii zależności w ogonach. Osobną klasę stanowi kopula Placketta. Kopule Archimedesesa bazują na pojęciu funkcji pseudoodwrotnej:

Definicja 3. Niech będzie dana funkcja ciągła i silnie malejąca z przedziału

$[0, 1]$ do $[0, \infty]$, taka, że $\varphi(1) = 0$. Funkcją pseudoodwrotną do φ nazywamy funkcję $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow [0,1]$ daną przez

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Twierdzenie 3. Niech φ będzie funkcją pseudoodwrotną. Niech $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ będzie funkcją daną przez

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)). \quad (3)$$

C jest kopulą wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest wypukłą.

Funkcja φ jest nazywana generatorem kopuli. Jeśli $\varphi(1) = \infty$ (ma to miejsce gdy $\varphi^{[-1]} = \varphi_{-1}$), to funkcja φ jest nazywana ścisłym generatorem, a kopula ścisłą kopulą.

Poza zszyfrowaną kopulą Joe-Claytona [23] wszystkie kopule zastosowane w tym artykule są kopulami jednoparametrycznymi. Więcej szczegółów dotyczących kopul wykorzystanych w obliczeniach (definicje, zakres parametrów, współczynniki zależności w ogonach) można znaleźć w Nelsen [22].

2.2. Przyczynowość w sensie Grangera

Do analizy związków dynamicznych pomiędzy zmiennymi finansowymi wykorzystujemy pojęcie przyczynowości. Pojęcie to wywodzi się z filozofii i jest obecnie używane w: fizyce, naukach inżynierskich, biologii i medycynie, psychologii, religii, kosmologii oraz statystyce, ekonometrii i socjologii. Dla potrzeb tych ostatnich dziedzin ścisłą definicję i testy przyczynowości sformułował Granger [12]. Jego definicja pozwala sprawdzać hipotezę, że jedna zmienna jest przyczyną drugiej.

Mówimy, że zmienna Y jest przyczyną (*ang. Granger cause*) w sensie Grangera zmiennej X (co zapisujemy $Y \xrightarrow{G.C} X$), gdy znajomość przeszłych wartości Y może poprawić krótkoterminowe prognozy bieżącej i przyszłych wartości X , pod warunkiem, że wszystkie inne informacje pozostają niezmienione (*ceteris paribus*).

Testy przyczynowości użyte w pracy oparte są na wektorowym modelu autoregresji. W modelu tym zakłada się stacjonarność zmiennych.

Dlatego na wstępie badań przetestowano stacjonarność stóp zwrotu, zmienności stóp zwrotu i wielkości obrotów. Zastosowano test ADF, a także sprawdzono istnienie trendu liniowego i nieliniowego w szeregach czasowych wymienionych zmiennych [3].

Test ADF wykazał, że szeregi stóp zwrotu i wielkości obrotów wybranych do badania spółek są stacjonarne.

W celu przetestowania przyczynowości wyestymowano za pomocą MNK parametry modelu VAR o postaci:

$$y_t = \mu_0 + \sum_{j=1}^k a_{0,j} y_{t-j} + \sum_{j=1}^k b_{0,j} x_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

$$x_t = \mu_1 + \sum_{j=1}^k a_{1,j} x_{t-j} + \sum_{j=1}^k b_{1,j} y_{t-j} + \xi_t. \quad (5)$$

Dla każdej spółki parametry opóźnień były szacowane za pomocą kryteriów automatycznych AIC, BIC oraz testów ilorazu wiarygodności. Sprawdzano też autokorelację reszt.

Sprawdzano hipotezę zerową, że $b_{0,j}$ ($b_{1,j}$), gdzie $j = 1, \dots, k$ są wszystkie równe zero. Jeśli hipoteza zerowa musiała być odrzucona na typowym poziomie istotności, to przyjmowano istnienie istotnej statystycznie przyczynowości od X (Y) do Y (X).

Aby przetestować hipotezę zerową stosowano test F :

$$F = \frac{SSE_0 - SSE}{SSE} \cdot \frac{N - 2k - 1}{k}, \quad (6)$$

gdzie: SSE_o – to suma kwadratów reszt modelu z restrykcjami, tzn. gdy $b_{o,1} = b_{o,2} = \dots = b_{o,k} = 0$ ($b_{1,1} = b_{1,2} = \dots = b_{1,k} = 0$),
 SSE – suma kwadratów reszt modelu bez restrykcji,
 N – liczba obserwacji.

Statystyka (6) ma – przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej – rozkład F -Snedecora Fishera o k stopniach swobody w liczniku oraz $N - 2k - 1$ stopniach swobody w mianowniku.

3. Dane

Zbiór danych obejmuje szeregi czasowe stóp zwrotu wyliczone na podstawie cen zamknięcia i wielkości obrotów wybranych spółek niemieckich, wchodzących w skład indeksu DAX charakteryzującego giełdę frankfurcką. DAX opisuje zachowanie 30 największych spółek niemieckich ze względu na wartość księgową i kapitalizację rynkową. W pracy skoncentrowano się na spółkach z DAX, ponieważ handel nimi jest najbardziej intensywny. To pozwoliło uniknąć niedostatku z powodu małej płynności, które mogłyby wpłynąć na wyniki obliczeń.

Dane uzyskano z bazy danych Reutersa. Dane te sprawdzono i skorygowano, uwzględniając dywidendy i podziały akcji (splity).

W analizie zostały wykorzystane ciągle (logarytmiczne) stopy zwrotu. Jako wielkość obrotów przyjęto liczbę akcji, które zmieniły właściciela. W obliczeniach wykorzystano logarytmy tak zdefiniowanych obrotów. Jako aproksymację zmienności stóp zwrotu – przyjęto ich moduły (inna możliwość to przyjęcie w tym charakterze kwadratów stóp zwrotu – wyniki w obu wypadkach są jednak bardzo podobne).

Inaczej niż w przypadku stóp zwrotu, wielkość obrotów charakteryzuje zmienną w czasie średnią. Dlatego najpierw usunięto trend z szeregu czasowego wielkości obrotów.

4. Wyniki badań empirycznych

W tabeli 1 zamieszczamy podstawowe statystyki opisowe analizowanych szeregów czasowych (przez kurtozę oznaczamy nadwyżkę kurtozy ponad 3, bo tyle wynosi kurtoza standaryzowanego rozkładu normalnego).

Tabela 1

Statystyki opisowe szeregów czasowych wybranych spółek z DAX

		Średnia	Media- na	Odch. Stand.	Kurtoza	Skoś- ność	Min.	Maks.
Allianz	log-ret	0,0001	0,0000	0,0218	5,4545	-0,0563	-0,1514	0,1341
	volatility	0,0152	0,0107	0,0157	11,6276	2,7156	0,0000	0,1514
	log-vol	13,6488	13,5891	1,2122	-1,1139	-0,0427	10,1610	16,6142
Bayer	log-ret	0,0003	0,0001	0,0202	26,1326	0,8808	-0,1941	0,3301
	volatility	0,0138	0,0099	0,0147	74,2251	5,1509	0,0000	0,3301
	log-vol	14,6876	14,6721	0,7022	0,8666	-0,0223	9,2103	17,4025
BMW	log-ret	0,0003	0,0003	0,0207	3,3603	0,0320	-0,1207	0,1283
	volatility	0,0146	0,0102	0,0146	6,8710	2,1379	0,0000	0,1283
	log-vol	14,2456	14,2888	0,6683	0,4594	-0,1983	11,7702	17,1775
Commerz Bank	log-ret	0,0001	0,0003	0,0209	5,3840	0,1108	-0,1330	0,1544
	volatility	0,0143	0,0098	0,0152	10,7485	2,6118	0,0000	0,1544
	log-vol	14,4183	14,4013	0,8284	-0,2819	0,1022	11,7727	17,3802
Linde	log-ret	0,0002	0,0000	0,0178	3,8224	0,0720	-0,1433	0,1105
	volatility	0,0127	0,0088	0,0125	8,7889	2,2106	0,0000	0,1433
	log-vol	12,3178	12,4872	1,1228	0,2178	-0,5152	6,9651	15,3947
Lufthansa	log-ret	0,0002	0,0000	0,0217	4,6205	-0,0017	-0,1641	0,1568
	volatility	0,0154	0,0110	0,0153	11,1309	2,4296	0,0000	0,1641
	log-vol	14,1369	14,2632	1,0149	0,0830	-0,5541	9,6777	16,5599
Siemens	log-ret	0,0004	0,0005	0,0217	3,9632	0,0990	-0,1244	0,1616
	volatility	0,0151	0,0101	0,0156	7,8654	2,2478	0,0000	0,1616
	log-vol	15,1150	15,1500	0,5890	0,1984	-0,0564	12,8347	17,4302
Thyssen	log-ret	-0,0001	-0,0005	0,0213	5,9333	0,0830	-0,1845	0,1446
	volatility	0,0147	0,0100	0,0154	12,9390	2,6987	0,0000	0,1845
	log-vol	13,3044	13,1567	1,1411	-0,3674	0,1680	9,5644	17,0418

4.1. Wyniki badania zależności równoczesnych za pomocą kopul

Jako przykład zastosowania kopul, zbadano strukturę zależności pomiędzy logarytmem wolumenu i zmiennością reprezentowaną przez wartości bezwzględne stóp zwrotu. Wykorzystano klasyczne kopule eliptyczne, kopule Archimedeasa (wraz z ich wersjami obróconymi – *rotated*), kopule Placketta i symetryzowaną Joe-Claytona. Reszty z modeli VAR poddano modelowaniu za pomocą jednego z modeli ARCH, GARCH, GJR, EGARCH. Potwierdzenie wyjaśnienia warunkowej wariancji modelowanych szeregów sprawdzono testem ARCH Engla oraz testem Ljunga-Boxa zastosowanym do kwadratów reszt. Otrzymane reszty zestandaryzowano. Parametry kopuli były szacowane semiparametryczną metodą największej wiarygodności (CML – *Canonical Maximum Likelihood*). Idea metody polega na przekształceniu danych (w naszym wypadku zestandaryzowanych reszt z modeli typu GARCH) z wykorzystaniem dystrybuanty empirycznej, a następnie znalezieniu:

$$\hat{\alpha}_{CML} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \hat{u}_2^t; \alpha),$$

gdzie: $c(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$ jest gęstością szacowanej kopuli.

Wyniki estymacji parametrów przedstawia poniższa tabela (górny indeks przy parametrach oznacza zajmowane miejsce w rankingu 4 najlepszych kopul, względem kryterium informacyjnego Akaike).

Tabela 2

Wyniki estymacji i ranking czterech „najlepszych” kopul

Spółka	Plackett	Zsymertyzowany Joe-Clayton	Gumbel	Obrócony Clayton	
Allianz	3,6265 ¹	0,3839	0,0097 ⁴	1,3750 ²	0,6776 ³
Bayer	3,2705 ¹	0,3770	0,0027 ³	1,3509 ⁴	0,6535 ²
BMW	3,1052 ¹	0,3462	0,0025 ³	1,3216 ⁴	0,5931 ²
Commerz Bank	3,4610 ¹	0,3957	0,0010 ³	1,3724 ⁴	0,6852 ²
Linde	2,8668 ¹	0,3232	0,0016 ³	1,2964 ⁴	0,5507 ²
Lufthansa	3,3763 ¹	0,3722	0,0038 ⁴	1,3525 ²	0,6427 ³
Siemens	3,4839 ¹	0,3772	0,0162 ³	1,3689 ²	3,4839 ⁴
Thyssen	3,3992 ¹	0,3858	0,0042 ²	1,3630 ⁴	0,6715 ³

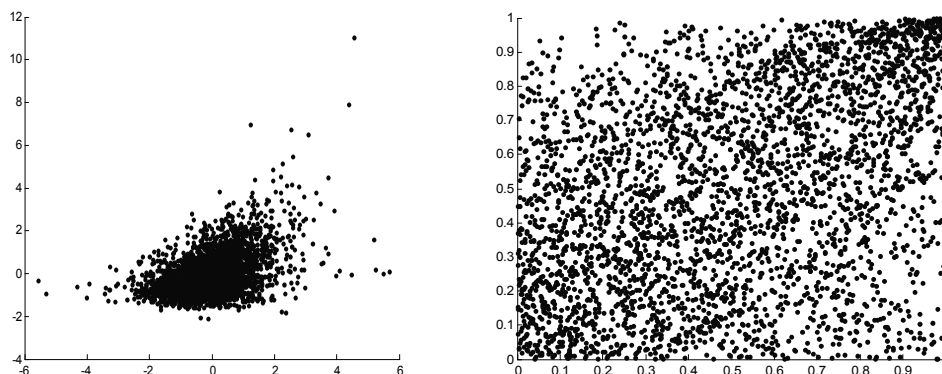
Każda (z wyjątkiem kopuli Placketta, której współczynniki zależności w ogonach są równe zero) charakteryzuje się zależnością w górnym ogonie. Tabela 3 prezentuje wartości współczynników zależności w ogonach.

Tabela 3

Zależności zmiennych finansowych w ogonach rozkładów

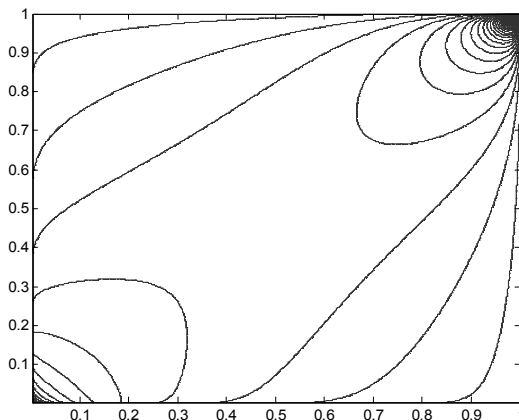
Spółka	Zsymertyzowany Joe-Clayton		Gumbel		Obrócony Clayton	
	λ_L	λ_U	λ_L	λ_U	λ_L	λ_U
Allianz	0,0097	0,3839	0,0000	0,3445	0,0000	0,3595
Bayer	0,0027	0,3770	0,0000	0,3296	0,0000	0,3462
BMW	0,0025	0,3462	0,0000	0,3104	0,0000	0,3108
Commerz Bank	0,0010	0,3957	0,0000	0,3429	0,0000	0,3636
Linde	0,0016	0,3232	0,0000	0,2931	0,0000	0,2841
Lufthansa	0,0038	0,3722	0,0000	0,3305	0,0000	0,3401
Siemens	0,0162	0,3772	0,0000	0,3408	0,0000	0,3549
Thyssen	0,0042	0,3858	0,0000	0,3372	0,0000	0,3562

Dla każdej ze spółek najlepiej dopasowana okazała się kopula Placketta, jednak wykresy potwierdzają występowania zależności w górnym ogonie. W tej sytuacji każda z kopul oznaczona indeksem „2” wydaje się bardziej adekwatna.



Rys. 1. Wykresy reszt dla spółki Allianz

Jako ilustrację przedstawiamy wykresy dotyczące spółki Allianz. Rysunek 1 przedstawia wykresy zestandaryzowanych reszt z modelu GJR (lewy) oraz reszt po przekształceniu do rozkładu jednostajnego z wykorzystaniem dystrybuanty empirycznej (prawy). Rysunek 2 przedstawia kontury funkcji gęstości kopuli Gumbela z parametrem 1,375.



Rys. 2. Kontury funkcji gęstości kopuli Gumbela dla spółki Allianz

4.2 . Wyniki testów przyczynowości w sensie Grangera

Za pomocą rozszerzonego testu Dickeya-Fullera przeprowadzono badanie występowania pierwiastków jednostkowych. Okazało się, że nie występuje integracja w szeregach, czyli są one typu $I(0)$.

W następnym kroku dla każdej pary (stopy zwrotu R , log-wolumenu V i zmienności $|R|$) oszacowano parametry wektorowych modeli autoregresyjnych VAR.

Wybór rzędu opóźnienia modeli był oparty na testach ilorazu wiarygodności oraz kryteriach informacyjnych. Wybrano opóźnienia, które gwarantowały brak autokorelacji reszt (do testowania autokorelacji wykorzystano test Ljungu-Boxa).

Tabela 4 przedstawia wartości F testu dotyczącego braku liniowej przyczynowości w sensie Grangera. Jak wynika z tej tabeli nie ma związku przyczynowego pomiędzy stopami zwrotu a wielkością obrotów. Wyniki empiryczne wskazują na możliwy przyczynowy związek pomiędzy stopami zwrotu a ich zmiennością.

Jeżeli przyjąć zmienność jako miarę ryzyka, to wynik ten potwierdza tezę, że stopy zwrotu (przeciętne stopy zwrotu) zależą (dodatnio) od wielkości ryzyka.

Bardzo prawdopodobny jest też związek przyczynowy od zmienności stóp zwrotu do wielkości obrotów, ale nie na odwrót.

Tabela 4Wartości krytyczne testu F wraz z istotnością (1%-**, 5%-*)

Zależność	Allianz	Bayer	BMW	Comm. Bank	Linde	Lufth.	Siemens	Thyssen
$R \rightarrow V$	1,717 **	1,081	1,006	0,492	1,574	0,888	1,285	0,223
$V \rightarrow R$	0,936	1,260	0,820	0,639	1,664	0,472	1,103	1,460
$R \rightarrow R $	3,101 **	5,971 **	2,967	2,870 **	3,361 **	3,325 **	3,110 **	3,249 **
$ R \rightarrow R$	1,655 *	2,193	2,236 **	1,507 *	2,199 **	1,994 **	1,486	4,185 **
$ R \rightarrow V$	2,043 **	2,297 **	1,675 *	2,282 **	2,496 **	1,854 *	1,893 **	3,647 **
$V \rightarrow R $	1,210	1,006	1,184	1,931 *	0,684	1,541	1,460	2,888 **

5. Wnioski

Badanie związków równoczesnych i przyczynowych pomiędzy stopami zwrotu, ich zmiennością i wielkością obrotów jest ważnym zarówno teoretycznie, jak i praktycznie kierunkiem badań nad rynkami kapitałowymi.

Z naszych badań wynika, że strukturę zależności równoczesnych dobrze oddają kopule. Pozwalają one badać zależności pomiędzy zmiennymi finansowymi nie tylko globalnie – dla pełnego zakresu zmienności tych zmiennych, ale i lokalnie – w lewym i prawym ogonie rozkładów prawdopodobieństwa tych zmiennych. Jest to istotna zaleta kopul, gdyż z punktu widzenia inwestora szczególnie ważne są właśnie zależności dla wartości ekstremalnych. Ustalenie zależności lokalnych w ogonach rozkładów dostarcza inwestorowi pozytywnej informacji. Korzystając z niej inwestor może z jednej strony (obserwując zależności w lewym ogonie) próbować uchronić się przed znacznymi stratami. Z drugiej strony, znając strukturę zależności w prawym ogonie, inwestor może się przekonać do inwestycji mogącej mu przynieść istotne korzyści.

Badania potwierdziły przydatność liniowych testów przyczynowości do testowania związków dynamicznych pomiędzy stopami zwrotu, ich zmiennością i wielkością obrotów.

Z testów tych wynika brak istotnych statystycznie związków przyczynowych pomiędzy stopami zwrotu, a wielkościami obrotów.

Takie związki mogą mieć miejsce pomiędzy stopami zwrotu a ich zmiennością. Badania wykazały istotną statystycznie przyczynowość od zmienności stóp zwrotu do wielkości obrotów. Wynik ten oznacza, że podwyższona zmienność obrotów może być symptomem nadchodzącej wzmożonej aktywności handlowej inwestorów.

Literatura

- [1] Acker D., *Stock return volatility and dividend announcements*, "Review of Quantitative Finance and Accounting" 1999, 12, s. 221–242.
- [2] Bouye E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T., *Copulas for finance - A reading guide and some applications*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, 2000, Working Paper.
- [3] Charemza W., Deadman D., *New directions in econometric practice*, wyd. 2, Edward Elgar, Cheltenham 1997.
- [4] Chordia T., Subrahmanyam A., Anshuman, V.R., *Trading activity and expected stock returns*, "Journal of Financial Economics" 2001, 59, s. 3–32.
- [5] Clark P., *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices*, "Econometrica" 1973, 41, s. 135–155.
- [6] Copeland T.E., *A model of asset trading under the assumption of sequential information arrival*, "Journal of Finance" 1976, 31, s. 1149–1168.
- [7] Embrechts P., Lindskog F., McNeil A.J., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, w: "Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance", rd. S.T. Rachev. Elsevier North Holland 2003. Chapter 8, s. 329–384.
- [8] Embrechts P., McNeil A.J., Straumann D., *Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls*, w: "Risk Management: Value at Risk and Beyond", ed. M.A.H. Dempster. Cambridge University Press, Cambridge 2002.
- [9] Fleming J., Kirby C., Ostdiek B., *Stochastic volatility, trading volume, and the daily flow of information*, "Journal of Business" 2006, 79, s. 1551–1590.
- [10] Frees E. W., Valdez E. A., *Understanding relationships using copulas*, "North American Actuarial Journal" 1998, 2, s. 1–25
- [11] Gallant R., Rossi P., Tauchen G., *Stock prices and volume*, "Review of Financial Studies" 1992, 5, s. 199–242.
- [12] Granger, C.W.J., *Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods*, "Econometrica" 1969, 37, s. 424–438.
- [13] Gurgul H., Majdosz P., Mestel R., *On the Empirical Linkages between Stock Prices and Trading Activity on the German Stock Market*, w: H. Fleuren, D. Hertog, P. Kort (eds), "Operations Research Proceedings 2004" (Selected Papers), Springer-Verlag, Tilburg 2005, s. 288–296.
- [14] Gurgul H., Mestel R., Schleicher C. *Stock Market Reactions to Dividend Announcements: Empirical Evidence from the Austrian Stock*, "Financial Markets and Portfolio Management" 2005, 17, s. 332–350.

- [15] Hiemstra C., Jones J., *Testing for linear and nonlinear Granger causality in the stock price - volume relation*, "Journal of Finance" 1994, 49, s. 1639–1664.
- [16] Jain P., Joh G., *The dependence between hourly prices and trading volume*, "Journal of Financial and Quantitative Analysis" 1988, 23, s. 269–283.
- [17] Jung R.C., Liesenfeld R., *Testing the bivariate mixture hypothesis using German stock market data*, "European Financial Management" 1996, 2, s. 273–297.
- [18] Karpoff J., *The relation between price changes and trading volume: A survey*, "Journal of Financial and Quantitative Analysis" 1987, 22, s. 109–126.
- [19] Lee B-S., Rui O., *The dynamic relationship between stock returns and trading volume: Domestic and cross-country evidence* "Journal of Banking and Finance" 2002, 26, s. 51–78.
- [20] Mestel, R., Gurgul, H., *ARIMA Modeling of Event Induced Stock Price Reactions in Austria*, „Central European Journal of Operations Research" 2003, 11, s. 317–333.
- [21] Mestel R., Gurgul H., Schleicher C., *Capital Market Efficiency-An Empirical Analysis of the Dividend Announcement Effect for the Austrian Stock Market*, w: U. Leopold-Wildburger, F. Rendl, G. Waescher (red.), "Operations Research 2002", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo 2003, s. 315–320.
- [22] Nelsen. R., *An Introduction to Copulas*, Springer-Verlag, New York 1999.
- [23] Patton A., *Modelling asymmetric exchange rate dependence*, "International Economic Review" 2006, 47, s. 527–556.
- [24] Smirlock M., Starks L., *An empirical analysis of the stock price–volume relationship*, "Journal of Banking and Finance" 1988, 12, s. 31–41.
- [25] Tsay R.S., *Analysis of financial time series*, John Wiley & Sons, 2002.