Jan Konior

Elementy metody czynnościowej w edukacji matematycznej : z przełożeniem na język działań praktycznych

Nauczyciel i Szkoła 1-2 (26-27), 123-138

2005

Jan Konior

Elementy metody czynnościowej w edukacji matematycznej
(z przełożeniem na język działań praktycznych)

Charakter, założenia i cele artykułu.

Metoda czynnościowa[1] w nauczaniu uchodzi w opinii wielu specjalistów za jeden ze skutecznych sposobów aktywizacji uczniów na każdym poziomie kształcenia, niezależnie od jego treści. Dotyczy to w szczególności także edukacji matematycznej. Jednak zarówno idea aktywnego poznania i zachowania się jednostki w różnych okolicznościach, jak też i koncepcja czynnościowego sterowania procesami mającymi w szkole rozwijać takie postawy nie są czymś zupełnie nowym. Pierwsza z tych idei sięga starożytności. Na niej zasadza się strategia dialogów sokratejskich, w których mistrz odwraca tradycyjny porządek, wyznaczając poznającemu rolę całkiem odmienną od pozycji przewidywanej dotąd dla słuchacza – odbiorcy. Druga okresowo powracała w różnych krajach i formach, ostatnio jako postulat wyrażany hasłem *stop teaching, start learning*. Odnajdujemy ją w pracach pedagogicznych z różnych okresów, by wymienić tu przykładowo jedynie autorów publikujących w czasach nowszych: W. Okonia, J. Walczynę, oraz – spoza rodzimego kręgu – P. J. Galpierina.

Przedmiotem niniejszego artykułu jest metoda czynnościowa w jej koncepcji odniesionej do nauczania matematyki. Ta koncepcja została opracowana przez A. Z. Krygowską[2], która projektowane sposoby działań dydaktycznych wyspecyfikowała i uogólniła zarazem z pełnym odniesieniem do przedmiotowej i metodologicznej natury matematyki oraz podniosła je do rangi strategii nauczania treści matematycznych. Naukowe podstawy koncepcji były wyprecyzowane i ufundowane w pracy [2], a sama metoda – całościowo już zaprezentowana i rozwinięta – w pierwszej części trzytomowego *Zarysu dydaktyki matematyki* [3]. Choć niełatwo byłoby o międzyprzedmiotowe porównania wymagające zgłębiania metodologii i specyfiki różnych rodzajów wiedzy, można zaryzykować stwier-

[1] Jako członu tej nazwy używa się w literaturze także określeń: *koncepcja*, *idea*, *strategia* i innych; będziemy z tej synonimii dalej korzystać.

[2] Minęła właśnie setna rocznica urodzin Profesor A. Z. Krygowskiej (1904 -1988), wybitnego dydaktyka matematyki, czołowego współtwórcy podwalin naukowej dydaktyki matematyki w Polsce i na świecie. Dla autora niniejszej pracy, szczycącego się przynależnością do grona Jej uczniów i wieloletnich współpracowników, upływająca rocznica jest okazją do przypomnienia koncepcji, której opracowanie uważała za jedno ze swych ważniejszych dokonań.

dzenie, iż metoda czynnościowa ma szczególny walor, a nawet swój pogłębiony wymiar i sens dydaktyczny, właśnie w odniesieniu do nauczania matematyki. Żywimy to przekonanie, uświadamiając sobie specyfikę pojęć i twierdzeń matematycznych oraz ich wysublimowany stosunek do rzeczywistości materialnej, z której się wywodzą. Chyba w żadnym z przedmiotów szkolnych rozwijanie racjonalnych postaw myślowych i rozumowań nie korzysta tak dosłownie z czynnościowej drogi prowadzącej od tej rzeczywistości do abstrakcji, jak to ma miejsce w edukacji matematycznej; żadne też treści, poza matematycznymi, nie wykazują w psychologicznym procesie recepcji tak daleko idącego paralelizmu z tą drogą, która okazuje się dla przyswajania tego typu pojęć naturalna.

Poza kręgiem dość wyspecjalizowanej literatury raczej rzadko pojawiają się prace szerzej traktujące o metodzie czynnościowej w odniesieniu do nauczania treści matematycznych, niektóre zresztą bywają z reguły zamieszczane w mniej rozpowszechnionych i nie zawsze dostępnych źródłach. Temat jest nieraz wywoływany ubocznie, na użytek problematyki wiodącej, przy różnych okazjach. Z dawniejszych publikacji warto jednak wymienić m.in. książkę [1] i cytowaną już, fundamentalną pracę [2]; odrębnym, nowym wydawnictwem z zakresu dydaktyki matematyki jest pozycja [4]. Ciągły deficyt opracowań, potrzeba prezentacji różnych punktów widzenia, a jednocześnie chęć ukazania poszerzonemu gremium odbiorców dość wyspecyfikowanych cech metody były jednym z motywów powstania niniejszego artykułu. Jego celem jest zwięzła, lecz równocześnie wzbogacająca charakterystyka metody czynnościowej odniesionej do edukacji matematycznej. Jest on adresowany głównie do osób o wykształceniu nie obejmującym szerszego przygotowania specjalistycznego z matematyki i bardziej zaawansowanej wiedzy w tym zakresie. Położono w nim akcent na przykłady, prezentując syntetycznie podstawy teoretyczne i źródła metody. Elementy teorii przytacza się wybiórczo, w takim zakresie jednak, aby można było śledzić procedurę wyprowadzania z niej reguł praktycznego działania. Sformułowanie tych ostatnich wraz z przykładami stanowi jeden z głównych rezultatów podjętych dalej rozważań. Tym niemniej przykłady nie ograniczają się do rutynowej ilustracji. Nie są jedynie przykładami w wąskim, tradycyjnym sensie. Zostały tak rozbudowane, aby ukazać schemat postępowania w podobnych przypadkach i sytuacjach pożądanych w klasie szkolnej, a także by wypunktować w tym postępowaniu wszystkie istotne momenty teoretyczne i przesłanki leżące u podstaw konstrukcji przykładu. Stąd też mają one charakter nośnych egzemplifikacji, odpowiednio rozbudowanych; są przykładami paradygmatycznymi. Starano się je zaadresować do różnych poziomów szkolnych[3].

[3] Intencją niniejszego tekstu jest, by służyć także praktykom zainteresowanym różnymi etapami szkolnego kształcenia, jak również osobom zdobywającym kwalifikacje nauczycielskie na poziomie licencjackim i magisterskim bądź korzystającym w ramach studiów podyplomowych z rozmaitych możliwości profilowania oraz doskonalenia własnego warsztatu zawodowego.

Psychopedagogiczne źródła metody czynnościowej.

W obiegowym rozumieniu (taki naiwny osąd można nieraz spotkać nawet w środowisku szkolnym) czynnościowe prowadzenie zajęć to takie, przy którym uczniowie nie pozostają w bezruchu, lecz „coś robią": rysują, wycinają z kartonu, obliczają, a więc wykonują konkretne czynności, manifestując własną lub sterowaną aktywność zewnętrzną. Trzeba od razu podkreślić, że wyjaśnienie sensu metody, nawiązujące jedynie do etymologii potocznego słowa „czynność" byłoby nie tylko uproszczeniem, ale i głębokim nieporozumieniem. Nie wszystkie czynności uczniów, nawet te niezbędne bądź najbardziej wskazane i skądinąd dobrze wkomponowane w jednostkę lekcyjną nadają działaniom nauczyciela rangę metody czynnościowej.

Jeśli uczeń rysuje dowolny trójkąt, mierzy kątomierzem kąty wewnętrzne (otrzymując w sumie nieco mniej niż 180^0), a przy porównaniu wyniku z rezultatem kolegi (u tego z kolei suma akurat przekroczyła miarę kąta półpełnego) słyszy od nauczyciela, że naprawdę ma być 180^0, to zajęcia, w których uczestniczy raczej niewiele mają wspólnego z metodą czynnościową, choć cała lekcja może mieć inne pozytywne momenty i niejeden godny uwagi zabieg dydaktyczny. Jeśli uczniowie wykonują konkretne manipulacje organizowane na lekcji, nie wywodzące się jasno z teoretycznej analizy materiału przedmiotowego lub robią coś, co z następującym bezpośrednio ujęciem pojęciowym nie ma nic wspólnego, to taka droga nie jest *explicite* realizacją zasady „od konkretu do abstrakcji", leżącej u podstaw metody czynnościowej.

Podobnie nie jest jej ekwiwalentem postępowanie (mimo że organizowane z udziałem uczniów), w wyniku którego po kilku „pokazowych" obliczeniach lewej i prawej strony równości typu $3 \cdot (5 + 7) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$ zaproponowano im gotowy tekst do zapamiętania:

Aby pomnożyć sumę przez liczbę, mnożymy każdy składnik *tej sumy przez tę liczbę i otrzymane iloczyny dodajemy.*

Mamy tu jedynie tzw. czynnościowe sformułowanie prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, które najchętniej zapisuje się (nieraz przedwcześnie) w postaci symbolicznej $a(b + c) = ab + ac$, pomijając odczytywanie i swobodne wypowiadanie wzoru w różnych wariantach słownych[4]. Nie jest nim również dlatego, że przytoczone wypowiedzenie materializuje językowo tylko jednokierunkowe przejście od iloczynu do sumy, pomijając operację odwrotną. Nawet mniej udolne próby wysłowienia tej operacji przez ucznia są ważne; z jednej strony dają oparcie konkretnym rachunkom, a z drugiej stanowią jeden z filarów pełnego, ogólnego,

[4] Często za słowne sformułowanie tego wzoru uchodzi niesłusznie jego mechaniczne „przeliterowanie" (w fonetycznej postaci: *a razy b plus c równa się a razy b plus a razy c*), pod którym zresztą najczęściej nic kryje się nic, podobnie jak pod pustym ciągiem słów, jakim pozostanie wcześniej przytoczona czynnościowa wersja prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, gdy przyswajanie ograniczy się tylko do pamięciowego jej opanowania.

a więc pojęciowego ujęcia omawianego prawa. Oto jedna z wersji językowych wypowiedzi, której znaczenie trudno przecenić:

Aby obliczyć sumę iloczynów zawierających ten sam czynnik, wystarczy dodać pozostałe czynniki i otrzymany wynik pomnożyć przez czynnik wspólny.

Trud włożony w konstruowanie takich wypowiedzi (w ramach metody czynnościowej stosowanej w pełnym zakresie, jako jeden z jej realizacyjnych zabiegów) nie będzie się wydawał zbędny, jeśli zważymy, iż język jest potężnym narzędziem rozwoju myśli. To, że język pozostaje ważnym środkiem aktywizacji intelektualnej oraz drogą do rozumienia, pokazuje praktyka lekcyjna; często bowiem dopiero próba sformułowania pytania przez ucznia, pragnącego podzielić się swoją wątpliwością, jest aktem skutecznej autokorekty, krokiem samowyjaśniającym („aha, już rozumiem" – to typowa reakcja w tej sytuacji, uprzedzająca pomoc z zewnątrz).

Przytoczone uwagi i przykłady wskazują na nieporozumienia związane z co najmniej niepełnym pojmowaniem czynnościowej metody nauczania. Występują one, m.in. wówczas, gdy treść metody rekonstruuje się na podstawie potocznie urobionego znaczenia słowa „czynność" występującego w jej nazwie. W istocie rzetelne zrozumienie metody – tj. przynajmniej takie, które pozwoli na samodzielną egzemplifikację w materiale szkolnym i operatywne jej stosowanie w praktyce – wymaga gruntownego studium jej źródeł. Z jednej strony ma ona szerokie i trwałe oparcie we współczesnych teoriach psychopedagogicznych, a dokładniej mówiąc w wykrytych prawidłowościach rozwojowych, akceptowanych już – mimo różnic między poszczególnymi teoriami – w swej zasadniczej części powszechnie. Podstawy takich teorii tworzyli m.in. J. S. Bruner, L. S. Wygotski, P. M. van Hiele i przede wszystkim Jean Piaget. To, jakie czynności i ich rodzaje (a są one tylko jednym z elementów całej procedury zwanej metodą czynnościową) oraz kiedy mają się pojawiać w procesie nauczania, jest ściśle zdeterminowane zasadami rozwojowymi myślenia. Z drugiej strony struktura postępowania w ramach metody czynnościowej w ujęciu tutaj przedstawianym wynika z metodologicznych cech samej matematyki i jej charakteru jako nauki *in statu nascendi*.

Dalej ograniczymy się do wyboru i syntezy niewielu faktów psychologicznych, głównie potwierdzonych w badaniach Piageta (mających też odpowiedniki i uzasadnienie w ramach innych koncepcji psychopedagogicznych), które okazują się szczególnie ważne dla czynnościowej metody i jej opisu sporządzanego na użytek edukacji matematycznej. Stąd też język ich sformułowań podporządkujemy od razu temu ostatniemu celowi. Mogły one być poniżej zaprezentowane jedynie w daleko idącym uproszczeniu[5].

[5] Odsyłamy tu do fachowej literatury; spośród wielu pozycji można przykładowo wymienić [5], [6] i [7].

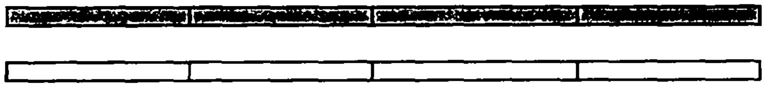
1. Człowiek nie przychodzi na świat z gotową zdolnością do myślenia, posiada natomiast biologiczne warunki ku temu, aby je rozwinąć. Myślenie bierze początek w rzeczywistości zewnętrznej. Jego ontogenetyczny rozwój zaczyna się od czynności konkretnych (działań i manipulacji) dziecka na przedmiotach najbliższego otoczenia (ucznia na materiale fizycznym, w sytuacjach konkretnych lub oderwanych, lecz już dobrze znanych). Zasadniczo z tego źródła wywodzi się zresztą każde myślenie, także dorosłych, o ile dotyczy okoliczności dla podmiotu nowych; inna jest na ogół tylko owa rzeczywistość będąca znajomym punktem wyjścia.
2. Wielokrotne powtarzanie czynności przez dziecko prowadzi do ich uwewnętrzniania, tj. utrwalania w centralnym systemie nerwowym w postaci schematów lub struktur (jakby programów zdolnych do repliki), które je tam reprezentują, a następnie odtwarzają w stosownych okolicznościach.
3. Początkowo schematy są proste, lecz w miarę postępującej eksploracji rzeczy-wistości stają się złożone, elastyczne i łączą w zespoły. Przechodzą drogę od prymitywnych odpowiedników pojedynczych działań, poprzez czynności wyobrażeniowe, zakotwiczone jeszcze w bezpośrednim doświadczeniu i zachowujące wiele cech przysługujących działaniom i przedmiotom konkretnym do form zmierzających ku postaci oderwanej i funkcjonujących już samodzielnie; ten cykl rozwojowy nazywa się procesem i n t e r i o r y z a c j i lub internalizacji.

PROCES INTERIORYZACJI

manipulacje na materiale otoczenia i działania konkretne — *czynności wyobrażone* — *dojrzałe, oderwane operacje myślowe*

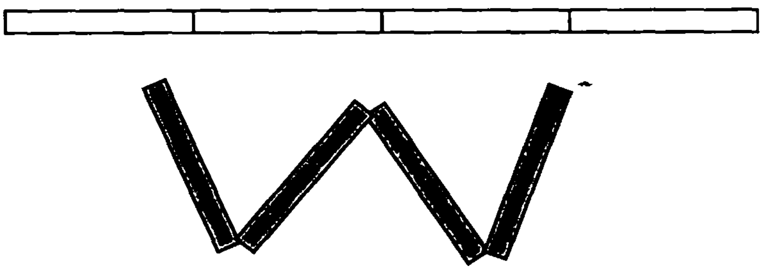
Rys. 1

4. Uwewnętrznione czynności osiągają dojrzałość, gdy stają się odwracalne (nabywają samodzielnej zdolności powracania do punktu wyjścia); nazywamy je wówczas o p e r a c j a m i. Czynności wyobrażone i wcześniejsze, które towarzyszą wykonywaniu konkretnych manipulacji na przedmiotach, na ogół nie są jeszcze odwracalne. Gdy dziecku polecimy ułożyć z jednakowych patyczków dwie drogi (rys.2), przy czym stwierdzi, że są równej długości, a później na jego oczach dokonamy transformacji



Rys.2

jednej z nich (rys. 3), to w pewnym wieku będzie przekonane, że teraz droga jest krótsza.



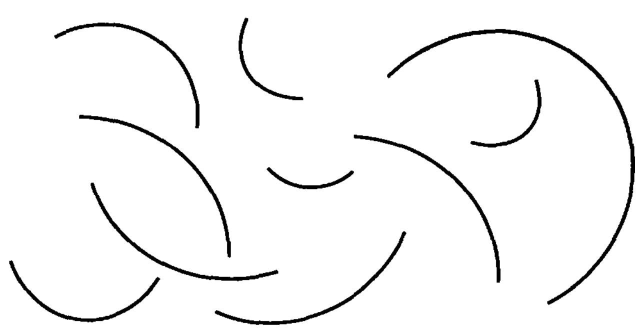
Rys.3

Warunkiem prawidłowej odpowiedzi jest myślowe odwrócenie transformacji; pozwala bowiem stwierdzić, iż pod interesującym nas względem „nic się nie zmieniło", tj. długość każdego patyczka i ich liczba pozostały takie same. Obie drogi muszą więc mieć nadal tę samą długość. Do takiej odpowiedzi jest przygotowane dopiero po osiągnięciu pewnej dojrzałości myślenia, która wyraża się zdolnością do samodzielnego odwracania czynności wewnętrznych. To jednak może wymagać ćwiczeń; nie pomogą tu żadne „objaśnienia" słowne, gdyż struktury myślowe dziecka są jakościowo inne niż procesy mentalne dorosłego. W tym przypadku ćwiczenia powinny polegać, m.in. na opisanym transponowaniu i prostowaniu drogi, dotąd, aż dziecko samo dojdzie do ujęcia stałości długości. Obrazowo możemy powiedzieć, że odwracanie czynności wewnętrznej polega na permanentnej gotowości myśli do „przywracania" stanu wyjściowego, niezależnie od kierunku rozwoju sytuacji realnej, jeśli taka towarzyszy myśleniu; w każdym momencie trwania rozwijającego się procesu wewnętrznego podmiot nie traci z pola widzenia przebytej już drogi, utrzymując kontakt z punktem wyjścia i poddając stałej konfrontacji aktualny rezultat z etapem poprzednim.

5. Myślenie nie jest niczym innym jak wykonywaniem czynności (nie jest czymś statycznym); w stadium dojrzałości zwiemy je operacjami. Zatem geneza podstawowych pojęć matematycznych i rozumowań, choć mają one myślową naturę, tkwi w materialnej rzeczywistości; tam sięgają ich głębokie korzenie i bez niej nie mogłyby powstać. Pozostając na gruncie spontanicznych

samoobserwacji, być może trudno byłoby wprost akceptować tezę, iż to, co dzieje się w naszej myśli jako reakcja – na przykład – na odczytany ze zrozumieniem wyraz „okrąg" może mieć naturę czynności. W gruncie rzeczy pojęcie okręgu (bo o nic tu chodzi) jest przeżyciem myślowym mającym naturę operacji. W stadium zaawansowanym są one jednak tak „skondensowane", tj. realizowane myślowo w jednokrotnym akcie, że nie jesteśmy władni w toku autoobserwacji dokonać analizy jego wewnętrznej struktury. Pierwowzorem tych czynności są rozmaite działania i elementy wcześniejszego doświadczenia fizycznego i umysłowego. Jednostka zdobywa je w dużej mierze poza zinstytucjonalizowanymi formami kształcenia, w wyniku spontanicznej aktywności. Pozostając przy wybranym przykładzie okręgu, jako przykłady działań (czynności) mogących natomiast stanowić element metodycznie i planowo organizowanych doświadczeń na bardzo wczesnych etapach nauczania, można dla ilustracji wskazać następujące zabiegi:

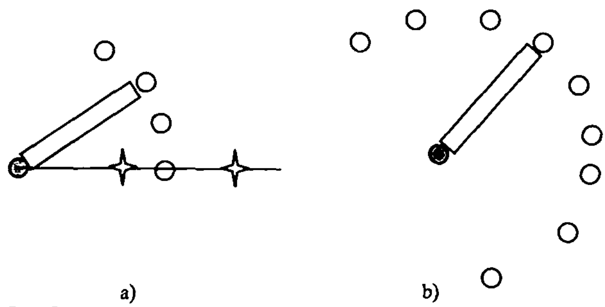
- zabawa na boisku; każde z dwojga dzieci chwyta za koniec kilkumetrowego sznura i podczas gdy jedno kręci się wokół własnej osi, drugie – twarzą do partnera – obiega tor wyznaczony przez stale napięty sznur (piaszczyste podłoże boiska umożliwia obserwację śladów, które układają się w obraz doskonale skojarzony z ruchowymi zachowaniami uczestników zabawy),
- toczenie plakietek; dzieci otrzymują wycięte z tektury modele koła, elipsy i sześciokąta, próbują je toczyć po równej powierzchni stołu w różny sposób (chwytając plakietkę „kleszczowo" w rozmaitych punktach, przykładając dłoń do górnej krawędzi itp.) oraz dzielą się spontanicznie swymi wrażeniami wywodzącymi się z wykonywania każdej czynności oddzielnie i z porównania realizowanych przypadków,
- układanie obręczy; zestaw wielu rozmaitych łuków (wzór na rys.4) sporządzonych z drutu lub pasków papieru stanowi materiał, z którego dzieci



Rys.4

wybierają i układają pełne, regularne obręcze w kształcie okręgu (nazwa „okrąg" nie jest tu – podobnie jak we wszystkich poprzednich sytuacjach – niezbędna, choć może się w naturalny sposób pojawić), przy czym aktywności ruchowej towarzyszy językowa,

- rysowanie; na kartce obiera się punkt oraz zadaje odcinek – jego rolę może grać pasek papieru – i poleca dzieciom zaznaczyć kilka punktów leżących w zadanej odległości od tego punktu (rys.5a), później jeszcze kilka (rys.5b), pytając kolejno, czy mogą dodać następne i ewentualnie, jak przedstawić wszystkie (ćwiczenie można rozszerzyć, prosząc o wskazanie punktów leżących bliżej i dalej niż poprzednie, a także połączyć z obserwacją zachowania się końca wskazówki na tarczy zegara).



Rys.5

6. Umysł musi skonstruować pojęcie (wiedzę) sam; może to osiągnąć jedynie przez własne aktywne działanie zakotwiczone w znajomym polu. Żadne pojęcie nie może powstać w próżni, „z niczego"; nie może być zbudowane „na piasku" lub w jakiejkolwiek formie zostać „podarowane" przez kogoś z zewnątrz.

Aspekty metody czynnościowej zdeterminowane przez samą matematykę.

Niezależnie od źródeł psychologicznych czynnościowe nauczanie znajduje – jak już wspomniano – uzasadnienie w samej matematyce, jest motywowane charakterem wiedzy i metody w tej dziedzinie. Pojęcia, idee oraz rozumowania zamknięte w definicjach, twierdzeniach i dowodach mają charakter operatywny. Odbierając lub tworząc matematykę, zawsze w pewien sposób działamy: wyodrębniamy jakieś elementy, porządkujemy zbiory, oznaczamy obiekty, porównujemy, dokonujemy przekształceń, obliczamy itp. Choć w tekście matematycznym znajdujemy wyłącznie g o t o w e, a więc statyczne rezultaty, odbiór tych rezultatów jest ich „ożywianiem", ujawnia zakodowane w nich o p e r a c j e, które należy wykonać na abstrakcyjnych obiektach. W gotowym, zapisanym wyniku operacje te nie zawsze są od razu i jednakowo dla wszystkich widoczne, gdyż symboliczna postać przekazu i wymogi formalne stosowanej metody nieraz doskonale ten charakter przesłaniają. Świadczy o tym na przykład sytuacja, w której uczący się opanował werbalnie definicję, rozumie każde słowo, żaden symbol nie jest dlań tajemnicą, ale nie potrafi z niej skorzystać, ponieważ nie dotarł do jej prawdziwej, operatywnej natury. Zna (na poziomie recepcji, ewentualnie reprodukcji, a więc instrumentalnie) definicję, ale nie posiadł elastycznych sposobów korzystania z niej ze zrozumieniem. Ów operatywny charakter pojęć, twierdzeń i procedur matematycznych pochodzi, m.in. stąd, że powstają one w dużej części w wyniku abstrakcji odczynnościowych, a nie tak jak w wielu innych dziedzinach w wyniku abstrakcji odprzedmiotowych.

Dwa główne filary, na których opiera się czynnościowa metoda nauczania matematyki można graficznie przedstawić następująco (rys.6).

Rys.6

Dotychczasowe rozważania ujawniają główne, konstytutywne cechy czynnościowego nauczania matematyki, tym samym nasuwają zwięzłą charakterystykę stanowiącą, że metoda czynnościowa w odniesieniu do edukacji matematycznej jest postępowaniem w klasie (grupie przedszkolnej), które uwzględnia równolegle psychologiczny proces interioryzacji i operatywny charakter wiedzy matematycznej, prowadząc *od konkretu do abstrakcji*, tj. od realnych czynności, poprzez czynności wyobrażeniowe, do oderwanych, niezależnych operacji myślowych.

Przełożenie psychologicznych prawidłowości i matematycznych uwarunkowań metody czynnościowej na język praktyki.

Znajomość teoretycznych podstaw jest niezbędna do wdrażania metody, ale obmyślanie konkretnych rozwiązań i ich realizacja w jej ramach to nowe zadanie. Wymaga ono najpierw przetransponowania ogólnych zasad sformułowanych w języku teorii na operatywne reguły odnoszące się do procesu nauczania i dalej na działania oraz zabiegi bezpośrednio użyteczne w klasie. Tworząc zbiór takich reguł podejmujemy tym samym próbę odpowiedzi na pytania o charakterze pragmatycznym, ważne dla nauczyciela, m.in. skąd ma on czerpać pomysły trafnie dobranych, a więc nieprzypadkowych czynności konkretnych, których znaczenie dla omawianej metody jest tak istotne oraz jaka ma być ich rola w różnych momentach procesu dydaktycznego: na samym początku, gdy mają one inicjować działania myślowe, później, gdy mają je wspierać, stabilizować i ukierunkować, wreszcie – już w dojrzałym stadium – gdy mogą stanowić konkretyzację oderwanych działań myślowych. A oto lista przykładowo sformułowanych reguł praktycznych (dla prostoty ujęcia zachowujemy tu bezpośrednią formę wysłowień).

1. Najpierw sam zanalizuj pojęcie (twierdzenie, rozumowanie) matematyczne, które masz wprowadzić; zobacz jak ono wygląda w dorosłej matematyce, starając się na drodze teoretycznej wydobyć zeń istotne (konstytutywne) operacje, które ono zawiera.
2. Ustal, jakie konkretne czynności (manipulacje, działania) ucznia mogłyby stanowić ich odpowiedniki w rzeczywistości lub w dobrze znanym mu materiale.
3. Uczyń te właśnie czynności punktem wyjścia uczniów na drodze do nowego pojęcia; trafnie dobrane uruchomią właściwy kierunek myślenia.
4. Pamiętaj, że rola czynności wyjściowych i oferowanych uczniom w obszarze im dobrze znanym może być rozmaita: mogą one pełnić funkcje inspiratorskie oraz inicjalne w procesie myślenia, jedynie tylko wspierać i stabilizować ten proces lub następować po nim jako specyfikacja bądź rodzaj empirycznej weryfikacji. W każdym momencie lekcji powinieneś mieć jasny pogląd na to, jakie jest ich miejsce i funkcja w pracy z uczniami.
5. Staraj się następnie tak organizować pracę, aby uczniowie mieli okazję przechodzić od czynności konkretnych do wyobrażonych i dalej do coraz bardziej oderwanych; w ten sposób świadomie i w toku zaplanowanego działania dydaktycznego można racjonalizować i przyspieszać proces interioryzacji.

6. Zadbaj o to, aby z daną czynnością ucznia wiązać jej odwracanie; w rezultacie powinieneś zmierzać do osiągnięcia u swych uczniów w dalszej lub bliższej perspektywie odwracalności operacji myślowych (jest to podstawowy warunek abstrakcyjnego myślenia).
7. Jeden i ten sam wynik (myśl) formułuj (wyrażaj) wraz z uczniami na różne sposoby: słownie, symbolicznie, gestem, grafem, w tradycyjnym rysunku, w modelu itp.
8. Pamiętaj, że nie dajesz uczniowi pojęcia (wiedzy), niczego nie jesteś w stanie mu przekazać „na gotowo", jeśli on nie działa. Uczeń musi je w myśli skonstruować sam; rolą nauczyciela jest racjonalnie mu w tym pomagać.

Szczegółowe zasady działania możemy streścić w jednej kierującej maksymie dydaktycznej, określającej postępowanie nauczyciela w ramach referowanej metody: organizuj nieprzypadkowe czynności ucznia tak, aby były (1) właściwe dla danego pojęcia i metodycznie zróżnicowane, (2) adekwatne do każdego stadium procesu interioryzacji, który staramy się racjonalnie przyspieszać.

Zakres stosowalności czynnościowej metody nauczania matematyki nie jest ograniczony do wczesnych etapów kształcenia, jak to się nieraz sądzi. Zaleca się ją nie tylko do pracy z najmłodszymi, lecz także adresuje do dalszych poziomów szkolnych. Te możliwości uwzględnia materiał ilustracyjny, do którego przechodzimy.

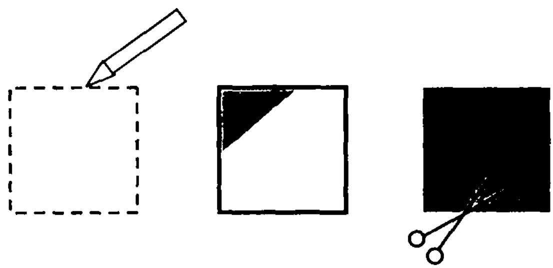
Przykłady ilustrujące opracowanie treści nauczania z wykorzystaniem metody czynnościowej.

Rozpoczniemy od przykładu wiążącego się z kształtowaniem pojęcia, którego elementy propedeutyki uwzględnia się już w edukacji na poziomie przedszkolnym, a później w programach nauczania wczesnoszkolnego.

Przykład 1. Zalążki pojęcia kwadratu, podobnie jak podwaliny wielu innych elementarnych pojęć geometrycznych zaczynają się kształtować bardzo wcześnie, w niekierowanym doświadczeniu dziecka zdobywanym w jego otoczeniu rodzinnym, rówieśniczym i innych. Truizmem jest stwierdzenie, że jest to otoczenie mówiące i fakt ten – obok samego doświadczenia – ma dla początków i ewolucji pojęcia niebanalne znaczenie. Rozpoczynając bowiem naukę szkolną, dziecko na ogół posiada już w swym słowniku (czynnym lub biernym) słowo „kwadrat" i kojarzy z nim pewne znaczenie. Zapewne elementy tej „wiedzy" dalekie są od możliwości werbalizacji, lecz na tym etapie o słowne regulacje wcale nie chodzi. Ważne są właściwe intuicje. Zadaniem przedszkola i szkoły w pierwszym okresie jest organizować te intuicje, systematycznie je pogłębiać, a proces gromadzenia ukierunkowanych doświadczeń racjonalizować, stymulować i sensownie przyspieszać.

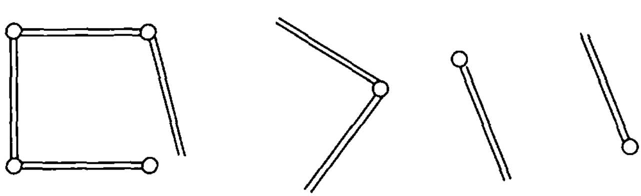
Stosownie do reguł, które wymieniliśmy, można rozpocząć – podobnie jak było w przypadku okręgu – od poznania „ruchowego". Dzieci, bawiąc się, obiegają wyznaczony na płycie boiska kontur dużego kwadratu. Punkty startowe i kierunek obiegu – zgodny lub nie z ruchem wskazówek zegara – może być zadawany *a priori*. Uczestnicy zabawy wypowiadają się przy tym swobodnie na temat przebieganej trasy, jej charakterystycznych punktów i cech. Komunikują więc nauczycielowi jak oraz ile razy „zakręcają", wykorzystują nazwy stron świata, by określić zmiany kierunku ruchu, lokują w wierzchołkach kwadratu znane im miejscowości lub inne obiekty geograficzne i przestrzenne itp. (stąd widać jak temat mógłby być powiązany z innymi treściami w ramach sensownej, naturalnej integracji).

Doświadczenia w ten sposób zdobyte przenosimy teraz do sali, gdzie dzieci najpierw gestem, później na kartce w odręcznym szkicu, zdają sprawę z tego, jak trasa wyglądała. Dalsze zabiegi – świadomie podejmowane i rozłożone w czasie – nad zainspirowaniem długiego procesu kształtowania pojęcia kwadratu jako figury geometrycznej mogą obejmować cykl ćwiczeń, które już tylko zasygnalizujemy: obrysowywanie szablonów, cieniowanie naroży oraz całej powierzchni wyodrębnionej z tła przez sumę boków, wycinanie z kartonu wzdłuż pełnego konturu linii brzegowej, a później kierując się fragmentem konturu i wreszcie tylko zaznaczonymi wierzchołkami (rys.7).



Rys.7

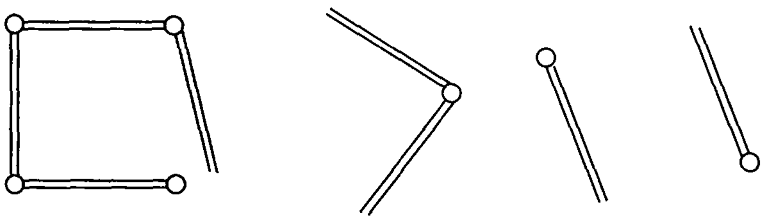
Podobnie, mając gotowy rysunek kwadratu, dzieci poszukują specjalnego punktu – jego środka – przez zginanie kartki na różne sposoby (rys.8).



a) b) c)

Rys.8

Czynności te są źródłem wielu nowych doświadczeń oraz informacji, które kiedyś zostaną zwerbalizowane i złożą się na treść pojęcia. Każda z nich nastawiona jest na wyodrębnienie innego elementu pojęciowego kwadratu, ale jego model jest zasadniczo we wszystkich przypadkach *a priori* dany. Natomiast kolejne czynności konkretne dotyczą już samodzielnej rekonstrukcji kształtu i polegają na rozkładaniu modeli ułożonych z patyczków, ponownym ich składaniu, korygowaniu, uzupełnianiu, wyszukiwaniu „błędów" itp. (rys.9).



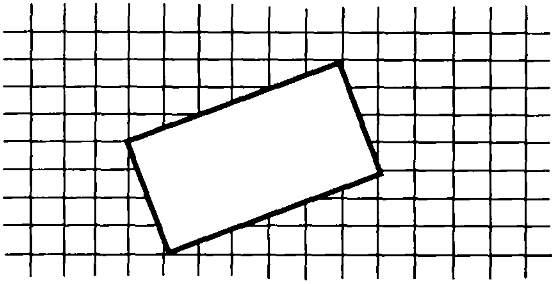
a) b) c)

Rys.9

Łatwo zauważyć, iż czynności te służą stymulowaniu procedury odwracania operacji. Konfiguracje w przypadkach b) i c) stanowią ponadto zamierzony element w prezentowanym cyklu działań: mają od początku pomagać uczniom w uwalnianiu się od wpływu kierunków głównych (pion, poziom). Mocno zaznaczona obecność tych kierunków w aktywności geometrycznej ucznia, mechanicznie utrwalana dodatkowo na lekcjach, a również w niektórych podręcznikach przez ciągłe rysowanie pewnych figur w uprzywilejowanych położeniach, utrudnia nawet w starszych klasach prawidłowe rozumienie wielu pojęć (na przykład wysokości trójkąta) i powoduje błędy w rozwiązywaniu zadań.

Dalsza praca nad rozwijaniem pojęcia uwzględni również sytuacje prowokujące do czynności wyobrażeniowych. Mogą to być ćwiczenia w zakresie parkietażu, polegające na planowaniu i układaniu posadzek płytką kwadratową lub z dołączeniem płytek innych kształtów. Przewidywanie i szacowanie jaka część obszaru pokrytego siecią kwadratową (rys.10) została przysłonięta należy do tego typu ćwiczeń.

Opisywanie figur „przez telefon", odgadywanie na podstawie opisu o jaką figurę chodzi, symbolizacja (oznaczanie różnymi sposobami kwadratu i jego elementów) i wreszcie – na wyższym już etapie – definiowanie, to planowo zamierzone działania nauczyciela, podejmowane w nieprzypadkowej kolejności w ramach czynnościowej metody pracy z uczniami. Wszystkie te zabiegi układają się w cykl paralelny z procesem interioryzacji, którego racjonalizacji i przyspieszeniu mają służyć. Tempo owego przyspieszenia powinno być regulowane możliwościami określonymi w ramach



Rys.10

strefy najbliższego rozwoju [6]. Zwieńczeniem tego cyklu przedłużonego poza granice rozpoczynające stadium operacji formalnych, a zarazem perspektywicznym celem procesu rozwojowego myśli ucznia jest abstrakcyjne pojęcie kwadratu.

Świadomie zaplanowana i metodycznie zrealizowana droga prowadzi tu dosłownie „od konkretu do abstrakcji". Od zabawy na boisku pozwalającej na pierwsze, „mięśniowe" oswojenie z kształtem figury po czysto mentalne zapanowanie nad oderwanym obiektem w przyszłości. Ten obiekt należy już do świata bytów pozaprzestrzennych i ponadczasowych, w obrębie którego dostępne stają się własności teoretyczne nawet nie mające bezpośrednich odpowiedników w świecie realnym, jak choćby ta, że bok i przekątna kwadratu są niewspółmierne.

Przykład 2. Następny, szkolny przykład pochodzi z poziomu nauczania nieco wyższego niż początkowy. Wykroczenie poza edukację wczesnoszkolną pozwoli z jednej strony na ukazanie nieco innych aspektów metody czynnościowej, z drugiej zaś na ujawnienie różnic między tradycyjnym, mało aktywizującym ujęciem tematu, a jego opracowaniem w ramach tej metody.

Oto nauczyciel staje przed zadaniem wprowadzenia pojęcia pierwiastka kwadratowego. Zapożyczenie z gotowego tekstu źródłowego krótkiej definicji:

$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$, gdzie $a \geq 0$ i $b \geq 0$

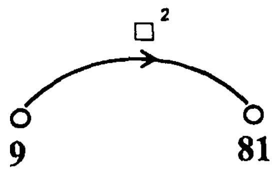
i podanie jej uczniom kusi prostotą rozwiązania i ekonomią czasu; poza tymi korzyściami jest jeszcze elegancja, którą w gotowej matematyce dostrzegą koneserzy. Jak zobaczymy dalej, są to jednak w naszej sytuacji profity pozorne.

Jeszcze do dziś niektóre podręczniki szkolne realizując ten temat obierają za punkt wyjścia tradycyjne zadanie: *znajdź długość boku kwadratu, którego pole wynosi* $81cm^2$. Uczniowie, idąc drogą prób i błędów stosunkowo łatwo odgadują wynik, po czym otrzymują powyższą definicję do opanowania (co na ogół czynią, jak potwierdza praktyka, jedynie pamięciowo). Ćwiczy się dalej rozwiązywanie zadań „na pierwiastki", przy czym rachunek w istocie omija podaną definicję (mamy tu na uwadze metodologiczne, a więc świadome odwoływanie się do definicji) i opiera się na bliżej niesprecyzowanym odgadywaniu, które przecież dało pozytywny rezultat w przykładzie wyjściowym. Raczej nie ma w tym postępowaniu śladu nauczania czynnościowego.

Wybierając metodę czynnościową, zgodnie z wcześniejszymi postulatami rozpoczynamy natomiast od operacji znanej: potęgowania. Po kilku przykładach numerycznych

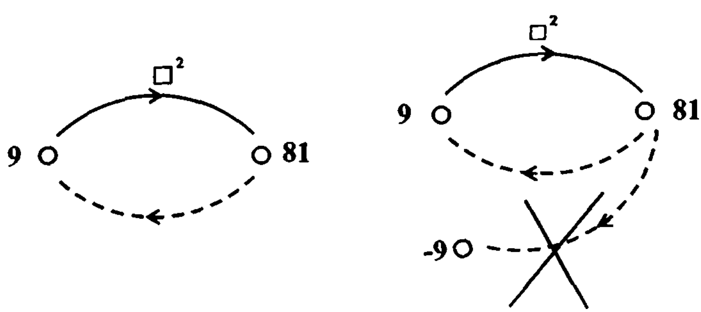
$9^2 = 81$, $(-9)^2 = 81$, $(-5)^2 = 25$, $5^2 =$, $7^2 =$, $0^2 =$, ...

uczniowie wykonują graf (rys.11).



Rys.11

Prosimy, aby próbowali odwrócić operację $\square^2$; to powinno zrodzić pytanie, czy w ogóle znamy odwrotność $\square^2$. Rozwija się dyskusja, w której zapewne najpierw powstanie strzałka przerywana (rys.12a), później zaś uczniowie zauważą, iż operacja oznaczona znakiem zapytania nie jest jednoznaczna (rys.12b). Aby ową jednoznaczność uzyskać, należy drugą ścieżkę odrzucić, co oznacza ograniczenie się do liczb nieujemnych.



Rys.12

Usytuowanie punktu wyjścia w znanym uczniom obszarze, gdzie mogą się oni od samego początku swobodnie poruszać, nieprzypadkowe wykorzystanie środków zapewniających manipulacyjne rozpoczęcie działań, które inicjują właściwe schematy myślowe, wreszcie wiązanie operacji prostej z odwrotną mogące służyć przyspieszonej interioryzacji, to tylko niektóre elementy czynnościowej metody świadomie zastosowanej. Szczególne znaczenie ma tutaj odręczne rysowanie strzałek, a później eliminacja jednej z nich. W naturalny sposób prowadzi bowiem do warunków $a \geq 0$ i $b \geq 0$, które w gotowej definicji pojawiły się jak przysłowiowy królik z kapelusza; tutaj zaś mogą być zaproponowane przez uczniów. W tym samym naturalnym trybie zostanie sformułowana przez nich definicja. Nie trzeba będzie się jej nawet specjalnie uczyć, podczas gdy gotowy tekst tej definicji, narzucony z góry i zadany do opanowania w tradycyjnym nauczaniu zabrzmi dziwnie i nieswojo.

Na zakończenie wypada zaznaczyć, że metoda czynnościowa nie jest panaceum na wszystko. Zgodnie z ogólnie znaną zasadą należy stosować różne metody naprzemiennie. Czynnościową metodę wybieramy do opracowania takich tematów, w ramach których potrafimy znaleźć klarowną – zgodną z własnym warsztatem dydaktycznym i funkcjonującym wewnątrz niego systemem wartości – koncepcję jej zastosowania.

Bibliografia:

Aebli H.: *Dydaktyka psychologiczna. Zastosowanie teorii Piageta do dydaktyki*: PWN, Warszawa 1982

Krygowska Z.: *Metodologiczne i psychologiczne podstawy czynnościowej metody nauczania matematyki*; [W:] Dziesięciolecie WSP w Krakowie, Wydawnictwo Naukowe WSP Kraków 1957.

Krygowska Z.: *Zarys dydaktyki matematyki, część* 1; WSiP, Warszawa 1977.

Siwek H.: *Czynnościowe nauczanie matematyki*; WSiP, Warszawa 1998.

Wadsworth B. J.: *Teoria Piageta. Poznawczy i emocjonalny rozwój dziecka*; WSiP, Warszawa 1998.

Wygotski L. S.: *Myślenie i mowa*; PWN, Warszawa 1989.

Piaget J.: *Studia z psychologii dziecka*; PWN, Warszawa 1966.

Summary

The research contains the characterization of the functional method of teaching with its reference to the mathematical education. Considerations refer to the school level including children of younger and middle age. After the synthetic specifying psychological and mathematical bases of the method the author concentrates on their practical consequences. Further on methodical propositions and in detail analised examples of teacher's activities who acts according to the idea of the functional method come.