

# Henryk Gurgul, Robert Syrek

---

## Ryzyko i długa pamięć w modelach warunkowej wariancji

---

Managerial Economics 4, 53-69

---

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej [bazhum.muzhp.pl](http://bazhum.muzhp.pl), gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

Henryk Gurgul \*, Robert Syrek \*\*

## Ryzyko i długa pamięć w modelach warunkowej wariancji

---

### 1. Wstęp

Inwestorzy giełdowi powinni uwzględniać przede wszystkim dwa parametry charakteryzujące daną inwestycję na giełdowym rynku akcji. Są nimi oczekiwana stopa zysku oraz stopień ryzyka. Ta ostatnia wielkość mówi nam, o ile zrealizowana stopa zwrotu może się różnić od oczekiwanej. Różnica ta wynika z faktu, iż rzeczywiste warunki gospodarowania mogą być inne od tych, które przewidywał inwestor.

Niekiedy pojęcia ryzyka i niepewności stosuje się zamiennie [1], [4], [5], [6], [11], [17], [19], [20], [22], [24], [27], [28], [33], [37]. W literaturze finansowej nie są to jednak pojęcia tożsame. Ryzyko jest rodzajem niepewności, którą można skwantyfikować. Można więc powiedzieć, że niepewność jest pojęciem szerszym niż ryzyko. Inwestor potrafiący określić ryzyko jest w lepszej sytuacji niż inwestor narażony na niepewność, niepotrafiący różnym możliwym zdarzeniom przypisać prawdopodobieństw ich zajścia.

Oczekiwana stopa zysku jest jednym z podstawowych kryteriów, jakimi kieruje się inwestor przy podejmowaniu decyzji o zakupie papierów wartościowych. Oczekiwana stopa zysku oznacza w istocie przyszłą stopę zwrotu tzn. stopą zwrotu, która może być osiągnięta w bliższej lub dalszej przyszłości. Stopa zysku papierów

---

\* Katedra Ekonomii i Ekonometrii, Wydział Zarządzania, Akademia Górniczo-Hutnicza, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: h.gurgul@neostrada.pl

\*\* Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii, Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki w Krakowie, ul. św. Filipa 17, 31-150 Kraków, e-mail: rsyrek@wsei.edu.pl

wartościowych jest zmienną losową. Oznacza to, że stopa zysku może przyjmować określone wartości z pewnymi prawdopodobieństwami, których suma wynosi jeden. Wartość oczekiwanej stopy zysku można wyznaczyć w postaci średniej ważonej możliwych do uzyskania stóp zwrotu danego papieru wartościowego, dla której wagami są prawdopodobieństwa osiągnięcia tych stóp zwrotu. Możliwe jest także inne podejście do określenia stopy zysku. Warunkiem wyznaczenia oczekiwanej stopy zwrotu jest znajomość rozkładu prawdopodobieństwa tych stóp.

Najczęściej prawdopodobieństwa te szacuje się na podstawie danych z przeszłości. Ma to sens, gdy zachowanie się papieru wartościowego w przyszłości jest w dużym stopniu zdeterminowane tym, jak kształtowały się jego stopy zwrotu w przeszłości.

Drugą podstawową wielkością charakteryzującą papier wartościowy jest jego ryzyko. Chodzi tu głównie o ryzyko niezrealizowania się oczekiwanej stopy zwrotu. Ryzyko to wynika głównie z faktu, że nabywca danego papieru wartościowego, w szczególności akcji, uzyskuje prawo do czerpania dochodów z tytułu posiadania tego papieru dopiero w przyszłości. Chodzi tu na przykład o prawo do otrzymania dywidendy lub procentu. Na większe ryzyko narażone są akcje w porównaniu z obligacjami, bo np. emitent akcji może, ale nie musi wypłacać akcjonariuszom dywidendę. Jeśli chodzi o obligacje, to ich posiadacze w momencie zakupu wiedzą, jakiego oprocentowania mogą się spodziewać. Ryzyko obligacji może wynikać z zagrożenia bankructwem emitenta. Przyjmuje się, że obligacje rządowe są całkowicie wolne od ryzyka. Występowanie ryzyka papierów wartościowych wynika ze zróżnicowaniem możliwych do realizacji stóp zwrotu z tytułu posiadania danego papieru wartościowego lub obrotu nim. Im większe to zróżnicowanie, czyli im większa wariancja stóp zwrotu, tym mniejsze prawdopodobieństwo realizacji oczekiwanej stopy zysku, a zatem tym większe ryzyko.

Na możliwość prognozowania stóp zwrotu, a więc i ryzyko ma wpływ istnienie lub brak tzw. długiej pamięci w szeregach czasowych zmiennych charakteryzujących giełdowe rynki akcji [24], [30].

Długa pamięć, zwana też własnością długoterminowej zależności, ujawnia się poprzez autokorelację obserwacji tworzących szereg czasowy i to autokorelację wysokiego rzędu [2], [3] [7], [8], [13], [18], [25], [26], [30], [31], [32], [34], [35], [36]. Autokorelacja ta może oznaczać istnienie zależności pomiędzy obserwacjami nawet znacznie odległymi czasowo. Zjawisko długiej pamięci odkrył brytyjski hydrolog Harold Edwin Hurst [25], który zajmował się badaniem autokorelacji wylewów Nilu w Egipcie.

Ważnymi charakterystykami szeregu czasowego są funkcja autokorelacji (ang. *autocorrelation function*, skrót ACF) i funkcja autokorelacji cząstkowej (ang. *partial autocorrelation function*, skrót PACF). W przypadku istnienia własności długiej pamięci funkcja autokorelacji ACF opada w tempie hiperbolicznym, a więc powoli. Szereg czasowy posiadający własność długiej pamięci ma

w dziedzinie spektralnej rozkład o niskiej częstotliwości. Szeregi czasowe o krótkiej pamięci, cechują się istotnymi autokorelacjami tylko niskich rzędów. Oznacza to, że obserwacje, które oddziela nawet stosunkowo niewielki przedział czasu nie są już skorelowane.

Szeregi z krótką pamięcią dają się stosunkowo łatwo rozpoznać, bowiem z jednej strony w dziedzinie czasu ACF szybko zanika, a z drugiej – w dziedzinie spektralnej występują rozkłady o wysokiej częstotliwości. Szeregi czasowe, które dają się opisać za pomocą modelu liniowego typu ARMA mają krótką pamięć. Występowanie długiej pamięci ogranicza możliwości stosowania tradycyjnych modeli liniowych szeregów czasowych. Prawa ekonomiczne mają przeważnie naturę stochastyczną (tzn. ujawniają się dopiero w „masie” przypadków), poza tym związki między zmiennymi ekonomicznymi mają najczęściej charakter nieliniowy. W związku z tym modele martyngałowe (zakładające prognozę np. ceny akcji na poziomie zrealizowanym w ostatnim okresie) nie mogą wynikać z zasady arbitrażu, ponieważ nowa, napływająca na rynek informacja nie może być całkowicie „odizolowana”.

Istotne trudności powoduje zjawisko długiej pamięci przy wycenie instrumentów pochodnych za pomocą metod martyngałowych. Jeśli odpowiedni ciągły proces stochastyczny wykazuje długą pamięć, to martyngałowe metody wyceny mogą zawodzić. Jeśli występuje długa pamięć, to najczęściej zawodzą procedury statystyczne stosowane np. w kontekście modeli wyceny aktywów.

W teorii finansów rozważa się trzy rodzaje efektywności rynków finansowych: słabą, półsilną i silną. W literaturze przedmiotu podaje się wyniki badań empirycznych nad efektywnością rynków akcji. Z publikacji tych wynika, że rozwinięte rynki akcji, a także tzw. rynki wschodzące, wykazują co najmniej efektywność informacyjną w sensie słabym i półsilnym. Ten ostatni rodzaj efektywności zachodzi wtedy, gdy wszyscy uczestnicy rynku mają równy dostęp do publicznej informacji, zaś ceny reagują natychmiast na nową, istotną informację, która dotarła na rynek i to tylko w chwili jej dotarcia.

W literaturze finansowej panował pogląd, że istnienie długiej pamięci jest, przynajmniej do pewnego stopnia, sprzeczne z hipotezą efektywności rynku w sensie półsilnym. W nowszych pracach autorzy doszli do przekonania, że jest to tylko sprzeczność pozorna. Jeśli występuje długa pamięć, to ceny i/lub wielkość obrotów mogą reagować nie tylko w dniu dotarcia informacji do uczestników rynku. Reakcja może trwać przez wiele dni. Występowanie długiej pamięci świadczy o istnieniu składowej systematycznej w szeregu czasowym, która może być prognozowana. Nawet odległe czasowo stopy zwrotu czy wielkości obrotów wykazują istotną autokorelację.

Stąd można wyprowadzić wniosek, że znajomość historycznych stóp zwrotu bądź historycznych wielkości obrotów może być pomocna w odgadnięciu przyszłych stóp zwrotu lub przyszłych wielkości obrotów. Stąd wynika możliwość zy-

sków spekulacyjnych na tego rodzaju rynku. W świetle teorii rynku efektywnego spekulacyjne zyski nie są jednak możliwe. Widać więc, że istnienie długiej pamięci w szeregach finansowych, pochodzących z danego rynku, jeśli nawet nie przeczy efektywności informacyjnej, to co najmniej stawia ją pod znakiem zapytania.

Długa pamięć może występować nie tylko w stopach zwrotu, ale i w ich warunkowej wariancji. Naszą podstawową hipotezą badawczą, jest iż uwzględnienie długiej pamięci w warunkowej wariancji jest istotne, bo poprawia własności statystyczne modeli a co za tym idzie jakość opartych na nich prognoz. Drugą tezą jest, że kombinacje modelu FIAPARCH z rozkładem uwzględniającym grube ogony (lub/i asymetrię) pozwala na uzyskanie wiarygodnych prognoz VaR (a także na właściwie oszacowane miary ryzyka VaR w próbie).

W pracy wykorzystano następujące modele:

- modele dla warunkowej wariancji (warunkowego odchylenia standardowego): RISKMETRICS (parametr 0.94), GARCH, APARCH, FIGARCH, FIAPARCH,
- modele dla warunkowego rozkładu reszt: normalny, *t*-Studenta oraz skośny *t*-Studenta.

Następną część artykułu stanowi rozdział drugi poświęcony miarom ryzyka i modelom długiej pamięci dla warunkowej wariancji. W rozdziale trzecim zostały przedstawione empiryczne wyniki badań dotyczących postawionych w pracy hipotez badawczych. W rozdziale czwartym zamieszczono podsumowanie uzyskanych wyników.

## 2. Miary ryzyka i modele długiej pamięci dla szeregu czasowego warunkowej wariancji

### 2.1. Miary ryzyka

Wartość narażona na ryzyko (ang. *Value at Risk* – “VaR”) jest definiowana jako maksymalna strata z tytułu posiadania danego portfela przy założonym horyzoncie czasowym i przy założonym poziomie ufności. VaR jest miarą ryzyka, na które są narażone banki i inne instytucje finansowe [5], [29].

Wielkość ta daje możliwość przyjęcia intuicyjnych wymagań, dotyczących regulacji w obszarze instytucji finansowych. Wartość VaR umożliwia ustalenie bardzo prostej polityki przez inwestora, a mianowicie dla danego poziomu gotówki wybiera się taki portfel, że prawdopodobieństwo straty przekraczającej zadany poziom gotówki (w wybranym horyzoncie czasowym) jest odpowiednio niskie. Z technicznego punktu widzenia VaR na poziomie istotności  $\alpha$  nie jest niczym innym jak  $\alpha$  kwantylem zysku i straty rozkładu prawdopodobieństwa portfela. Jeśli

pierwotnym celem jest zabezpieczenie regulacyjne, takie jak na przykład wymogi kapitałowe dla banku, wówczas kwantyl ten jest zwykle bardzo niski (często jest przyjmowany na poziomie 1% oraz 5%).

Oznaczmy przez  $L$  zmienną losową, określającą stratę instrumentu finansowego. Wartość narażoną na ryzyko na poziomie  $\alpha$  (poziom tolerancji) definiujemy jako

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in R, P(L > l) \leq 1 - \alpha\},$$

czyli najmniejszą liczbę  $l$  taką, że prawdopodobieństwo sytuacji, gdy  $L$  przekracza  $l$  jest niewiększe niż  $1 - \alpha$ . Parametrem, który nie występuje w powyższej definicji, a jest także określany przez inwestora jest tzw. okres przetrzymania (horyzont czasowy  $T$ , w którym może wystąpić obliczona strata). Horyzont czasowy może wynosić od kilku godzin dla aktywnych platform handlowych do nawet roku dla funduszy emerytalnych.

Na pytanie, jaka będzie potencjalna strata, gdy ryzyko będzie zagregowane (gdy przekroczymy  $VaR_\alpha$ ) odpowiada  $ES_\alpha$  (ang. *expected shortfall*), nazywane też warunkowym VaR [25] [26] [28], [38]. Formalnie jest to

$$ES_\alpha = E(L | L \geq VaR_\alpha),$$

gdzie przez  $E$  oznaczamy wartość oczekiwaną (w tym wypadku jest to warunkowa wartość oczekiwana). Klasyczne metody estymacji VaR przynależą do jednej z dwóch grup: ujęcie analityczne (parametryczne) poprzez wykorzystanie macierzy wariancji i kowariancji oraz klasa metod symulacyjnych, takich jak symulacja historyczna lub symulacja Monte Carlo.

## 2.2. Modele długiej pamięci

Pojęcie długiej pamięci (o czym już wyżej pisaliśmy) i pojęcie ułamkowych ruchów Browna wprowadzili do literatury naukowej H. E. Hurst [25] oraz Benoit B. Mandelbrot i John W. Van Ness [30]. Ich idee zostały ujęte w sposób naukowy za pomocą modeli w latach osiemdziesiątych przez Cliva W. J. Grangera i Rosalyn Joyeux [21] oraz Jonathana R. M. Hoskinga [24].

Pojęcie długiej pamięci jest ściśle związane z istnieniem autokorelacji wysokiego rzędu danego szeregu czasowego. Stacjonarny kowariancyjnie proces stochastyczny wykazuje długą pamięć z parametrem  $d$  jeśli funkcja jego gęstości spektralnej  $f(\lambda)$  spełnia warunek:

$$f(\lambda) \sim c\lambda^{-2d}, \text{ gdy } \lambda \rightarrow 0^+, \quad (1)$$

przy czym  $c$  jest skończoną stałą dodatnią, zaś symbol “ $\sim$ ”, że iloraz lewej i prawej strony powyższej zależności zmierza do jedności. Jeśli proces stochastyczny

(szereg czasowy) spełnia ten warunek oraz  $d > 0$ , to funkcja autokorelacji tego procesu opada w tempie hiperbolicznym (por. [21], [24]), co oznacza, że

$$\rho_k \sim c_p k^{2d-1} \text{ as } k \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Jeśli  $d > 0$ , to gęstość spektralna jest nieograniczona w pobliżu początku układu współrzędnych i proces stochastyczny wykazuje długą pamięć. Jeżeli  $d < 0,5$ , to proces jest stacjonarny. Gdy  $d = 0$ , to gęstość spektralna jest ograniczona w zerze i mówimy, że taki proces wykazuje krótką pamięć.

Parametr długiej pamięci może być szacowany za pomocą metod parametrycznych i semiparametrycznych. Jedną z najbardziej rozpowszechnionych z tej drugiej grupy metod jest klasa semiparametrycznych lokalnych estymatorów Whittle (por. [32]).

Najbardziej znaną klasą procesów o długiej pamięci są procesy opisywane za pomocą modelu ARFIMA wprowadzonego do ekonometrii przez C. W. J Granger and R. Joyeux [21].

Proces  $y_t$  jest nazywany procesem ARFIMA( $p, d, q$ ) jeśli:

$$\phi(B)(1-B)^d(y_t - \mu) = \theta(B)e_t. \quad (3)$$

Jeśli  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  oraz  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$  są wielomianami opóźnień rzędu odpowiednio  $p$  oraz  $q$  operatora  $B$ , przy czym pierwiastki tych wielomianów leżą na zewnątrz koła jednostkowego czyli ich moduły są większe od jednośc,  $e_t$  jest i.i.d. o wartości średniej 0, to operator różnicowania ułamkowego  $(1-B)^d$  zdefiniowany jest za pomocą wzoru dwumianowego Newtona:

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} B^j. \quad (4)$$

Jeśli  $d > -0,5$ , to proces ARFIMA jest odwracalny i posiada liniową reprezentację Wolda. Jeśli jeszcze  $d < 0,5$ , to proces jest kowariancyjnie stacjonarny. Jeśli zatem  $0 < d < 0,5$ , to proces jest stacjonarny i posiada długą pamięć. Parametry modelu ARFIMA mogą być estymowane za pomocą metody maksimum największej wiarygodności. Fallaw Sowell dowiódł [34], że estymator dokładnej metody największej wiarygodności (EML) jest zgodny i asymptotycznie normalny. Inne jego własności zostały omówione szczegółowo w pracach F. Sowell i Jurgena Doornika i Mariusa Oomsa (por. [14] i [34]).

Klasa modeli ARFIMA została rozwinięta w celu modelowania procesów z długą pamięcią przy założeniu, że mają one stałą wariancję. Ekonomiczne szeregi czasowe najczęściej jednak nie spełniają tego warunku. Dotyczy to na przykład kwadratów lub modułów reszt lub stop zwrotu. W tych szeregach obserwuje się długą pamięć oraz zmieniającą się warunkową wariancję. W tych przypadkach najbardziej popularne są modyfikacje modeli GARCH lub EGARCH – jak ułam-

kowo zintegrowany GARCH (FIGARCH) lub ułankowo zintegrowany model EGARCH nazywany FIEGARCH.

Poniżej przedstawiamy krótko modele długiej pamięci w szeregu czasowym warunkowej wariancji.

Klasyczny model GARCH( $p, q$ ) ma następującą postać (por. [9], [10], [12], [14], [15], [16],[23], [27], [29]):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B)\varepsilon_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2, \quad (5)$$

gdzie:  $\omega > 0$ ,  $\alpha(B) = \sum_{k=1}^p \alpha_k B^k$ ,  $\beta(B) = \sum_{s=1}^q \beta_s B^s$  ( $\alpha_k$  oraz  $\beta_s$  są nieujemne dla każdego  $k$  i  $s$ ). W przypadku, gdy parametry modelu GARCH sumują się do jedynki otrzymujemy model zintegrowany, czyli IGARCH ( $p, q$ ) (ang. *integrated* GARCH):

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta(B)} + \{1 - \phi(B)(1 - B)[1 - \beta(B)]^{-1}\}\varepsilon_t^2, \quad (6)$$

gdzie  $\phi(B) = [1 - \alpha(B) - \beta(B)](1 - B)^{-1}$  jest wielomianem stopnia  $\max\{p, q\} - 1$ .

Popularna metodologia RiskMetrics jest oparta na modelu IGARCH (1,1) (por. [2], [3], [8], [13], [17], [18]). W modelu tym współczynniki przy  $\varepsilon_{t-1}^2$  oraz  $\sigma_{t-1}^2$  są ustalone:

$$\sigma_t^2 = \omega + (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2 \quad (7)$$

Zazwyczaj  $\lambda$  wynosi 0,94.

Innym uogólnieniem modelu GARCH, które dopuszcza asymetrię w odpowiedzi na pozytywne i negatywne szoki jest APARCH( $p, q$ ) [12], [13]:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{k=1}^p \alpha_k (|\varepsilon_{t-k}| - \gamma_k \varepsilon_{t-k})^\delta + \sum_{s=1}^q \beta_s \varepsilon_{t-s}^\delta, \quad (8)$$

gdzie  $\omega > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\beta_s \geq 0$  oraz  $|\gamma_k| < 1$  dla wszystkich  $k$  i  $s$ .  $\delta$  reprezentuje transformację Boxa-Coxa, natomiast  $\gamma$  efekt dźwigni.

Zauważmy, że dla  $\delta = 2$  oraz  $\gamma_k = 0$  ( $k=1, \dots, p$ ) model ten redukuje się do wspomnianego powyżej GARCH( $p, q$ ).

W powyższych modelach dopuszczono możliwość ułankowej integracji w szeregu kwadratów reszt, a więc występowanie długiej pamięci. Ułankowo zintegrowane modele warunkowej wariancji noszą odpowiednio nazwy FIGARCH( $p, d, q$ ) oraz FIAPARCH( $p, d, q$ ). Możemy je przedstawić w postaci (por. [7], [12], [35]):

– FIGARCH( $p, d, q$ ):

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(1)]^{-1} + [1 - [1 - \beta(B)]^{-1} \phi(B)(1 - B)^d] \varepsilon_t^2 \quad (9)$$



– FIAPARCH( $p, d, q$ ):

$$\sigma_t^\delta = \omega + \{1 - [1 - \beta(B)]^{-1} \phi(B)(1 - B)^d\} (|\varepsilon_t| - \gamma\varepsilon_t)^\delta, \quad (10)$$

przy czym  $\phi(B) = [1 - \alpha(B) - \beta(B)](1 - B)^{-1}$ .

### 3. Wyniki empiryczne

W pracy rozważono szeregi dziennych (w chwili zamknięcia) logarytmicznych stóp zwrotu (wyrażonych w procentach) spółek Henkel, RWE oraz MAN. Okresem notowań jest okres od 1992-12-02 do 2008-02-15 (zawiera 3822 obserwacji). Tabela 1 przedstawia statystyki opisowe szeregów czasowych wymienionych spółek.

**Tabela 1**  
Statystyki opisowe procentowych stóp zwrotu spółek

	<b>Henkel</b>	<b>RWE</b>	<b>MAN</b>
średnia	0,03668	0,04909	0,05795
odchyl.stand.	1,70506	1,70952	2,12816
kurtoza	6,57326	6,98072	5,48404
skośność	0,02838	0,20196	0,05522
minimum	-8,17373	-7,73270	-11,39151
pierwszy kwartył	-0,82210	-0,79964	-1,08757
mediana	0,01368	0,02424	0,00000
trzeci kwartył	0,88203	0,90693	1,19425
maksimum	12,00347	11,67343	11,17412

Przed przystąpieniem do estymacji modeli zbadano stacjonarność szeregów czasowych z wykorzystaniem testów KPSS, Phillipsa-Perrona oraz DF-GLS. Analizowane szeregi czasowe nie są zintegrowane, czyli są typu  $I(0)$ . Odbiciem długiej pamięci w warunkowej wariancji jest długa pamięć w zmienności stóp zwrotu (rozumianej jako kwadraty stóp zwrotu lub wartości bezwzględne stóp zwrotu). Zastosowane klasyczne testy zaprzeczały sobie nawzajem (odrzucając zarówno

hipotezę o stacjonarności, jak i jej braku). W związku z tym wykorzystano testy na ułamkowe zintegrowanie szeregu [18], [31], [32] (test Geweke i Porter-Hudak, jego zmodyfikowaną wersję zaproponowaną przez Phillipsa oraz test Robinsona). Testy te (podobnie jak wykresy funkcji autokorelacji), wraz z testem Engle, potwierdziły przypuszczenie o ułamkowej integracji i konieczności zastosowania ułamkowo zintegrowanych modeli typu GARCH. Do opisu stóp zwrotu wykorzystano następującą specyfikację:

$$y_t = c + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t,$$

gdzie:  $z_t$  jest procesem i.i.d. o średniej zero i jednostkowej wariancji. Do opisu warunkowej wariancji wykorzystano model FIAPARCH(1,d,1):

$$\sigma_t^\delta = \frac{\omega}{1-\beta} + \left( 1 - \frac{(1-\phi B)(1-B)^d}{1-\beta B} \right) (|\varepsilon_t| - \gamma \varepsilon_t)^\delta.$$

Natomiast do opisu warunkowego rozkładu reszt zastosowano rozkład  $t$ -Studenta (spółki Henkel i Man) oraz skośny rozkład  $t$ -Studenta (spółka RWE). Poniższa tablica przedstawia wyniki estymacji modeli (w nawiasach zamieszczono błędy średnie szacunku).

**Tabela 2**

Wyniki estymacji parametrów modeli

parametr	Henkel	RWE	MAN
$c$	0,040271 (0,020781)	0,066086 (0,020989)	0,045801 (0,026958)
$\omega$	0,077859 (0,039563)	0,076506 (0,033446)	0,123375 (0,038185)
$d$	0,631827 (0,25810)	0,611620 (0,19814)	0,531896 (0,092738)
$\phi$	0,275065 (0,13831)	0,234230 (0,067136)	0,277555 (0,056257)
$\beta$	0,791538 (0,13119)	0,719508 (0,14838)	0,695340 (0,067414)
$\gamma$	0,173748 (0,095827)	0,190156 (0,051963)	0,241394 (0,069702)
$\delta$	1,527397 (0,35214)	1,704662 (0,18826)	1,727082 (0,23617)
$\nu$	5,777447 (0,50362)	6,751092 (0,66954)	8,733417 (1,0616)
$\xi$	----	0,039001 (0,022057)	----

Poprawność specyfikacji modeli została potwierdzona testem Ljung-Boxa, Engle oraz Tse (na heteroskedasyczość reszt). Oszacowane parametry są stabilne na poziomie istotności 0,01 (test Nybloma). Obserwując wyniki estymacji można stwierdzić, że występuje silna zależność warunkowej wariancji w okresie  $t$  od wariancji w okresie  $t-1$  (parametr  $\beta$  przekracza lub jest bliski 0,7). Parametr  $\gamma$  jest istotny i większy od zera, co oznacza występowanie efektu dźwigni ujemnych reszt w modelu warunkowej wariancji. W przypadku spółki RWE logarytm parametru  $\xi$  jest ujemny, co oznacza, że wartość narażona na ryzyko w przypadku pozycji długiej będzie większa niż dla krótkiej (co do wartości bezwzględnej i w przypadku tej samej warunkowej wariancji). Parametr  $d$  jest istotny w przypadku każdej spółki (co sygnalizowały testy na ułamkową integrację).

### 3.1. VaR w próbie

Zbudowane modele posłużyły do oszacowania jednodniowego VaR na poziomach 1 oraz 5 procent (długa pozycja inwestora) i 95 oraz 99 procent (krótka pozycja inwestora). Testowanie przeprowadzono z wykorzystaniem dynamicznego kwantylowego testu Engle-Manganelli oraz testu Kupca. Tabele 3 oraz 4 przedstawiają wyniki obliczeń.

**Tabela 3**  
Wyniki testu Engle-Manganelli

kwantyl	statystyka testowa	<i>p-value</i>
<b>Henkel</b>		
0,01	3,215	0,86441
0,05	3,3548	0,85036
0,95	11,598	0,11458
0,99	2,2543	0,94444
<b>RWE</b>		
0,01	2,8246	0,90074
0,05	19,180	0,00764
0,95	5,2400	0,63070
0,99	4,2809	0,74691

**Tabela 3 – cd.**

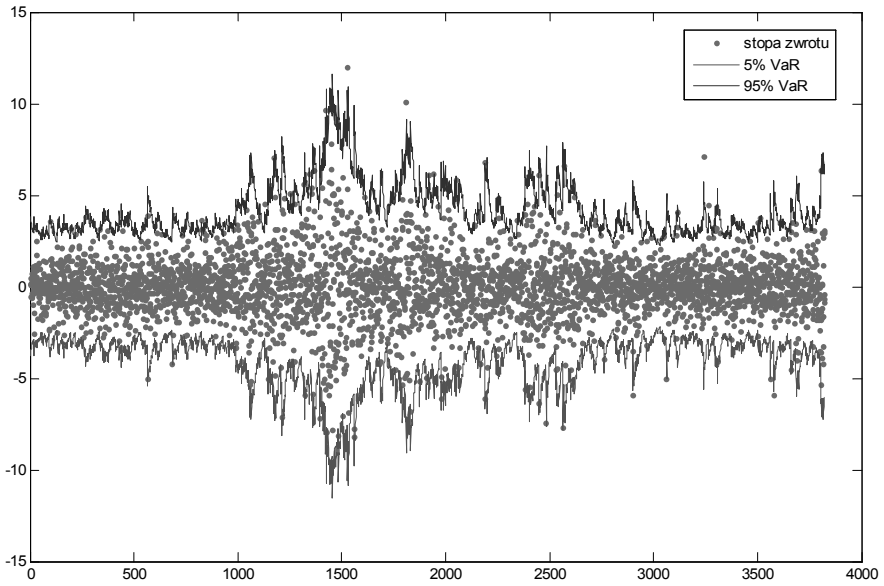
<b>MAN</b>		
0,01	4,2433	0,75137
0,05	11,116	0,13365
0,95	8,8694	0,26217
0,99	10,504	0,16179

**Tabela 4**

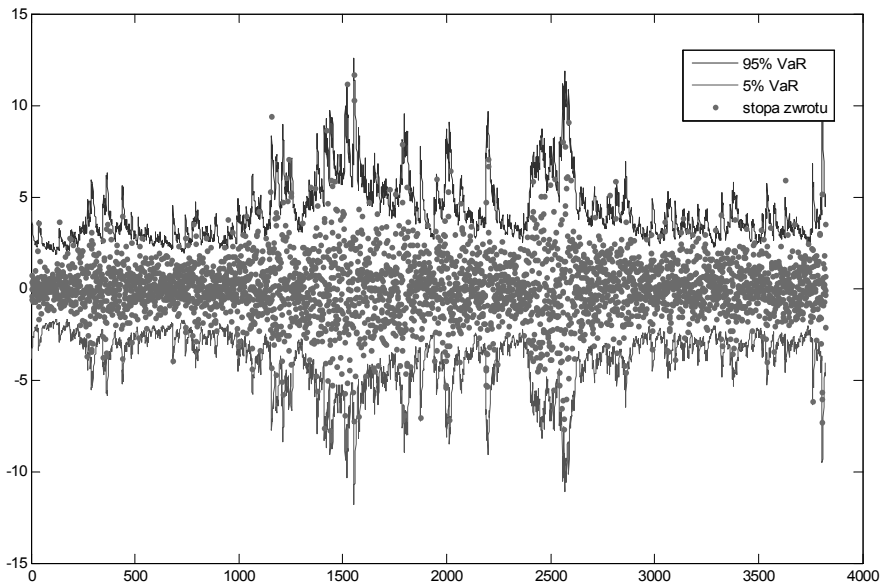
Wyniki testu Kupca

kwantyl	wskaźnik przekroczeń	statystyka testowa	<i>p-value</i>	ES
<b>Henkel</b>				
0,01	0,01020	0,01597	0,89943	-5,2140
0,05	0,04945	0,02438	0,87593	-3,5977
0,95	0,94636	1,04070	0,30767	3,4745
0,99	0,99058	0,13282	0,71552	5,2483
<b>RWE</b>				
0,01	0,00916	0,28198	0,59541	-4,8051
0,05	0,05259	0,53126	0,46608	-3,4479
0,95	0,94741	0,53126	0,46608	3,4767
0,99	0,98927	0,19952	0,65511	5,0671
<b>MAN</b>				
0,01	0,00890	0,48881	0,48446	-5,9344
0,05	0,04945	0,02438	0,87593	-4,3371
0,95	0,94505	1,90900	0,16707	4,4077
0,99	0,98770	1,89850	0,16824	5,5241

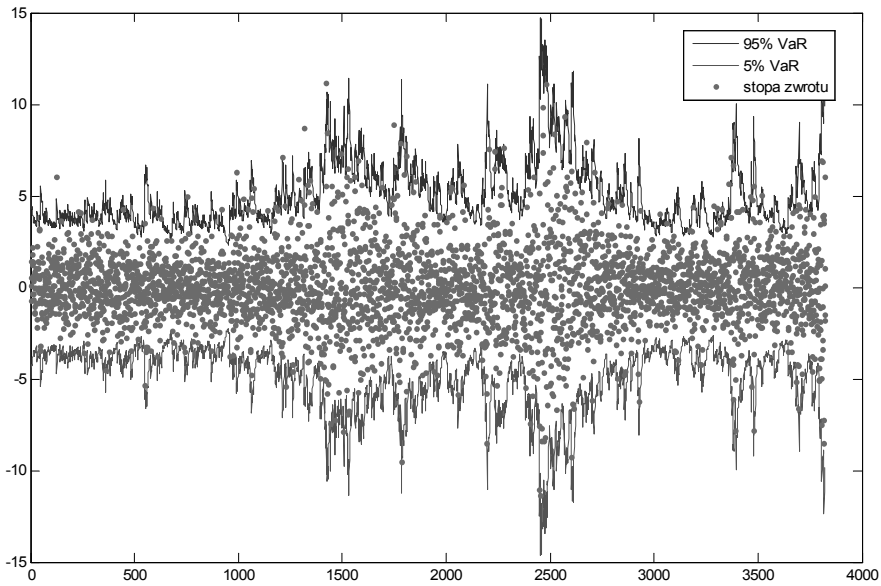
Powyższe wyniki świadczą o właściwym dopasowaniu modeli do danych empirycznych i możliwości ich wykorzystania do prognozowania wartości zagrożonej. Na rysunkach 1, 2 i 3 zamieszczono wykresy wartości narażonej na ryzyko na poziomach 5% oraz 95% wraz ze stopami zwrotu spółek.



**Rys. 1.** VaR w próbie na poziomie 5% oraz 95% dla spółki Henkel



**Rys. 2.** VaR w próbie na poziomie 5% oraz 95% dla spółki RWE



**Rys. 3.** VaR w próbie na poziomie 5% oraz 95% dla spółki MAN

### 3.2. Prognozy VaR

Na podstawie oszacowanych modeli dokonano prognoz. Zbiorem walidacyjnym był okres 5 lat (1260 obserwacji), natomiast modele były reestymowane z wykorzystaniem okna zawierającego 50 obserwacji. Tabele 5 oraz 6 zawierają wyniki testów dla prognoz wartości narażonej na ryzyko.

**Tabela 5**

Wyniki testu Engle-Manganelli dla prognoz VaR

kwantyl	Statystyka testowa	<i>p-value</i>
<b>Henkel</b>		
0,01	1,1221	0,43421
0,05	6,9490	0,43421
0,95	2,8115	0,90188
0,99	1,1937	0,99107

**Tabela 5 – cd.**

kwantyl	Statystyka testowa	<i>p-value</i>
<b>RWE</b>		
0,01	1,2981	0,98849
0,05	5,6388	0,58250
0,95	7,2810	0,40022
0,99	13,4740	0,06136
<b>MAN</b>		
0,01	11,2450	0,12827
0,05	9,3291	0,22988
0,95	10,1990	0,17758
0,99	6,3193	0,50300

**Tabela 6**

Wyniki testu Kupca dla prognoz VaR

kwantyl	Failure rate	Statystyka testowa	<i>p-value</i>	ES
<b>Henkel</b>				
0,01	0,00794	0,58318	0,44507	-5,0281
0,05	0,04524	0,62051	0,43086	-3,0608
0,95	0,95079	0,01679	0,89689	2,9348
0,99	0,98889	0,15167	0,69695	4,2102
<b>RWE</b>				
0,01	0,00714	1,1539	0,28274	-4,8318
0,05	0,04444	0,84916	0,35679	-3,2103
0,95	0,94603	0,40764	0,52317	3,0732
0,99	0,98810	0,43522	0,50944	3,6883

Tabela 6 – cd.

MAN				
0,01	0,011111	0,15167	0,69695	-5,7924
0,05	0,042857	1,41920	0,23353	-4,5370
0,95	0,94444	0,79149	0,37365	4,1253
0,99	0,98810	0,43522	0,50944	5,1050

Analizując otrzymane wyniki możemy stwierdzić, że oszacowane modele mogą być wykorzystane w procesie prognozowania stóp zwrotu i ich warunkowej wariancji, a co za tym idzie wartości narażonej na ryzyko. Potwierdzeniem tego są wartości *p-value* z obu testów. Dla wszystkich spółek i dla każdego stopnia tolerancji ryzyka wartości *p* są większe niż 0,1.

## 4. Podsumowanie

W artykule rozważono zastosowanie różnych modeli do prognozowania wartości zagrożonej. W wyniku badań potwierdzenie znalazł fakt występowania długiej pamięci w zmienności stóp zwrotu a tym samym w warunkowej wariancji reszt z modelu dla warunkowej średniej. Tym samym klasyczne modele, które nie uwzględniają tego zjawiska: (model RiskMetrics, GARCH, APARCH) nie są w pełni adekwatne. W pracy wykorzystano model FIAPARCH, który pozwala na modelowanie ułamkowej integracji szeregu warunkowej wariancji, a także efektu dźwigni, czyli asymetrycznej reakcji na pojawienie się dobrych i złych informacji. Do opisu warunkowego rozkładu reszt wykorzystano rozkład *t*-Studenta oraz jego skośną wersję, co pozwoliło na uchwycenie „grubych ogonów” i asymetrii. Tak skonstruowany model stał się podstawą do oszacowania wartości narażonej na ryzyko. Porównanie wyników testów potwierdziło wyższość modelu FIAPARCH nad modelami nieuwzględniającymi choć jednego z wymienionych wyżej czynników.

## Literatura

- [1] Acerbi C., Nardio C., Sirtori C., *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*, Working Paper, 2001, [www.gloriamundi.org/var/wps.html](http://www.gloriamundi.org/var/wps.html).
- [2] Andrews D., Guggenberger P., *A bias-reduced log-periodogram regression estimator for the long-memory parameter*, “Econometrica” 2003, vol. 71, s. 675–712.



- 
- [3] Andrews D., Sun Y., *Adaptive local polynomial Whittle estimation of long-range dependence*, "Econometrica" 2004, vol. 72, s. 569–614.
- [4] Angelidis T. and Degiannakis S., *Modeling Risk for Long and Short Trading Positions*, "Journal of Risk Finance" 2005, vol. 6(3), s. 226–238.
- [5] Angelidis T., Benos A., Degiannakis S., *The Use of GARCH Models in VaR Estimation*, "Statistical Methodology" 2004, vol. 1(2), s. 105–128.
- [6] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D., *Coherent Measures of Risk*, "Mathematical Finance" 1999, vol. 9, s. 203–228.
- [7] Baillie R. T., Bollerslev T., Mikkelsen H. O., *Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, "Journal of Econometrics" 1996, vol. 74, s. 3–30.
- [8] Barkoulas J.T., Baum C.F., *Long term dependence in stock returns*, "Economics Letters" 1996, vol. 53, s. 253–259.
- [9] Bollerslev T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, "Journal of Econometrics" 1986, vol. 31, s. 307–327.
- [10] Bollerslev T., Mikkelsen H., *Modelling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility*, "Journal of Econometrics" 1996, vol. 73, s. 151–184.
- [11] Brooks C., Persaud G., *Volatility Forecasting for Risk Management* "Journal of Forecasting" 2003, vol. 22, s. 1–22.
- [12] Degiannakis S., *Volatility Forecasting: Evidence from a Fractional Integrated Asymmetric Power ARCH Skewed-t Model*, "Applied Financial Economics" 2004, vol. 14, s. 1333–1342.
- [13] Ding Z., Granger C.W.J., Engle R.F., *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*, "Journal of Empirical Finance" 1993, vol. 1, s. 83–106.
- [14] DOORNIK J.A., OOMS, M., *Computational aspects of maximum likelihood estimation of autoregressive fractionally integrated moving average models*, "Computational Statistics and Data Analysis" 2003, vol. 42, s. 333–348.
- [15] Engle R.F., *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation*, "Econometrica" 1982, vol. 50, s. 987–1008.
- [16] Engle R.F., Bollerslev T., *Modelling the Persistence of Conditional Variances*, "Econometric Reviews" 1986, vol. 5(1), s. 1–50.
- [17] Engle R. F., Manganelli S., *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*, University of California, San Diego, Department of Economics Working Paper 1999, s. 99–20.
- [18] Geweke J., Porter-Hudak S., *The Estimation and Application of Long-Memory Time Series Models*, "Journal of Time Series Analysis" 1983, vol. 4, s. 221–238.
- [19] Giot P., Laurent S., *Value-at-Risk for Long and Short Trading Positions*, "Journal of Applied Econometrics" 2003, vol. 18, s. 641–664.
- [20] Granger C. W. J., Ding Z., *Some properties of absolute returns: an alternative measure of risk*, "Annales d'Economie de Statistique" 1995, vol. 40, s. 67–95.

- [21] GRANGER C.W.J., JOYEUX R., *An introduction to long-memory time series models and fractional differencing*, "Journal of Time Series Analysis" 1980, vol. 1, s. 15–29
- [22] Guermat C., Harris, R.D.F., *Forecasting Value-at-Risk Allowing for Time Variation in the Variance and Kurtosis of Portfolio Returns*, "International Journal of Forecasting" 2002, vol. 18, s. 409–419.
- [23] Hansen P.R., Lunde A., *Consistent Ranking of Volatility Models*, "Journal of Econometrics" 2006, vol. 131, s. 97–121.
- [24] HOSKING J.R.M., *Fractional differencing*, "Biometrika" 1981, vol. 68, s. 165–176.
- [25] Hurst H. R., *Long-term storage capacity of reservoirs*, "Transactions of the American Society of Civil Engineers" 1951, vol. 1, s. 519–543.
- [26] Hurvich C.M., Deo R.S., Brodsky J., *The mean squared error of Geweke and Porter-Hudak's estimator of the memory parameter of a long memory time series*, "Journal of Time Series Analysis" 1998, vol. 19, s. 19–46.
- [27] Inui K., Kijima M., *On the Significance of Expected Shortfall as a Coherent Risk Measure*, "Journal of Banking and Finance" 2005, vol. 29, s. 853–864.
- [28] Kupiec P.H., *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*, "Journal of Derivatives" 1995, vol. 3, s. 73–84.
- [29] Laurent S., Peters J. P., *GARCH 2.2: an Ox package for estimating and forecasting various ARCH models*, "Journal of Economic Surveys" 2002, vol. 3, s. 447–485.
- [30] MANDELBROT B.B., VAN NESS J.W., *Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications*, "SIAM Review" 1968, vol. 10 (4), s. 422–437.
- [31] PHILLIPS P.C., SHIMOTSU K., *Local Whittle estimation in nonstationary and unit root cases*, "Annals of Statistics" 2004, vol. 34 (2), s. 656–692.
- [32] ROBINSON, P.M., *Log-periodogram regression of time series with long range dependence*, "Annals of Statistics" 1995, vol. 23, s. 1048–1072.
- [33] Sarma M., Thomas S., Shah A., *Selection of VaR models*. "Journal of Forecasting" 2003, vol. 22(4), s. 337–358.
- [34] SOWELL F.B., *Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models*, "Journal of Econometrics" 1992, vol. 53, s. 165–188.
- [35] Tse Y.K., *The Conditional Heteroskedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate*, "Journal of Applied Econometrics" 1998, vol. 13, s. 49–55.
- [36] Velasco, C., 1999a, *Non-stationary log-periodogram regression*, Journal of Econometrics, vol. 91, s. 325–371.
- [37] Velasco, C., 1999b, *Gaussian semiparametric estimation of non-stationary time series*, Journal of Time Series Analysis, vol. 20, s. 87–127.
- [38] Yamai Y., Yoshida T., *Value-at-risk Versus Expected Shortfall: A Practical Perspective*, "Journal of Banking and Finance" 2005, vol. 29(4), s. 997–1015.