Piotr Gurgul, Robert Syrek

Zastosowanie mieszanki kopul do modelowania współzależności pomiędzy wybranymi sektorami gospodarki

Managerial Economics 6, 129-139

2009

Ekonomia Menedżerska
2009, nr 6, s. 129–139

Piotr Gurgul*, Robert Syrek**

Zastosowanie mieszanki kopul do modelowania współzależności pomiędzy wybranymi sektorami gospodarki

1. Wprowadzenie

Możliwość prognozowania i dokładność prognoz jednej zmiennej finansowej za pomocą innej zmiennej (zmiennych) zależą od stopnia zależności między nimi.

Dlatego badanie zależności jest bardzo ważne nie tylko z punktu widzenia badaczy, ale przede wszystkim z punktu widzenia samych uczestników rynku [9]. Zależność pomiędzy zmiennymi finansowymi na rynkach akcji jest zwykle mierzona za pomocą takich zmiennych, jak stopy zwrotu, ich zmienność oraz wielkość obrotów pojedynczych spółek lub indeksów grup spółek. Ekonomiści najczęściej badają zależność za pomocą współczynnika korelacji liniowej Pearsona, a także współczynników korelacji rangowej Spearmana i Kendalla. Te miary zależności mają liczne wady, powodujące to, że ich wskazania są często – w przypadku analiz związków pomiędzy zmiennymi finansowymi – wysoce niewiarygodne. Przykładowo współczynnik korelacji liniowej jest zdefiniowany tylko dla zmiennych o skończonych wariancjach, co jest źródłem istotnych błędów w przypadku analizy zależności pomiędzy zmiennymi z tzw. ciężkimi ogonami rozkładów prawdopodobieństwa. Dobrze znany jest też fakt, że niezależność dwóch zmiennych losowych implikuje nieskorelowanie, ale implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa

* Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział EAIiE, Katedra Informatyki, e-mail: pgurgul@go2.pl
** Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki w Krakowie, Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii, e-mail: rsyrek@wsei.edu.pl

(poza przypadkiem wielowymiarowego rozkładu normalnego). W literaturze przedmiotu podnosi się fakt, że korelacja liniowa nie jest miarą odporną. Oznacza to, że obserwacje nietypowe (tzw. *outliers*) mogą istotnie wpływać na wartość współczynnika korelacji. Korelacja nie wykazuje też niezmienniczości względem transformacji nieliniowych.

Jeśli dla przykładu jest spełnione założenie normalności rozkładu stóp zwrotu na dwóch rynkach finansowych, to potencjalny inwestor może sądzić, iż konstruując portfel na bazie akcji spółek z obu rynków ma możliwość istotnego zredukowania ryzyka. Okazuje się jednakże, że pomimo nieistotnego skorelowania zmiennych finansowych z różnych giełdowych rynków akcji kryzysy finansowe i załamania rynkowe dotykają prawie wszystkich rynków i to niemal równocześnie. Badania w ostatnich latach wykazały, że ważna jest nie tylko globalna zależność, ale i jej struktura i stabilność w czasie. Wymienione czynniki wpływają decydująco na faktyczne korzyści, które może odnieść inwestor wskutek dywersyfikacji.

Bardziej zasadne w stosunku do obliczania w badaniach empirycznych wspomnianych wyżej korelacji jest obliczanie korelacji warunkowej. Jednym z najpopularniejszych estymatorów korelacji warunkowej jest tzw. *rolling correlation*. Wadą tego rodzaju korelacji jest to, że obserwacjom, biorącym udział w estymacji współczynnika korelacji, nadaje się równe wagi. Pozostałe obserwacje mają oczywiście wagę równą zero. Poza tym udowodniono, że korelacje warunkowe obliczone przy różnych warunkach wykazują znaczne różnice, a mianowicie korelacje warunkowe przy warunku dużych zmian cen lub wielkości obrotów są wyższe niż korelacje przy małych zmianach cen lub wielkości obrotów. Fakt ten jest znany w literaturze statystycznej jako tzw. *correlation breakdown*. W tych sytuacjach także współczynnik korelacji warunkowej nie wyjaśnia rzeczywistej zależności nawet wtedy, gdy obowiązuje rozkład normalny dla danego szeregu czasowego. Pomimo tego, że korelacja warunkowa dostarcza więcej informacji dotyczących zależności pomiędzy zmiennymi rynkowymi niż bezwarunkowa, to i w tym wypadku wyniki empiryczne powinny być traktowane z ostrożnością (por. [8], [4], [5], [6]).

Pierwsze wyniki badań empirycznych dotyczą głównie zależności równoczesnych (ang. *contemporaneous relationship*) na rynkach akcji (prace [9], [16], [17], a także praca przeglądowa Karpoffa [11]). Do najważniejszych teorii uzasadniających występowanie zależności równoczesnych pomiędzy zmiennymi finansowymi należy hipoteza o mieszance rozkładów. Zgodnie z nią zmiany tych zmiennych są generowane przez proces napływania na rynek nowych informacji. Istnienie zależności równoczesnych np. pomiędzy zmiennością cen i wielkością obrotów wynika również z modelu sekwencyjnego napływu informacji.

Celem artykułu jest pokazanie możliwości jednoczesnego modelowania zależności pomiędzy wybranymi sektorami za pomocą kombinacji wypukłych kopul. Wiadomo bowiem, że najistotniejsze są zależności w prawym lub lewym ogonie rozkładów. To właśnie te zależności, czyli zależności w ogonach, decydują o tym, że formalnie nieskorelowane rynki równocześnie przeżywają albo hossę, albo bessę.

Po tym wstępie przypomnimy krótko w rozdziale 2 podstawy teorii kopul, ze szczególnym uwzględnieniem tych kopul, które stanowią narzędzie naszego badania. W rozdziale 3 podamy statystyki opisowe analizowanych szeregów czasowych. W rozdziale 4 przedstawimy wyniki estymacji. Pracę kończy podsumowanie, w którym zawarto wnioski.

2. Elementy teorii kopul

Nieformalnie możemy powiedzieć, że kopula jest wielowymiarową dystrybuantą, której brzegi mają rozkłady jednostajne na odcinku [0, 1]. W niniejszej pracy będziemy wykorzystywali kopule dwuwymiarowe. Ich formalna definicja jest następująca ([1], [7], [12], [15]):

Definicja 1. 2-wymiarową kopulą (lub krócej kopulą) nazywamy każdą funkcję C: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ o następujących własnościach:

1. Dla każdych $u, v \in [0, 1]$

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0$$

2. Dla każdych $u, v \in [0, 1]$

$$C(u, 1) = u \text{ oraz } C(1, v) = v$$

3. Dla każdych $u_1, u_2, v1, v_2 \in [0, 1]$ takich, że $u_1 \leq u_2$ oraz $v_1 \leq v_2$ mamy

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Twierdzenie Sklara z roku 1959 stanowi podstawowy i najważniejszy wynik w teorii kopul [14].

Twierdzenie 1. Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi o łącznym rozkładzie H oraz rozkładach brzegowych F oraz G. Istnieje wtedy kopula C taka, że dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

Odwrotnie, jeśli C jest kopulą oraz F i G są dystrybuantami, to funkcja H zdefiniowana powyżej jest dystrybuantą z brzegami F i G. Jeśli wszystkie rozkłady brzegowe są ciągłe, to C jest określona jednoznacznie. W przeciwnym razie jest jednoznacznie określona na $RanF \times RanG$.

Jak widzimy, kopula, łącząc rozkłady brzegowe w rozkład łączny, opisuje strukturę zależności między zmiennymi. Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia Sklara jest:

Wniosek. Niech H będzie dystrybuantą z brzegami F i G zmiennych losowych ciągłych X i Y oraz kopulą C. Wtedy dla każdego $(u, v) \in [0, 1]^2$ zachodzi

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

Powyższy wniosek służy do konstrukcji kopul z łącznych rozkładów zmiennych losowych.

Wprowadzimy teraz ważną z praktycznego punktu widzenia kopulę przeżycia. Jeśli X ma rozkład F to *funkcję przeżycia* definiujemy jako $\bar{F} = P(X > x) = 1 - F(x)$. *Łączna funkcja przeżycia* dla pary zmiennych losowych (X, Y) o rozkładach F i G odpowiednio i łącznym rozkładzie H to $\bar{H}(x,y) = P(X > x, Y > y) = \bar{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))$. Kopula $\bar{C}$ jest więc kopulą przeżycia zmiennych losowych X i Y.

Ważnymi przykładami kopul, które nie są zależne od parametru, są kopula niezależności Π oraz kopule W i M nazywane ograniczeniami Frécheta–Hoeffdinga (odpowiednio dolnym i górnym ograniczeniem). Definiujemy je następująco (dla $u, v \in [0, 1]$):

$$\Pi(u, v) = uv$$

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$$

$$M(u, v) = \min(u, v).$$

Reprezentują one odpowiednio doskonałą ujemną i doskonałą dodatnią zależność. Co więcej, mając na uwadze, że kopule w pewnym sensie możemy porównywać ze sobą (można w zbiorze kopul wprowadzić tzw. porządek konkordancji), zachodzi podwójna nierówność

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

dla każdych $u, v, \in [0, 1]$ oraz dowolnej kopuli C. W sensie graficznym powyższe twierdzenie mówi, że wykresy wszystkich kopul muszą się zawierać pomiędzy powierzchniami wyznaczonymi przez $k_1 = W(u, v)$ oraz $k_2 = W(u, v)$.

Przypomnijmy, że jeśli F jest dystrybuantą zmiennej losowej ciągłej X oraz α jest ściśle rosnącą funkcją, której dziedzina zawiera się w $RanX$, to dystrybuanta zmiennej losowej $\alpha(X)$ jest także ciągła. Okazuje się, że możemy określić kopulę pomiędzy zmiennymi w przypadku przekształconych zmiennych losowych. Poniższe twierdzenie określa, jak wyglądają kopule takich zmiennych.

Twierdzenie 2. Niech X oraz Y będą zmiennymi losowymi z kopulą C_{XY}. Niech α oraz β będą ściśle monotonicznymi funkcjami określonymi na *RanX* oraz *RanY*. Wtedy dla każdych u, v, $\in$ [0, 1]:

1. jeżeli α oraz β są rosnące to:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = C_{XY}(u, v)$$

2. jeżeli α jest rosnąca natomiast β malejąca to:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$$

3. jeżeli α jest malejąca natomiast β rosnąca to:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)$$

4. jeżeli α oraz β są malejące to:

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)$$

Szczególnie ważny z praktycznego punktu widzenia jest pierwszy podpunkt powyższego twierdzenia. W ekonometrii często zmienne są logarytmowane. Okazuje się, że kopula jest niezmiennicza względem ściśle rosnących transformacji zmiennych, więc w przypadku logarytmowania (np. logarytmem naturalnym) kopula przekształconych zmiennych pozostaje ta sama.

Proces estymacji parametrów kopuli, który omówimy w dalszej części, najczęściej wykorzystuje metodę największej wiarygodności. W związku z tym konieczne jest wprowadzenie pojęcia gęstości kopuli.

Definicja 2. Gęstość kopuli C oznaczamy przez c i określamy jako pochodną mieszaną

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$$

Jednym z kluczowych zagadnień jest identyfikacja i kwantyfikacja zależności wartości ekstremalnych. Współczynniki opisane poniżej określają siłę zależności pomiędzy zmiennymi w ogonach (prawym–górnym oraz lewym–dolnym) dwuwymiarowego rozkładu. Oparte są na warunkowym prawdopodobieństwie wystąpienia ekstremalnych wartości jednej zmiennej, gdy druga zmienna również osiąga wartości ekstremalne. Okazuje się, że taki rodzaj zależności może być wyrażony za pomocą kopul. Poniżej podajemy formalną definicję współczynników zależności w ogonach, by dalej wyrazić je w kategoriach kopul.

Definicja 3. Niech (X, Y) będzie wektorem zmiennych losowych ciągłych z rozkładami brzegowymi F i G odpowiednio. Współczynnik zależności w górnym ogonie (X, Y) określamy jako

$$\lim_{u \to 1^-} P(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)) = \lambda_U$$

o ile ta granica istnieje. Jeśli $\lambda_U \in (0, 1]$, to mówimy, że zmienne losowe X i Y są asymptotycznie zależne w górnym ogonie. Jeśli $\lambda_U = 0$, to zmienne losowe są asymptotycznie niezależne w górnym ogonie.

Analogicznie mamy:

Definicja 4. Niech (X, Y) będzie wektorem zmiennych losowych ciągłych z rozkładami brzegowymi F i G. Współczynnik zależności w dolnym ogonie (X, Y) określamy jako

$$\lim_{u \to 0^+} P(Y \le G^{-1}(u) \mid X \le F^{-1}(u)) = \lambda_L$$

o ile ta granica istnieje. Jeśli $\lambda_L \in (0, 1]$, to mówimy, że zmienne losowe X i Y są asymptotycznie zależne w dolnym ogonie. Jeśli $\lambda_L = 0$, to zmienne losowe są asymptotycznie niezależne w dolnym ogonie.

Definicja 5. Niech C będzie kopulą zmiennych X i Y

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u,v)}{1 - u} \qquad \lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,v)}{u}$$

Zauważmy, że dla dowolnej kopuli C współczynnik zależności w górnym ogonie jest równy współczynnikowi zależności w ogonie dolnym kopuli przeżycia $\overline{C}$. Podobnie współczynnik zależności w dolnym ogonie jest równy współczynnikowi zależności w górnym ogonie kopuli $\overline{C}$.

Podstawową klasę kopul stanowią tzw. kopule eliptyczne, do których należą kopula Gaussa oraz t-kopula. W praktyce modelowania zależności często przydatne są tzw. kopule Archimedesa uwzględniające ewentualny brak symetrii zależności w ogonach. Warto zauważyć, iż kopule te mają bardzo elegancką charakteryzację opartą na tzw. generatorze kopuli. Formalną definicję można znaleźć w [12].

W pracy wykorzystane zostaną kopule Gumbela i Claytona (oraz ich kopule przeżycia). Charakteryzuje je brak symetrii zależności w ogonach. Poniżej podajemy krótką charakteryzację tych kopul.

2.1. Kopula Claytona

Ogólna postać kopuli Claytona jest następująca:

$$C(u,v;\theta) = \max\left([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}, 0 \right)$$

z parametrem θ przyjmującym wartości ze zbioru $[-1, \infty)\backslash\{0\}$. Gdy założymy, że parametr będzie przyjmował tylko wartości dodatnie, otrzymamy kopulę postaci

$$C(u,v;\theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

Jeśli parametr $\theta = -1$, to kopula przyjmuje postać kopuli W natomiast, gdy parametr $\theta = 1$ kopula jest równa kopuli $\frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$, gdzie $\Sigma = u + v$. Wyróżniamy dwa przypadki graniczne, przy θ dążącym do zera i nieskończoności. Otrzymujemy wtedy odpowiednio kopulę niezależności oraz górne ograniczenie Frécheta–Hoeffdinga. Współczynnik zależności w górnym ogonie wynosi zero, natomiast w dolnym $2^{-1/\theta}$ (dla $\theta > 0$).

2.2. Kopula Gumbela

Jeżeli dla $\theta \in [1. \infty)$ określimy ścisły generator, to otrzymamy kopulę Gumbela

$$C(u,v;\theta) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right)$$

Dla $\theta = 1$ kopula Gumbela jest kopulą niezależności, natomiast gdy parametr, od którego zależy kopula, dąży do nieskończoności, otrzymujemy min (u, v), czyli górne ograniczenie Frécheta–Hoeffdinga. Współczynnik zależności w górnym ogonie wynosi $2 - 2^{1/\theta}$ natomiast w dolnym zero.

3. Statystyki opisowe

W pracy rozważono szeregi logarytmicznych stóp zwrotu indeksów sektorów finansów, przemysłu oraz usług. Obejmują one okres od 2 stycznia 2002 roku do 10 września 2009 roku. Tabela 1 przedstawia statystyki opisowe wymienionych szeregów czasowych.

Tabela 1

Statystyki opisowe stóp zwrotu dla sektorów gospodarki

	Sektor finansowy	Sektor przemysłu	Sektor usług
średnia	0,0006	0,0012	0,0010
odchylenie standardowe	0,0127	0,0111	0,0121
kurtoza	7,5799	10,2653	12,6859
skośność	–0,5414	–1,1325	–0,2088
minimum	–0,0921	–0,1024	–0,0998
pierwszy kwartyl	–0,0057	–0,0038	–0,0049
mediana	0,00092	0,0017	0,0015
trzeci kwartyl	0,0072	0,0073	0,0076
maksimum	0,0688	0,0504	0,1206

Źródło: opracowanie własne.

Dla każdej z par obliczono współczynniki korelacji Kendalla. Macierz korelacji ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4583 & 0,4446 \\ & 1 & 0,5757 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

przy czym wszystkie oszacowane współczynniki są statystycznie istotne. Dla każdego z szeregów przeprowadzono testy na stacjonarność (rozszerzony test Dickeya–Fullera oraz test Phillipsa–Perrona). Wyniki testów sugerują, że szeregi stóp zwrotu są zintegrowane rzędu zero, czyli I(0).

4. Wyniki estymacji

Do estymacji parametrów kopuli wykorzystano metodę największej wiarygodności IFM (*Inference Functions for Margins*). Metoda ta jest stosowana w dwóch krokach. W pierwszym szacujemy parametry rozkładów brzegowych. I tak, dla każdego z szeregów oszacowano model typu ARMA-GARCH (w przypadku sektora usług był to model GJR) z warunkowym rozkładem t-Studenta. Zestandaryzowane reszty przekształcamy do rozładów jednostajnych z wykorzystaniem warunkowego rozkładu. W drugim kroku szacujemy parametry kopuli. Chcąc jednocześnie modelować zależność w ogonie górnym i dolnym, wykorzystano mieszanki (kombinacje wypukłe) kopul, czyli kopule postaci (por. z [3], [11]):

$$C(u, v; \theta_1, \theta_2) = \alpha C_1(u, v; \theta_1) + (1 - \alpha)\, C_2(u, v; \theta_2)$$

gdzie $\alpha \in [0, 1]$. Wybór optymalnej kopuli opierał się na kryteriach informacyjnych.

4.1. Sektor finansowy a sektor przemysłu

Optymalnym wyborem kopul okazały się kopula Gumbela (C_1) oraz kopula przeżycia Gumbela (C_2). Tabela 2 przedstawia wyniki estymacji.

Tabela 2

Wyniki estymacji parametrów kopuli dla sektora finansowego i przemysłu

parametr	wartość	błąd standardowy	statystyka t
θ_1	1,0560	0,1394	7,5776
θ_2	1,9787	0,1030	19,2102
α	0,1503	0,0711	2,1147

Źródło: opracowanie własne.

Wartość funkcji wiarygodności wyniosła 513,7030, przy czym wartość ta była bardzo bliska wartości funkcji dla kombinacji kopul przeżycia Claytona i Gumbela. Na podstawie oszacowanych parametrów obliczono współczynniki zależności w ogonach. Wyniosły one: w dolnym 0,4933, zaś w górnym 0,0108.

4.2. Sektor finansowy a sektor usług

Ponownie i tym razem najlepiej dopasowana została kombinacja kopuli Gumbela i kopuli przeżycia Gumbela. W tabeli 3 przedstawiamy wyniki procesu estymacji. Wartość funkcji wiarygodności wyniosła 504,5073 i była bardzo bliska kombinacji kopul przeżycia Claytona i Gumbela. Obliczone współczynniki zależności w ogonach mają ten sam charakter. Zależność w dolnym ogonie ($\lambda_L = 0{,}4746$) jest dużo silniejsza niż w górnym ($\lambda_U = 0{,}0329$).

Tabela 3

Wyniki estymacji parametrów kopuli dla sektora finansowego i sektora usług

parametr	wartość	błąd standardowy	statystyka t
θ_1	1,1513	0,1492	7,7143
θ_2	1,9965	0,0772	25,8499
α	0,1887	0,0675	2,7960

Źródło: opracowanie własne.

4.3. Sektor przemysłu a sektor usług

W przypadku danych dotyczących sektora usług najlepiej dopasowanym rozkładem jest kombinacja kopuli Claytona i kopuli przeżycia Claytona. Wartość funkcji wiarygodności, która była maksymalizowana, wyniosła 884,7775. W porównaniu do poprzednich par danych obserwujemy silniejszą zależność w górnym ogonie (0,2307), ale jednak dużo słabszą niż w dolnym (0,5196). W tabeli 4 zamieszczamy wyniki estymacji.

Tabela 4

Wyniki estymacji parametrów kopuli dla sektora przemysłu i sektora usług

parametr	wartość	błąd standardowy	statystyka t
θ_1	2,2946	0,1693	13,5564
θ_2	2,7417	0,5137	5,3367
α	0,7029	0,0339	20,7195

Źródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

Przeprowadzone badania wykazały wysoką przydatność nowoczesnych narzędzi do badania zależności pomiędzy indeksami sektorów gospodarki. Mając na uwadze, że współczynniki korelacji (także rangowe) nie dostarczają pełnej informacji o zależności, wykorzystano kopule jako narzędzie modelowania struktury. Natomiast zastosowanie mieszanki kopul jawi się jako elastyczne narzędzie do modelowania struktury zależności w obu ogonach rozkładów. Badania empiryczne wykazały, że zależność pomiędzy najmniejszymi stopami zwrotu jest dużo silniejsza niż między największymi. Silniejsza zależność w dolnym–lewym ogonie oznacza, iż prawdopodobieństwo jednoczesnego spadku notowań sektorów jest wyższe niż w przypadku, gdyby miały miejsce jednoczesne wzrosty.

Literatura

[1] Bouye E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T., *Copulas for finance – A reading guide and some applications*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, 2000, Working Paper.

[2] Charemza W., Deadman D., *New directions in econometric practice*, 2nd ed. Edward Elgar, Cheltenham 1997.

[3] Chollete L., Heinen A., *Frequent Turbulence? A Dynamic Copula Approach*, Norwegian School of Economics and Business Administration. Department of Finance and Management Science, 2006, Discussion Paper.

[4] Chordia T., Swaminathan B., *Trading volume and cross-autocorrelations in stock returns*, „Journal of Finance" 2000, 55, s. 913–935.

[5] Engle R.F., *Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models*, „Journal of Business and Economic Statistics" 2002, 20(3), s. 339–350.

[6] Engle R.F., Sheppard K., *Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH*, 2001, Working Paper, 8554, NBER, www.nber.org.

[7] Embrechts P., Lindskog F., McNeil A. J., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, w: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Ed. S. Rachev, Chapter 8, Elsevier, Amsterdam 2003, s. 329–384.

[8] Embrechts P., McNeil A. J., Straumann D., *Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls*, w: *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. M.A.H. Dempster, Cambrige Univeristy Press, Cambrige 2002.

[9] Gallant R., Rossi P., Tauchen G., *Stock prices and volume*, „Review of Financial Studies" 1992, 5, s. 199–242.

[10] Hu L., *Dependence Patterns across Financial Markets: a Mixed Copula Approach.* Working paper, Department of Economics, The Ohio State University.

[11] Karpoff J., *The relation between price changes and trading volume: A survey*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis" 1987, 22, s. 109–126.

[12] Nelsen R., *An Introduction to Copulas*, Springer–Verlag, New York 1999.

[13] Patton A., *Modelling asymmetric exchange rate dependence*, „International Economic Review" 2006, 47, s. 527–556.

[14] Rogalski R., *The dependence of prices and volume*, „Review of Econometrics and Statistics" 1978, 36, s. 268–274.

[15] Smirlock M., Starks L., *An empirical analysis of the stock price–volume relationship*, „Journal of Banking and Finance" 1988, 12, s. 31–41.

[16] Tkac P. A.: *A trading volume benchmark: Theory and evidence*, „Journal of Financial and Quantitative Analysis" 1988, 34, s. 89–114.

[17] Yoon P. S., Starks L. T., *Signaling, investment opportunities, and dividend announcements*, „Review of Financial Studies" 1995, 8, s. 995–1018.