Jan Konior

# Wnioskowanie przez analogię i potrzeba jego rozwijania w edukacji matematycznej

Nauczyciel i Szkoła 1-2 (22-23), 67-77

2004

Jan Konior

# Wnioskowanie przez analogię i potrzeba jego rozwijania w edukacji matematycznej

**1. Motywy podjęcia tematu i cel artykułu.** Zainteresowanie dydaktyków, w szczególności dydaktyków matematyki problematyką rozumowań przez analogię i rozwijaniem tej umiejętności w ramach edukacji matematycznej jest w ostatnich latach stosunkowo niewielkie, jeśli brać pod uwagę znaczenie tej formy myślenia w poznawczej aktywności człowieka, a stopień zaangażowania badawczego mierzyć liczbą specjalistycznych prac. Choć temat daleki jest od pełnej eksploatacji badawczej, o analogii często się jednak mówi. Taki stan rzeczy ma różne źródła, tkwiące m.in. w przekonaniu, że myślenie przez analogię stanowi od początku intelektualnej aktywności umysłu naturalny jej składnik, konstytuuje się w niej jakby samo - poprzez doświadczenie - i przynajmniej na swym elementarnym poziomie i w mniej specjalistycznych obszarach nie musi być wspomagane w rozwoju w specjalnie organizowanych zabiegach dydaktycznych. Inna przyczyna wywodzi się z tradycyjnego nauczania podającego matematyki, wzorowanego na strukturze i metodologii dyscypliny macierzystej. Chodzi o priorytet metodologiczny i zainteresowanie przede wszystkim rozumowaniami dedukcyjnymi; tymczasem myślenie przez analogię takim nie jest. Nie bez znaczenia pozostaje też oddziaływanie pewnej tradycji, wywodzącej się jeszcze od K.Poppera, który tę problematykę przesunął do psychologii. Jednak przeświadczenie o roli rozumowań przez analogię w życiu codziennym i zawodowym, a także jej niewątpliwe znaczenie w nauce, zwłaszcza na etapie dokonywania odkryć, nakazuje spojrzeć nań także od strony dydaktycznej.

Głównym celem artykułu jest więc zwrócenie uwagi na doniosłość wnioskowania przez analogię w edukacji matematycznej, a więc spojrzenie nań jako na temat kryjący obszerną problematykę dydaktyczną, zaś podstawowym przesłaniem to, że w procesie nauczania mamy nie tylko wykorzystywać analogię, ale także systematycznie uczyć racjonalnego posługiwania się nią, ukazując zarówno jej walory jak i sytuacje, w których może ona prowadzić na manowce.

**2. Powszechność i znaczenie myślenia przez analogię.** Myślenie przez analogię jest jedną z pierwotnych i bodaj najpowszechniejszą formą zachowań poznawczych człowieka. Pierwotną, gdyż proste formy tego myślenia stwierdza się w rozwoju osobniczym już od najmłodszych lat, gdzie ich występowanie i rola wcale nie są epizodyczne. Powszechną, gdyż jego elementy stosujemy niemal w każdej sytuacji życiowej, niezależnie od wykształcenia, zawodu itp. Zaznaczają one swą obecność w języku, choćby np. w powiedzeniu „iść gęsiego" lub w nazwie „wieloryb", której urobienie od formy dwuczłonowej „wielka ryba" wskazuje tym razem na zawodność analogii (wieloryb wcale nie jest rybą). Ten prymarny charakter analogii podkreśla H. Freudenthal: „Analogia jest dlatego tak skutecznym środkiem stanowienia związków w matematyce i poza nią, gdyż jest w ogóle naturalnym i pierwotnym środkiem poznania świata." ([4], str. 78).

Wskazując na znaczenie myślenia przez analogię, należy zwrócić też uwagę, że ten sposób zachowań mentalnych jest w praktyce jedyną drogą, na której możemy coś wnosić o stanie emocjonalnym - i ogólniej - o stanie świadomości drugiej osoby. Bez analizy własnych przeżyć wewnętrznych, przy założeniu ich podobnej struktury dla całego gatunku, bylibyśmy bezradni, pragnąc dokonywać hipotetycznych rekonstrukcji zjawisk przebiegających w świadomości innych osób. Brak takich możliwości byłby brzemienny w skutkach, zakłócając kontakt psychiczny i procesy porozumiewania się ludzi.

Posługując się analogią w sytuacjach codziennych (i nie tylko) zachowujemy się tak, jakbyśmy podstawą swych działań uczynili generalne założenie o regularności budowy świata. Przyjmujemy więc, że funkcjonuje on niezmiennie na tych samych zasadach w miejscu i czasie *A*, co w miejscu i czasie *B*. Zapewne świadoma akceptacja takich rozumowań zasadza się na przekonaniu o jedności natury. To przekonanie jest w ontogenezie myślenia naturalnym uwarunkowaniem naszych zachowań wewnętrznych i zarazem jakby entymematyczną przesłanką. Z drugiej strony myślenie przez analogię jest także - niezależnie od swego pierwotnego charakteru - efektem osobistego doświadczenia jednostki. Jest przez to doświadczenie wzbogacane. Charakterystyczne oznaki na zaśnieżonym stoku i jego kształt nasuwają doświadczonemu taternikowi myśl o możliwości rychłego zejścia lawiny, ponieważ w przeszłości spotykał takie zjawiska i wielokrotnie obserwował ich następstwa.

Myślenie oparte na analogii nie stanowi domeny jedynie działań potocznych. Występuje ono - wspomniano już o tym - również w nauce, gdzie najczęściej wyznacza się mu rolę heurystyczną i przypisuje charakter twórczy. W tym obszarze aktywności ludzkiej kojarzy się zresztą jeszcze z tą formą myślenia dalsze funkcje: poznawczą, argumentacyjną, systematyzującą i inne [1]. Dedukcyjna metodologia matematyki - rozumianej jako gotowy produkt myśli zobiektywizowanej w odpowiednim języku - nie dopuszcza argumentacji opartych na analogii. Nie oznacza to jednak, że nie mają one znaczenia na etapie wykrywania twierdzeń i dochodzenia do pojęć matematycznych, a ta ich rola interesuje nas najbardziej z punktu widzenia aktywnego nauczania. O znaczeniu analogii w matematyce tak oto mówi Z. Krygowska: „Uogólnienia i wielkie syntezy, tak charakterystyczne dla współczesnej matematyki, to wyrażone językiem matematycznym analogie. Zmysł analogii odgrywa zasadniczą rolę w rozwijaniu się naszej intuicji w dziedzinie matematyki". ([8], str. 67).

Znaczenie analogii w myśleniu twórczym znalazło wyraz w polyowskich regułach preferencji. Twórca nowoczesnej heurystyki podkreśla rolę myślenia przez analogię, formułując tak jedną z reguł użytecznych przy rozwiązywaniu problemów: obiekt mający więcej punktów wspólnych z zadaniem ma pierwszeństwo przed obiektem mającym mniej takich punktów. ([10], str. 284). Jednocześnie w różnych swych dziełach G. Polya zwraca uwagę na subtelną naturę tego narzędzia myśli; może ono być spożytkowane na drodze do pomysłu i w samym procesie rozwiązywania zadania w różnoraki sposób i przynosić korzyści nawet wówczas, gdy atak na problem przy pomocy tego narzędzia ostatecznie skończy się niepowodzeniem.

**3. Dwa przykłady paradygmatyczne.** Słowo „analogia", przy swym chwiejnym, potocznym rozumieniu kryje różne treści. Aby przynajmniej w zarysie wskazać kierunek częściowego porządkowania tego dość nieokreślonego pola, rozważymy dwa paradygmaty sytuacji, szczególnie interesujących z dydaktycznego punktu widzenia.

Treścią pierwszego jest rekonstrukcja wnioskowania M. Kopernika w toku opracowywania jego teorii heliocentrycznej. Autor De revolutionibus ... przytacza opis wrażenia jakiego doznaje pasażer okrętu, obserwując pozorny ruch mijanego nadbrzeża. Takie samo wrażenie powstaje - pisze on - przy obserwacji ruchu Słońca na sklepieniu niebieskim. Ruch ten musi być przeto ruchem pozornym. Mamy tu klasyczne rozumowanie, w którym z sytuacji dobrze znanej (pasażerowie okrętu - brzeg) wnioskuje się o relacjach pozostających poza naszym bezpośrednim zasięgiem (układ Ziemia i jej mieszkańcy - Słońce).

Drugi przykład, związany bezpośrednio z rozwojem matematycznym dziecka wzbogacimy częściowo komentarzem metodycznym akcentującym od tej strony rolę i funkcjonowanie analogii. Przykład dotyczy spontanicznego kształtowania się pojęć mierzenia i długości. W początkach tego procesu, daleko wyprzedzających zorganizowane nauczanie (choć sam proces nakłada się jeszcze później na wiele lat nauki szkolnej) istotne są dwa momenty: ujęcie przez dziecko stałości długości oraz zdolność do kwalifikacji dwóch wielkości jako wielkości tego samego rodzaju. Pierwszy jest przedmiotem rozważań psychologii, gdzie stwierdzono, że przekonanie o niezmienniczości przedmiotu w toku odpowiednich transformacji nie od razu staje się udziałem dziecka. Drugiemu poświęcimy tu nieco miejsca.

Aby zmierzyć pewną wielkość należy ją porównać z wielkością tego samego rodzaju, najczęściej znormalizowaną, tj. przyjętą umownie za jednostkę[1]. Przesłan-

[1] Nauki mierzenia nie należy jednak rozpoczynać od autorytarnego wprowadzenia jednostek (cm, dcm, m, ...) i ćwiczenia ich zamiany, jak to się w praktyce nieraz dzieje. Najpierw dziecko powinno

ki do rozumienia procesu mierzenia, a tym samym pojęcia długości powstają zatem wówczas, gdy myśl dziecka staje się zdolna do selekcji wielkości pod względem ich rodzaju, aby je później porównywać. Nie jest tak od początku. Taka klasyfikacja zasadza się na dostrzeganiu podobieństwa obiektów ze względu na pewne ich cechy, tutaj właśnie ze względu na wymiar[2] (liniowy, polowy, objętościowy) bądź inne jak np. ciążenie, upływanie lub trwanie (w przedziale od ... do) itp. Tak więc kawałek patyka, wahający się sznurek z podwieszoną maskotką u tornistra i przebyty odcinek drogi mają wymiar liniowy, wzięty do ręki kamień lub torebka mąki natomiast ciążą, zaś dzień pracy i polarna noc upływają. Dopóki na patyk i odcinek drogi patrzymy pod kątem wymienionej cechy i nie bierzemy pod uwagę żadnych innych cech, którymi się przecież różnią, oba przedmioty zaliczamy do jednej kategorii; są one bowiem jednakowe pod tym względem.

Ogólnie - wzorując się na matematycznym sposobie opisu - powiemy, że taka „jednakowość pod pewnym względem" ma istotne własności: jest zwrotna (każdy przedmiot jest „jednakowy" sam ze sobą), symetryczna (gdy pierwszy obiekt jest „jednakowy" z drugim, to i na odwrót) i przechodnia (gdy pierwszy jest „jednakowy" z drugim, a drugi z trzecim, to również pierwszy z trzecim). Dzięki temu (aby pozostać przy naszym przykładzie dotyczącym mierzenia długości) na tle relacji „*... ma ten sam wymiar co ...*" powstaje klasa, w obrębie której możemy obiekty porównywać, a następnie mierzyć ustalonymi jednostkami[3].

Podkreślmy wyraźnie, że ten częściowo sformalizowany opis nie może w naszym przykładzie w pełni zadowalać pod względem psychologicznym ani pod względem matematycznym, choć nawiązuje do stylu matematycznego rygoryzmu. Jest bowiem jednostronną i uproszczoną charakterystyką raczej zamkniętego schematu niż autentycznego przebiegu bardzo złożonego zjawiska przebiegającego w czasie. Został tak skonstruowany i zaprezentowany, aby ukazać na pewnym etapie udział analogii w kształtowaniu się myślenia pojęciowego. W rzeczywistości procesy formowania się pojęć u dziecka (i nie tylko) nie przebiegają tak jednokierunkowo; umysł zapewne dochodzi do wielu z nich różnymi współzależnymi drogami jednocześnie.

---

operacyjnie i językowo opanować porównywanie, konstatując na przykład, że krótki ołówek, a także klucz od mieszkania może odłożyć wzdłuż brzegu kartki trzykrotnie. Nabywa więc doświadczeń w zastępowaniu pewnych przedmiotów przez inne oraz w "wymierzaniu" jednych przedmiotów drugimi. Dopiero po cyklu takich wielokierunkowych ćwiczeń ołówek zostaje - tym razem przy udziale naturalnej motywacji - zastąpiony znormalizowaną jednostką długości. Taki porządek ma onto - i filogenetyczny sens jak również oparcie w znanej zasadzie paralelizmu dydaktycznego ([3], str. 127 - 138).

[2] Dla ścisłości podkreślmy, że słowo "wymiar" nie oznacza tutaj - jak nieraz w języku potocznym - tego samego co „długość".

[3] Dlatego też niektóre programy nauczania słusznie zalecają, aby najpierw oswajać dziecko z odróżnianiem przedmiotów jedno, dwu - i trójwymiarowych; dopiero w następnej kolejności przewidują porównywanie - na różne sposoby - przedmiotów w obrębie tej samej klasy, a jeszcze później mierzenie jako porównywanie wyrażone liczbowo.

Porównajmy oba przykłady paradygmatyczne. Pierwszy ilustruje klasyczne - spotykane na co dzień i w sytuacjach szkolnych - rozumowanie przez analogię. Możemy tu zatem wskazać podstawowe konstrukty wnioskowania: punkt wyjścia - przesłanki i stwierdzenie docelowe, tj. wniosek. W drugim natomiast jest inaczej: analogia sprowadza się jakby do ujęcia „jednakowości" przedmiotów, a przez to otwiera drogę do nowych pojęć (wymiaru liniowego, a następnie długości). Proces ten, przedstawiony tu w dużym uproszczeniu, kończy się więc aktem konstruowania pojęcia.

Zarówno rozumowanie w znaczeniu czynności konkluzywnej, polegającej na wyciąganiu wniosków - w szczególności rozumowanie o charakterze przyczynowo skutkowym - jak i tworzenie pojęć, są procesami poznawczymi, tym niemniej są to z metodologicznego, a także dydaktycznego punktu widzenia kategorie różne. Tak więc analogia (tego słowa używamy ciągle w sensie zastanym) może być osnową rozmaitych zabiegów poznawczych, jak również podstawą odmiennych czynności wiedzotwórczych.

**4. Istota wnioskowania przez analogię.** Pierwowzorem współczesnego sposobu rozumienia analogii jest proporcja[4]. Jesteśmy tu, jak w wielu innych przypadkach spadkobiercami dorobku starożytnych. W tradycji platońskiej i u Arystotelesa „analogia" oznaczała równość stosunków $a : b = c : x$, z której na podstawie trzech danych wielkości można wyliczyć czwartą. Analogie występujące powszechnie nie zawsze jednak wpisują się w taki schemat kwantytatywny. Pojęcie analogii w nauce i jego opis ewoluowały więc tak, że równość stosunków (liczb) zastępowano umowną formułą mającą wyrażać jego charakterystykę jakościową:

*dzień - noc :: białe - ........,*

która po „rozwiązaniu" może być odczytana jako zdanie *dzień ma się tak do nocy jak kolor biały do czarnego*. Znak :: odpowiadający równości zmienił z czasem swe znaczenie. Nabył bądź to charakteru równoważności, bądź - w poszerzonej interpretacji - stał się odpowiednikiem dość nieokreślonych zwrotów językowych typu relacyjnego *jest podobny do, być odpowiednim (odpowiada), odnosi się tak do ..., jak* ... itp. Jeśli łącznik „-" zastąpimy zgodnie z intencją tych zmian znakiem relacji, otrzymamy schemat

$$aRb :: cR'x,$$

używany dziś w wielu przypadkach - na przykład w badaniach psychologicznych nawet jako paradygmat - do orzekania o funkcjonowaniu analogii między polami relacji $R$, $R'$ i między samymi tymi relacjami. Umowny znak :: reprezentuje w powyższym opisie związek analogii (nieraz mówi się krótko o analogii) między

[4] Stwierdzenie to nie oznacza ignorowania faktu, że słowo "analogia" jest w powszechnym użyciu słowem wieloznacznym; także w specjalistycznych pracach można wyodrębnić różne orientacje i propozycje terminologiczne w tym zakresie. Jednak z historycznego i konstrukcyjnego stanowiska mają one - jak wolno ogólnie przyjąć - ten sam punkt wyjścia.

stanami rzeczy wyrażanymi przez relacje po lewej i prawej jego stronie (por.[1], [2], [5]). Analogia jest to więc pewien rodzaj podobieństwa między dziedzinami.

Sytuacje, które zechcemy podporządkować temu schematowi mogą okazać się w dużym stopniu nieokreślone. W rzeczywistości bowiem nasza myśl robi użytek z analogii także wówczas, gdy relacje $R$ *i* $R'$, w szczególności ta ostatnia, ich dziedziny lub przeciwdziedziny oraz samo znaczenie praktyczne symbolu :: w danym kontekście nie zostały do końca sprecyzowane. Często bowiem pozostają one domyślne lub nawet nieznane. Może być nawet tak, że elementem poszukiwanym jest wręcz relacja $R'$, wbrew sugestiom zawartym w symbolice literowej i w konstrukcji schematu $aRb :: cR'x$, w którym niewiadomą jest argument $x$. Ponadto takich relacji może być więcej, przy czym nie wyłączamy unarnych; mogą się one różnić liczbą i rodzajem argumentów. Wiele przypadków wskazujących na wykorzystywanie analogii zdaje się wyłamywać z tego schematu. Niekompletność naszego opisu nie powinna jednak dziwić, mamy wszak do czynienia z próbą zaprezentowania kontekstu towarzyszącego myślowym zachowaniom o charakterze heurystycznym.

Dotychczasowe uwagi prowadzą więc do rozróżnienia związku analogi oraz wnioskowania przez analogię jako odrębnych kategorii. W niespecjalistycznych rozważaniach lub skrótowym opisie używa się terminów zamiennie i nie zawsze klarownie oddziela związek analogii od samego wnioskowania przez analogię. To ostatnie jest procesem myślowym, który może być generowany przez związek analogii po jej zidentyfikowaniu przez podmiot. Proces ów jest zatem niejako nadbudowany nad tym związkiem. Konkludując przyjmiemy, że pod nazwą wnioskowanie przez analogię rozumie się proces myślowy, w którym od zdań danych (przesłanek) przechodzimy do zdania innego (wniosku), biorąc za podstawę istnienie związku analogii między stanami rzeczy orzekanymi w przesłankach i we wniosku.

Przyjęta charakterystyka kontrastuje z określeniem wnioskowania dedukcyjnego, które pojmujemy jako przechodzenie od przesłanek (zdań przyjętych za podstawę) do wniosku (zdania będącego konkluzją), przy czym konkluzja wynika logicznie z przesłanek. Ten ostatni warunek oznacza, że podstawa wykonywania każdego kroku w obrębie wnioskowania dedukcyjnego jest wyraźnie określona. Stanowią ją tautologie logiczne i tzw. reguły inferencji; to one właśnie pozwalają na wylegitymowanie każdego kroku i jednoznaczną odpowiedź czy wniosek istotnie wynika logicznie z przesłanek. Natomiast sprecyzowanie takiej podstawy w przypadku wnioskowania przez analogię - i tu jest zasadnicza różnica - nie jest możliwe, nawet gdyby nasza formalna wiedza dotycząca dziedziny skojarzonej w powyższym schemacie z formułą $aRb$, wydawała się dostatecznie uporządkowana, w miarę kompletna i mobilna. Potrzebne są jeszcze przesłanki dotyczące samego związku analogii, a ten jak widzieliśmy nie poddaje się jednoznacznej charakterystyce. Można tu jedynie w sposób niekonstruktywny stwierdzić, że to, na czym dokładnie polega związek analogii, a więc na jakiej podstawie odbywa się przejście do wniosku w takim rozumowaniu, pozostaje tajemnicą naszej myśli.

Nieokreśloność związku analogii odpowiedzialna za to, że oparte na nim wnioskowanie nie ma - tak jak dedukcja - waloru niezawodności została w pewien szczególny sposób przezwyciężona w matematyce. Związek analogii, reprezentowany w opisowym schemacie $aRb :: cR'x$ przez znak ::, ma tutaj swój ścisły odpowiednik w postaci morfizmów: homomorfizmu oraz izomorfizmu. Jeśli powrócić na grunt całkiem potocznego rozumienia analogii, gdzie językowo funkcjonuje ona również jako cecha stopniowalna (podobieństwo może być większe lub mniejsze), to izomorfizm byłby intuicyjnym odpowiednikiem pełnej analogii, zaś homomorfizm częściowej. Idea matematycznego wyprecyzowania znaczeń funkcjonujących potocznie nawiązuje do wspomnianej już wcześniej interpretacji związku analogii jako odpowiedniości.

Niech bowiem $D = \langle X, f, g, R \rangle$ *i* $D' = \langle X', f', g', R' \rangle$ oznaczają dziedziny, w których $f, g, R$ *i* $f', g', R'$ są odpowiednio funkcjami jedno i dwuargumentowymi (np. działaniami) oraz relacjami w zbiorach $X$ *i* $X'$. Funkcję $h: \rightarrow XX'$ odwzorowującą zbiór $X$ na zbiór $X'$ nazywamy homomorfizmem dziedziny $D$ na dziedzinę $D'$ (zaś dziedzinę $D$ homomorficzną z dziedziną $D'$), gdy:

(i) $h(f(x)) = f'(h(x))$ dla wszystkich $x$ ze zbioru $X$,

(ii) $h(g(x,y)) = g'(h(x), h(y))$ dla wszelkich $x, y$ ze zbioru $X$,

(iii) $x'R'y' \Leftrightarrow \exists\, x,y\ ?\ X\, [x' = h(x) \wedge y' = h(y) \wedge x R y]$ dla $x', y'$ ze zbioru $X'$.

Gdy funkcja $h$ jest odpowiedniością wzajemnie jednoznaczną, wówczas nazywamy ją izomorfizmem. W tym przypadku warunek (iii) przyjmuje prostą postać:

(iii') $x R y \Leftrightarrow h(x) R' h(y)$ dla każdego $x$ i $y$ ze zbioru $X$.

Warunki (i) - (iii) można wyrazić słownie mówiąc, że przy odwzorowaniu $h$ zbioru $X$ na zbiór $X'$ działaniom $f, g$ na elementach pierwszego z tych zbiorów odpowiadają ściśle działania $f', g'$ na przyporządkowanych im (poprzez funkcję h) elementach drugiego, zaś relacji $R$ między elementami zbioru $X$ odpowiada relacja $R'$ zachodząca między ich obrazami (poprzez tę funkcję) w zbiorze $X'$.

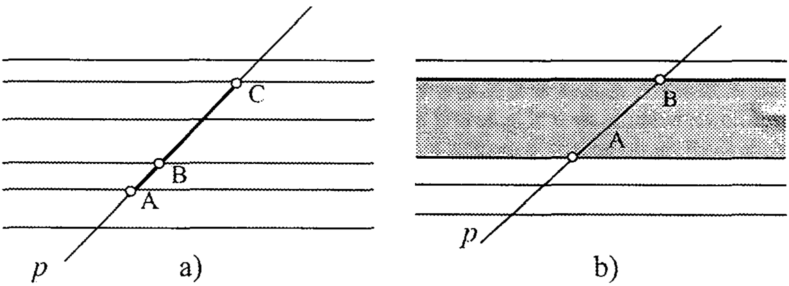
Mimo częściowej i powierzchownej zbieżności budowy formuły (iii') i wcześniejszego schematu $aRb :: cR'x$ widać tu zasadnicze strukturalne różnice i odmienny sens przypisywany tym wzorom (niezależnie od przedyskutowanej już nieokreśloności tego drugiego). Ponieważ zostały explicite sformułowane warunki (i) - (iii), którym czyni zadość izomorfizm h, więc z tego, że jakaś własność wyrażona przy pomocy pojęć $X, f, g, R$ przysługuje dziedzinie $D$ można zasadnie wnosić (można to ogólnie i ściśle udowodnić), że odpowiednia własność wypowiedziana w terminach $X', f', g', R'$ przysługuje również dziedzinie $D'$. Na przykład, jeśli relacja $R$ porządkuje zbiór $X$, to relacja $R'$ także porządkuje zbiór $X'$. Izomorfizm dziedzin $D$ i $D'$ w matematyce pozwala już automatycznie „przenosić" różne własności z jednej na drugą. Tak więc udowodnienie izomorfizmu dziedzin jest z heurystycznego punktu widzenia w pewnym sensie zamknięciem problemu. Natomiast, gdy opieramy się jedynie na domniemaniu związku analogii, możemy przy jego pomocy dokonać istotnie nowych, interesujących odkryć w jednej z nich, ale każdą odkrytą własność trzeba niezależnie udowodnić na drodze dedukcyjnej.

Innego przykładu zastosowania matematycznej metody do opisu analogii można upatrywać w wyodrębnieniu klasy relacji binarnych, które są zwrotne i symetryczne zarazem. Takie relacje zwie się tolerancjami (por.[11]). Jest to przykład matematyzacji pozwalający kompletować twierdzenia na temat tolerancji, dowodząc ich różnych formalnych własności. Ale taka formalizacja, jakkolwiek procentująca na użytek budowy teorii matematycznej, nie dostarcza twierdzeń interesujących z heurystycznego ani też z żadnego innego punktu widzenia, który mógłby się okazać bezpośrednio użyteczny w wyszukiwaniu twórczych metod aktywizacji nauczania.

**5. Rola analogii w edukacji matematycznej na poziomie szkolnym.** W praktyce nauczania analogia ciągle jeszcze pojawia się przypadkowo, spontanicznie - tak jak w sytuacjach potocznych, a więc najczęściej w sposób nie tylko zupełnie nie kontrolowany, ale i nawet całkowicie nie dostrzegany. Tymczasem jej rola, zwłaszcza w dobie współczesnych reform, odstępujących od prezentacji gotowej matematyki i dopuszczających obok dedukcji wiele innych form aktywności, które należy u uczniów rozwijać, mogłaby być znacznie większa. Kształcenie myślenia przez analogię wyzwalanego w obrębie treści matematycznych winno mieć charakter zamierzony, przez nauczyciela planowany i metodycznie organizowany. Wówczas może dać widoczne efekty. Podkreślała to już przed laty Z. Krygowska, akcentując - za Stefanem Banachem - wielopoziomowy charakter tego myślenia w matematyce i zwracając równocześnie uwagę, że przy takim jego pojmowaniu „dostrzega się łatwo, jak w rzeczywistości szkolnej rola analogii jest jeszcze uboga i jakie możliwości edukacji intelektualnej otwierają się nawet przed uczniami słabszymi, gdy wykorzystuje się szeroko różne analogie w sposób zarówno matematycznie, jak i pedagogicznie racjonalny". ([9], str.30).

W matematyce analogia wykorzystywana jest na różne sposoby; wśród nich są dość specyficzne (w porównaniu z sytuacjami potocznymi), co oczywiście przenosi się do nauczania. Przykładem takiego sposobu eksploatacji analogii jest tzw. transport struktury. Przytoczymy tu dla ilustracji w dużym skrócie propozycję rozwiązania dydaktycznego w klasie, które ten specyficzny sposób myślenia przez analogię czyni dostępnym nawet na poziomie całkiem elementarnym. ([8], str. 40).

Uczniowie mają już poglądowe, lecz dobrze ugruntowane pojęcia odcinka, prostej i półprostej; w szczególności potrafią różne fakty dotyczące poprzedzania punktów na prostej, ich następowania i leżenia między konkretyzować w rysunku. Ta wiedza dotyczy więc struktury porządkowej linii prostej. Proponujemy, by próbowali swoje wiadomości przenieść do zbioru prostych równoległych, gdy te proste są przecięte dowolną prostą $p$ (rys. 1a).




Rys.1

Przez każdy punkt prostej $p$ przechodzi dokładnie jedna prosta rozważanej rodziny prostych równoległych. Gdy punkt B leży między punktami A i C na prostej p, to o prostej przechodzącej przez ten punkt możemy powiedzieć, że leży między prostymi przechodzącymi odpowiednio przez punkty A i C. Porządek na odcinku został tą bardzo poglądową metodą „przeniesiony" do rodziny prostych równoległych. W ten sposób rodzina ta została więc uporządkowana. Punkty wszystkich prostych leżących między dwiema wybranymi tworzą łącznie figurę zwaną pasem, jeśli uwzględnimy również punkty tych wybranych prostych (rys.1b). Tak oto transportując porządek, zdefiniowaliśmy kolejne nowe pojęcie. Podobnie możemy postępować dalej, jeśli już uczniowie zauważyli analogię między strukturą prostej a strukturą rozważanej rodziny prostych równoległych (innym, w ten sam sposób otrzymanym pojęciem mogłoby być choćby pojęcie półpłaszczyzny jako odpowiednik znanego pojęcia półprostej). Dostrzegą oni nie tylko nowe pojęcia, ale również nowe twierdzenia dzięki naśladowaniu tego, co już wiedzą o prostej, półprostej i odcinku.

Zwróćmy uwagę, że pojęcia pasa i półpłaszczyzny pojawiają się - z epistemologicznego punktu widzenia - w zupełnie inny sposób niż wówczas, gdy wprowadzamy każde oddzielnie i bez kontekstu struktur izomorficznych, np. na podstawie obserwacji tradycyjnego rysunku lub manipulacji kartką papieru. Oczywiście odwoływanie się do modeli rysunkowych bądź innych też może się okazać potrzebne jako zabieg równoległy, tym niemniej wykorzystanie izomorfizmu jest zabiegiem poznawczo bogatszym i stwarza duże możliwości rozwojowe myśli ucznia. Ucząc tak, nie tylko rozwijamy intelektualnie, lecz przygotowujemy ucznia do racjonalnego stosowania analogii poza matematyką, w jego przyszłym życiu osobistym, społecznym i zawodowym.

**6. Analogia i rozumowanie przez analogię jako przedmiot badań dydaktyki.** Problematyka dotycząca rozwijania myślenia przez analogię w edukacji matematycznej na różnych poziomach prawie nie została jeszcze podjęta w szerszych i systematycznych badaniach, organizowanych w takiej skali, jaka jest niezbędna. Otwiera się olbrzymi obszar eksploracji badawczej, koniecznej ze względu na praktyczny aspekt zagadnień, które wymagają opracowania podstaw teoretycznych oraz głębszego zakotwiczenia w sprawdzonych faktach empirycznych. Aby choć częściowo wskazać na rozległość tej problematyki, warto przytoczyć kilka przykładowych zagadnień, mogących stanowić jakiś punkt orientacyjny na drodze racjonalnych poszukiwań i ustaleń (słowo „przykładowych" w tym kontekście nie oznacza problemów uważanych za wzorcowe, czy też najważniejsze ani nawet za wyprecyzowane w szczegółach do końca).

1) Czy na dostrzeganie (rozpoznanie) analogii przez uczniów ma wpływ kontekst; jak ono przebiega w sytuacjach matematycznych, a jak w kontekstach nie zawierających explicite treści z zakresu matematyki.
2) Jaki stopień subiektywnej pewności skłonni są uczniowie przypisać własnym wnioskowaniom opartym na analogii; czy ta ocena zmienia się z wiekiem szkolnym i od jakich innych parametrów ewentualnie zależy.
3) Jaka jest uczniowska ocena wnioskowań opartych na analogii prezentowanych im dla porównania z innymi typami rozumowań.
4) Czy i jak zdolność do wnioskowań przez analogię w zakresie treści matematycznych koreluje z wynikami ogólnymi ucznia w szkole.
5) Jaka jest struktura i etapy wnioskowania przez analogię na materiale matematycznym u uczniów w różnym wieku szkolnym.
6) Czy można wyodrębnić różnice w percepcji i stosowaniu analogii w sytuacjach matematycznych zaprezentowanych werbalnie oraz za pomocą środków geometrycznych.
7) Do bardziej szczegółowych można zaliczyć pytanie o to, jak przebiega u uczniów w różnym wieku transport struktury ze zbioru A do zbioru B (jako zmienne niezależne można w badaniach uwzględniać rozmaite parametry dotyczące struktur zadanych na zbiorze A).

Ogólniejszym zadaniem jest wypracowanie metodologii badań nad postrzeganiem i stosowaniem analogii przez uczniów w sytuacjach matematycznych. Próby nawiązywania do badań operujących materiałem pozamatematycznym stanowić mogą oczywiście pierwszy krok, ale naśladowanie istniejących procedur ma zakres ograniczony, gdyż na przykład psychologiczne testy analogii są zbyt wąskim szablonem badawczym, aby mogły objąć wielorakie sytuacje, w których analogia jako narzędzie poznawcze występuje w matematyce. Różnorodność tych sytuacji jest tutaj zjawiskiem naturalnym i nie można jej ograniczyć, nawet na poziomie kształcenia propedeutycznego. Nie powinno się ich zatem z badań dydaktycznych wyłączać.

## Bibliografia:

Biela A.: *Psychologiczne podstawy wnioskowania przez analogię*; PWN, Warszawa 1981

Biela A.: *Analogia w nauce*; Instytut Wydawniczy Pax, Warszawa 1989

Duda R.: *Zasada paralelizmu w dydaktyce*; Dydaktyka Matematyki 1 (1982)

Freudenthal H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1; Klett , Stuttgart 1974

Jurkowski A.: *Rozumowanie przez analogię u dzieci w wieku szkolnym*; PWN, Warszawa 1967

Konior J.: *Dydaktyka matematyki i jej metodologia w rozwoju (wybrane zagadnienia)*; Dydaktyka Matematyki 20 (1998)

Konior J.: *Dydaktyka matematyki postrzegana od wewnątrz i z zewnątrz; formalne i nieformalne uwarunkowania na drodze do własnej tożsamości (refleksje i przykłady)*; Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej, tom 9 Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2002

Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1; WSiP, Warszawa 1977

Krygowska Z.: *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*; Dydaktyka Matematyki 6 (1986)

Polya G.: *Odkrycie matematyczne*; WNT, Warszawa 1975

Szrejder J.A.: *Równość, podobieństwo, porządek*; WNT, Warszawa 1975

**Summary**

The reasoning in mathematics based on analogy is characterized in the article. The author's aim is to emphasize the meaning of the reasoning of such type in mathematical education. The text contains examples of using analogy in education. Pedagogical research problems are formulated at the end of the article.