Natalia Cieślar, Joanna Samsel-Opalla

Rozwijanie kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Nauczyciel i Szkoła 3 (48), 131-140

2010

Natalia CIEŚLAR, Joanna SAMSEL-OPALLA

Uniwersytet Śląski w Katowicach

Rozwijanie kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

Słowa kluczowe

Kompetencje kluczowe, kompetencje matematyczne, nauczyciel matematyki.

Streszczenie

Rozwijanie kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki

W Europejskich ramach odniesienia ustanowiono osiem kompetencji kluczowych. Niniejszy artykuł koncentruje się na sześciu, wybierając te, które wymienione zostały również w obowiązującej Podstawie Programowej, na liście umiejętności, których rozwijanie stanowi ogólny, ponadprzedmiotowy cel kształcenia w gimnazjum i szkole ponadgimnazjalnej. W artykule konfrontowane są pokutujące w praktyce szkolnej przekonania na temat możliwości (czasem niemożności) rozwijania kompetencji kluczowych na lekcjach matematyki z propozycjami sposobów pełniejszego wniknięcia w istotę tych kompetencji. Zamieszczona w artykule oferta pokazuje również, że rola nauczyciela matematyki w kształceniu kluczowych kompetencji jest szczególna, a zaniedbania z jego strony nie zawsze mogą być kompensowane działaniami nauczycieli innych przedmiotów.

Key words

Key competences, mathematical competences, math teacher.

Summary

Developing key competences during maths lessons

There are eight key competences defined in A European Reference Framework. This article concentrates on six of them selecting those which are also mentioned on the list of competences in a compulsory document titled Podstawa Programowa. The developing of those competences is a general goal of education both on the lower and upper secondary level. The article collates some convictions present in a school practice about a possibility (sometimes impossibility) of developing key competences in a math class and some proposals of a deeper insight into the idea of key competences. An offer placed in this article shows that a math teacher plays a special part in the developing of key competences and his or her negligence cannot be compensated by other teachers.

Pojęcie kompetencji kluczowych scharakteryzowane zostało w *Europejskich ramach odniesienia* zaprezentowanych w *Zaleceniu Parlamentu Europejskiego i Rady w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie* z 18 grudnia 2006 roku. Ustanowiono tam osiem kompetencji kluczowych. Sześć z nich ma odpowiedniki na zamieszczonej w obowiązującej *Podstawie programowej* liście umiejętności stanowiących ogólny, ponadprzedmiotowy cel edukacji na III i IV etapie kształcenia.

Rodzą się więc pytania, **czy szkolne lekcje matematyki przyczyniają się do wyposażania uczniów w kompetencje kluczowe** i **jak mogą to robić**. Dalsze rozważania stanowić będą próbę udzielenia odpowiedzi przede wszystkim na drugie z tych pytań.

Porozumiewanie się w języku ojczystym

W codziennej praktyce szkolnej pokutuje przekonanie, iż osobami odpowiedzialnymi za rozwijanie uczniowskich kompetencji w tej dziedzinie są nauczyciele języka polskiego, zadaniem pozostałych zaś jest wyłącznie dbanie o poprawność wypowiedzi formułowanych przez uczniów (prawidłową konstrukcję zdania, nieużywanie zwrotów gwarowych, slangu, słów uważanych za obraźliwe itp.). Do zasobu wiedzy, umiejętności i postaw niezbędnych z punktu widzenia uczestnictwa w życiu społecznym i gospodarczym zalicza się jednak (obok znajomości słownictwa i gramatyki) również m.in. znajomość funkcji języka i głównych cech różnych stylów oraz umiejętności rozróżniania i wykorzystywania różnych typów tekstów[1]. W tym kontekście nauczyciel matematyki wydaje się mieć do spełnienia rolę, której nie podoła nauczyciel innego przedmiotu. Jego zadaniem staje się bowiem uświadomienie uczniom specyfiki stylu naukowego poprzez ukazanie swoistości zarówno języka matematyki, jak i tekstów pisanych w tym języku.

Abstrakcyjny charakter obiektów matematycznych, różnorodność składników języka (terminy specjalne, symbole, rysunki), brak środków ekspresji, pozaczasowość tekstu, jego bogata segmentacja, niezwykła kondensacja treści to tylko niektóre z cech wyróżniających język oraz tekst matematyczny i zarazem czyniących jego lekturę szczególną. Implikują one konieczność odrębnego przygotowywania uczących się do efektywnego posługiwania się specyficzną odmianą języka, bowiem sposoby pracy z tekstem i kompetencja językowa wypracowane w czasie posługiwania się językiem naturalnym i studiowania utworów literackich nie tylko nie znajdują zastosowania w czasie pracy z tekstem matematycznym, ale mogą wręcz stanowić przeszkodę i utrudniać jego zrozumienie. Zorganizowanie nauki czytania tekstu matematycznego wymaga wiedzy o istnieniu i znajomości roli jego różnych komponentów, a także umiejętności monitorowania przez nauczyciela własnej aktywności w czasie lektury oraz refleksji nad tą aktywnością. W tym obszarze kształcenie kompetencji językowych pozostaje więc zadaniem wyłącznie nauczyciela matematyki.

Porozumiewanie się w językach obcych

Liczba nauczycieli, którzy nie tylko dostrzegają nieodzowność (przynajmniej częściowego) zintegrowania nauczania matematyki oraz języków obcych, ale również starają się wyjść tej potrzebie naprzeciw w codziennej praktyce jest ciągle niewielka, mimo że konieczność traktowania umiejętności porozumie-

[1] Załącznik do *Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie*; Bruksela, 18 grudnia 2006 r.

wania się w językach obcych jako umiejętności ponadprzedmiotowej została zapisana w *Podstawie programowej* już wiele lat temu. Do przyczyn takiego stanu rzeczy zaliczyć należy brak konkretnych propozycji metodycznych skierowanych do nauczycieli, z których wielu nie ma – z różnych powodów – możliwości komunikowania się z uczniami w czasie zajęć w języku obcym.

Projekt ukierunkowany na rozwijanie omawianej kompetencji polegać może na systematycznym prowadzeniu przez każdego ucznia ilustrowanego słownika poznawanych na lekcjach pojęć matematycznych (może on zawierać nie tylko nazwy, ale również charakterystykę pojęć oraz opisane krótko przykłady i kontrprzykłady – uczniowie konstruują wtedy pełniejsze wypowiedzi dotyczące obiektów matematycznych). Korzyść z posiadania takiego słownika polega nie tylko na powiększeniu zasobu słownictwa. Można go bowiem wykorzystać jako pomoc w usystematyzowaniu wiedzy matematycznej uczniów (wyszukiwanie pojęć bądź definicji analogicznych i decydowanie, dlaczego można je za takie uważać, do wyróżnienia pojęć ważnych i pomocniczych itp.) lub zorganizowaniu powtórki (np. formułowanie przez samych uczniów pytań kontrolnych sprawdzających rozumienie pojęć). Wszystkie najważniejsze informacje zostają niejako zebrane w jednym miejscu, przez co uczniowie mają ułatwiony dostęp do nich. Dodatkowym walorem słownika jest to, że wiele symboli matematycznych wywodzi się z obcojęzycznych nazw obiektów. Znajomość tych nazw może więc przyczynić się do lepszego zrozumienia i zapamiętania symboliki.

Jako narzędzie wspomagające ocenianie stanu własnej wiedzy przez uczniów (co rozumiem i pamiętam, co do czego mam wątpliwości, o co powinienem zapytać) słownik umożliwia rozwijanie umiejętności uczenia się. Szukając informacji na obcojęzycznych stronach internetowych, uczniowie mają okazję do rozwijania umiejętności posługiwania się nowoczesnymi TI. Niejako przy okazji kształcone są więc dodatkowo również inne kluczowe kompetencje.

Zadanie polegające na stworzeniu ilustrowanego słownika może wreszcie stanowić element motywacji. Stwarzając uczniom warunki do „wykorzystywania jak największej liczby […] zdolności, wzmacniamy w nich chęć do nauki na przynajmniej trzy sposoby. Po pierwsze, dajemy im możliwość stosowania alternatywnych form ekspresji własnych myśli; po drugie, wzmacniamy ich mocne strony; po trzecie, dostarczamy im narzędzi do odkrywania swoich ukrytych talentów”[2].

Kompetencje społeczne i obywatelskie

Na liście umiejętności ponadprzedmiotowych kompetencjom tym odpowiadają przede wszystkim umiejętność komunikowania się oraz umiejętność pracy zespołowej, której poświeconych zostanie kilka uwag.

Powszechnie uznawanym i najczęściej wykorzystywanym sposobem rozwijania kompetencji społecznych uczniów jest zastosowanie na lekcji formy pracy grupowej i przestrzeganie w jej trakcie wyartykułowanych wcześniej zasad.

[2] M. V. Covington, K. M. Teel, *Motywacja do nauki*, GWP, Gdańsk 2004.

W dostępnych na stronach internetowych publikacjach nauczycielskich zawierających zestaw reguł, jakimi powinni kierować się członkowie grupy, kładzie się nacisk na konieczność wysłuchania wszystkich członków zespołu, powstrzymania się od krytyki i oceniania osób, szanowania ich poglądów, nieprzerywanie cudzych wypowiedzi. Zauważmy jednak, że wszystkie wymienione zasady normują każdy z typów relacji interpersonalnych (z tego punktu widzenia ich znajomość i umiejętność stosowania jest niewątpliwie wysoce pożądana). Co więc decyduje o specyfice pracy zespołowej? Jakie dodatkowe reguły powinien obejmować kodeks gwarantujący efektywność takiej pracy?

Eksperci od działań zespołowych podkreślają przede wszystkim (poza wzajemnym zaufaniem i dobrą komunikacją):

– jasno sprecyzowany, wspólny, uznany przez każdego z członków zespołu cel działań,
– zdefiniowany rodzaj wkładu i rola każdego z członków zespołu,
– odpowiedzialność każdego z członków zespołu za pracę, która ma zostać wykonana (sukces zależy od pracy każdego z członków zespołu),
– właściwie dobrane przywództwo.

Tradycyjnie rozumiana praca w grupach nie gwarantuje spełnienia powyższych warunków i nie przygotowuje uczniów do pracy zgodnie z tymi zasadami. Grupa otrzymuje bowiem zwykle polecenie rozwiązania określonego zadania (bądź zadań) matematycznych. Rolę wykonawcy przejmuje uczeń najlepiej przygotowany merytorycznie i bywa, że wyłącznie na nim spoczywa nie tylko ciężar całej pracy, ale i odpowiedzialność za sukces zespołu. Pozostali członkowie często (niestety nie zawsze) śledzą biernie rodzące się rozwiązanie. Być może akceptują cel, ale nie czują się za jego osiągnięcie odpowiedzialni.

Zauważmy, że gdy cel i role w grupie określone zostaną w ten sposób, że od każdego z członków grupy wymagane są dokładnie takie same umiejętności i zakres kompetencji (a w ramach takiej struktury przychodzi uczniom najczęściej pracować na lekcji matematyki, gdy polecenie brzmi „Rozwiąż zadanie”) grupa staje się mocna siłą swojej najbardziej kompetentnej jednostki. Efekt działania zespołowego, jaki powinien powstać w wyniku połączenia energii i zdolności poszczególnych uczestników, jest niemożliwy do osiągnięcia, gdyż albo osoba postrzegana jako posiadająca największe umiejętności przejmuje na siebie ciężar rozwiązania zadania i stanowi o sile zespołu, albo ciężar odpowiedzialności rozmywa się i rezultat działania jest gorszy niż byłby rezultat pracy jednostek, gdyby pracowały oddzielnie (umownie sytuację taką opisuje się jako $1+1+1+1<4$).

Cel pracy zespołu powinien zostać sformułowany tak, aby jego osiągnięcie wymagało rzeczywistego współdziałania i aby uzyskane efekty przewyższały to, do czego jednostki mogą dążyć samodzielnie. Można to osiągnąć – przykładowo – przesuwając punkt ciężkości działania grupy z uzyskania wyniku (mowa o rozwiązaniu zadania) na zrozumienie toku rozumowania przez każdego członka zespołu i umiejętność pełnego, klarownego przedstawienia go w toku publicznej prezentacji, w ramach której osoby nienależące do zespołu zadają pytania i zgłaszają wątpliwości. W interesie grupy jest, aby każda z osób w czasie pracy zgłaszała wszelkie wątpliwości dotyczące rozwiązania (te same zastrzeżenia mogą przecież później zgłosić uczniowie spoza zespołu, trzeba się więc na nie przygotować) i aby te wątpliwości zostały przekonująco rozwiane (tak samo jasno i precyzyjnie trzeba będzie odpowiadać w toku prezentacji). Przy tak postawionym celu pracy cenne stają się różne talenty i zdolności uczniów (nawet niewielki zasób umiejętności matematycznych uczestnika działa na korzyść zespołu, jeśli tylko uda się przekonać taką osobę, żeby otwarcie wyrażała wątpliwości; z kolei doskonała znajomość przedmiotu i umiejętność znalezienia rozwiązania zadania nie musi przekładać się na zdolność do uczenia innych – wtedy najcenniejszym będzie ten członek zespołu, który potrafi przełożyć rozwiązanie na język zrozumiały dla innego).

Praca w grupach może polegać nie tylko na rozwiązywaniu i prezentowaniu zadań. Może być związana również z oceną gotowych odpowiedzi i argumentacji. Przedmiotem działania grupy można uczynić – z jednej strony – wypracowanie kryteriów oceny argumentacji i metod dochodzenia do wyników, z drugiej zaś – ocenę konkretnych rozwiązań. Cenne jest wtedy zdanie wszystkich uczniów – zarówno tych o większym, jak i tych o mniejszym zasobie umiejętności matematycznych.

Obie propozycje nawiązują jednocześnie do innej z kompetencji kluczowych – umiejętności uczenia się. Uświadomienie sobie, czego nie wiem, czego nie umiem, co jest niejasne, zdefiniowanie tego, co stanowi wartość uczenia się, to pierwsze kroki na drodze planowania i oceniania własnej nauki. Podobne lekcje wymagają jednak starannego przemyślenia, zaplanowania i przygotowania uczniów do realizowania nowych celów.

Kompetencje informatyczne

Technologie informacyjne stworzyły nowe możliwości w zakresie uczenia się i nauczania matematyki. Odpowiednio wykorzystane komputery i kalkulatory graficzne ułatwiają nauczycielowi wprowadzenie, a uczniom zrozumienie pojęć matematycznych, mogą prowokować do stawiania hipotez i odkrywania twierdzeń, a także wspomagać rozwiązywanie zadań problemowych, z drugiej strony – pozwalają rozwijać umiejętności algorytmiczne.

Rola nauczyciela polega m.in. na ukazaniu uczniom możliwości, jakie stwarzają nowoczesne narzędzia. Bogata literatura zawiera wiele konkretnych propozycji lekcji i rozwiązań metodycznych dla każdego etapu kształcenia – są one najczęściej wyrazem doświadczeń autorów w wykorzystywaniu TI. Zastosowaniu nowoczesnych środków w nauczaniu matematyki poświęcony jest kwartalnik „Matematyka i Komputery”. W ramach Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki wyodrębniona została Grupa Robocza o nazwie Matematyka i Komputery. O randze problematyki świadczyć może również liczba badań nad wykorzystaniem TI w nauczaniu matematyki[3].

Propagując wykorzystanie nowoczesnych środków dydaktycznych, należy jednak zwrócić uwagę na zagrożenia, jakie ze sobą niosą (szczególnie w nauczaniu matematyki). Matematyka uznawana jest powszechnie za naukę de-

[3] Rezultaty publikowane były m.in. w „Dydaktyce Matematyki”.

dukcyjną, jej rozwój odbywa się jednakowoż na drodze indukcyjnej. Istnieje poważne niebezpieczeństwo, że hipotezy otrzymane i wzmocnione dzięki szeregowi prób empirycznych zostaną uznane za twierdzenia bez weryfikacji oraz że uczniowie przestaną dostrzegać potrzebę sprawdzania i uzasadniania hipotez, gdy te zostaną wzmocnione przez takie narzędzie jak komputer. Nie bez znaczenia jest tu bowiem uzyskiwana dzięki nowoczesnym narzędziom dokładność pomiarów i rysunków, która dla wielu uczniów stanowi argument przekonujący bardziej niż wywód przeprowadzony w oparciu o prawa logiki. Istnieje też obawa, że źle wykorzystane nowoczesne narzędzia doprowadzą do eliminacji myślenia na rzecz odgadywania oraz bezmyślnego obserwowania zmieniających się obrazów i liczb. Komputer czy kalkulator stanowią niewątpliwie potężny środek motywowania uczniów, ich wykorzystanie wymaga jednak głębokiej refleksji dydaktycznej.

Umiejętność uczenia się

Raport PISA 2003 ujawnia niezadowalający poziom kompetencji polskich uczniów w zakresie uczenia się matematyki. Do strategii uczenia się związanych z tym przedmiotem polscy piętnastolatkowie zaliczają:

– pamięciowe opanowanie jak największej partii materiału (60% uczniów),
– wyćwiczenie przykładów podobnych do podanych na lekcji (70% uczniów),
– wypracowanie nowych sposobów rozwiązania problemu (mniej niż 50% uczniów).

Powyższe wyniki korelują dobrze z danymi dotyczącymi ujawnionych w trakcie badania mocnych i słabych stron polskich uczniów. Uczniowie osiągają bardzo dobre rezultaty w tych obszarach, w których potrafią samodzielnie się doskonalić, a do takich należy niestety niemal wyłącznie stosowanie poznanych na lekcji algorytmów.

W zakresie przygotowania uczniów do uczenia się kluczową rolę odgrywa wyposażenie ich w umiejętność czytania tekstu matematycznego. Nie wystarczy jednak odczytanie z podręcznika treści definicji czy twierdzenia i przejście do rozwiązywania zadań. Należy zorganizować naukę czytania tekstu, w ramach której eksponowane będą działania użyteczne w trakcie lektury (w przypadku tekstu definicji będą to – przykładowo – wyróżnianie pojęcia definiowanego oraz warunków definicyjnych, doformalizowywanie lub odformalizowywanie tekstu, analizowanie parametrów występujących w definicji, refleksja nad tym, jak sprawdzić, że dany obiekt jest, a jak, że nie jest desygnatem pojęcia itp.). Jest to praca długofalowa i nie może ograniczać się do jednorazowego aktu zwieńczonego zbudowaniem planu czynności, jakie warto podejmować w trakcie lektury. Jak każdą umiejętność – również czytanie tekstu należy z uczniami systematycznie doskonalić tak, aby wykształcić pożądaną postawę.

Nauce czytania towarzyszyć może układanie przez uczniów pytań i zadań kontrolnych sprawdzających rozumienie tekstu. Pierwsze próby będą zapewne wymagały znacznego wsparcia i pomocy ze strony nauczyciela, a nawet pokazania instruktywnego wzorca. Praktyka szkolna pokazuje jednak, że odpowiednio zmotywowani i starannie przygotowani uczniowie zdolni są do formułowania pytań i zadań, które nie sprowadzają się do prośby o powtórzenie tekstu definicji. Można – przykładowo – poprosić uczniów o formułowanie pytań pozwalających „przyłapać" innych na niepełnym zrozumieniu lub pominięciu istotnego szczegółu. Towarzyszyć może temu ocenianie odpowiedzi udzielanych przez kolegów. Celem podobnych zabiegów jest nie tylko urozmaicenie praktyki szkolnej, ale przede wszystkim wdrażanie uczniów do przejęcia odpowiedzialności za własny proces uczenia się, przygotowanie ich do samodzielnego monitorowania postępów oraz przybliżenie im procesu oceniania.

Efektywna strategia uczenia się matematyki polega na rozwiązywaniu zadań, jednak (jak pokazuje m.in. wspomniany raport PISA) rozwiązywanie setek podobnych zadań nie przynosi zadowalających rezultatów. W obliczu tej pozornej sprzeczności warto przypomnieć, że z zadaniem mamy do czynienia wtedy, gdy – jak mówi Poly'a – „zachodzi potrzeba świadomego poszukiwania środka, za pomocą którego można osiągnąć dobrze widoczny, lecz chwilowo niedostępny cel", natomiast „jeśli równocześnie z ujawnieniem się potrzeby rodzi się w […] mózgu sposób na jej zaspokojenie, to wówczas nie ma zadania"[4]. Rozwiązywanie zadań wymaga więc poszukiwania, jest procesem heurystycznym polegającym na odkrywaniu nieznanych *a priori* związków między tym, co dane i tym, co niewiadome, opierającym się na przewidywaniu (i sprawdzaniu) którą drogę wybrać, bez danej z góry pewności, że prowadzi ona do celu; jest więc procesem twórczym, który ma niewiele wspólnego ze stosowaniem wyuczonych wcześniej algorytmów.

Powstaje pytanie, czy w ramach lekcji matematyki możliwe jest przygotowywanie uczniów do samodzielnego poszukiwania i odkrywania rozwiązań niezalgorytmizowanych wcześniej problemów. Wypowiedzi osób, których działalność owocowała licznymi odkryciami, sugerują, że jest to możliwe, gdyż proces twórczy poddaje się pewnym regułom (Kartezjusz, na przykład, zauważył[5], że starając się samodzielnie dojść do odkrycia, o którym słyszał, „korzysta z pewnych reguł"). Przekonanie o tym, że takimi samymi regułami i metodami badania posługują się wszyscy ludzie rozwiązujący zadania (nie tylko matematyczne) kierowało również pracą Poly'i, który stworzył listę pytań i wskazówek mających na celu prowokowanie operacji myślowych użytecznych przy rozwiązywaniu zadań[6]. Adresowanie do uczniów wskazówek z listy ma na celu nie tylko pomoc w rozwiązaniu konkretnego zadania, ale przede wszystkim rozwinięcie ogólnej zdolności uczniów do rozwiązywania problemów poprzez uświadomienie im określonych strategii heurystycznych (tak, aby w przyszłości potrafili działać samodzielnie).

Wielu nauczycieli kieruje pracą nad zadaniem, dając uczniom wskazówki i stawiając „pytania naprowadzające". O specyfice tych zebranych przez Poly'ę decyduje przede wszystkim ich ogólność, dzięki której stają się użyteczne

[4] G. Polya, *Odkrycie matematyczne*, WN-T, Warszawa 1975.
[5] Por. G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa 1993.
[6] Tamże.

w toku pracy nad wieloma różnymi problemami. Wskazują przy tym jedynie „ogólny kierunek, zostawiając uczniowi wiele do zrobienia”[7].

Przyswojenie każdego z pytań i każdej ze wskazówek wymaga zrozumienia ich istoty, co może nastąpić dopiero, gdy uczniowi będzie dane zobaczyć sposób ich stosowania oraz ich użyteczność w wielu różnych, autentycznych sytuacjach zadaniowych. Należy więc kierować do uczniów pytania i wskazówki z listy zawsze, gdy można to robić w sposób naturalny tak, aby (dostrzegłszy ich skuteczność, naśladując nauczyciela) uczniowie zaczęli zadawać je sobie w toku samodzielnej pracy. Indywidualne strategie heurystyczne gotowe do wykorzystania w czasie rozwiązywania zadań matematycznych muszą zostać wypracowane stopniowo przez samych uczniów.

Kluczowym (z punktu widzenia budowania owych strategii) elementem procesu rozwiązywania zadania jest refleksja na przebytą drogą myślową. „Spoglądając wstecz na rozwiązanie, ponownie rozpatrując i analizując wynik i drogę doń prowadzącą, uczniowie mogliby utwierdzić swoją wiedzę i rozwinąć swoje zdolności do rozwiązywania zadań”[8]. Zadanie nauczyciela polega na systematycznym organizowaniu i przyzwyczajaniu uczniów do badania własnego rozwiązania. Nie może ono jednak ograniczać się do sprawdzenia poprawności rachunków i powtórzenia rozumowania. Mason, Burton, Stacey uważają nawet, że „[…] nie uczę się na podstawie doświadczenia: warunkiem koniecznym jest refleksja nad tym, co zrobiłem”[9]. Refleksji tej należy jednak nadać „[…] odpowiednią strukturę, identyfikując kluczowe pomysły i momenty w pracy nad szukaniem rozwiązania”[10].

Pytania z listy Poly’i dostarczyć mogą także inspiracji do przeprowadzenia powtórek (i budowania kolejnych strategii uczenia się matematyki). „Spójrz na niewiadomą – mówi jedna z nich – i spróbuj przypomnieć sobie jakieś dobrze znane ci zadanie mające tę samą lub podobną niewiadomą”. Jeśli tą niewiadomą jest długość odcinka, można prowokować uczniów do przypomnienia sobie zadań, których rozwiązanie wymaga zastosowania twierdzenia Pitagorasa bądź twierdzenia Talesa, takich, w których buduje się proporcję, wykorzystując podobieństwo trójkątów, takich, w których pole jednej figury wyrażamy w różny sposób itd. Jednocześnie pogłębiane jest rozumienie istoty samej wskazówki, a uczniowie przygotowywani są do jej stosowania.

Kompetencje matematyczne

Wiedza w dziedzinie matematyki obejmuje[11] nie tylko umiejętność liczenia, znajomość miar i struktur, rozumienie terminów i pojęć matematycznych, ale również umiejętność śledzenia i oceniania ciągu argumentów, rozumowania w matematyczny sposób, komunikowania się językiem matematycznym, rozumienie dowodu matematycznego, a także świadomość pytań, na które matema-

[7] Tamże.
[8] Tamże.
[9] B. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Matematyczne myślenie*, WSiP, Warszawa 2005.
[10] Tamże.
[11] Tamże.

tyka może dać odpowiedź. Rozwijanie tych składowych kompetencji wymaga kształtowania postaw charakterystycznych dla aktywności matematycznej[12], to z kolei następować może jedynie w toku specyficznej aktywności uczniów.

Organizowanie specyficznych form aktywności napotyka jednak w praktyce na poważne przeszkody, które wyrastają z głęboko zakorzenionych (i często nieuświadomionych) przekonań nauczycieli.

Można niejednokrotnie spotkać się z opinią, że poszczególne składowe aktywności matematycznej rozwijają się same, w toku zdobywania wiadomości i kształcenia umiejętności określonych przez program nauczania. O fałszywości tego przekonania najlepiej świadczy rzeczywistość szkolna. W procesie kształcenia uczniowie poznają – przykładowo – wiele twierdzeń matematycznych, które następnie poprawnie stosują. Jednocześnie jednak nie rozumieją metodologicznego sensu twierdzenia. Nie dostrzegają roli założeń (co uwidacznia się w sytuacji, gdy któreś z nich nie jest spełnione). Nie dostrzegają różnic między twierdzeniem matematycznym a twierdzeniem weryfikowalnym empirycznie; często „dowodzą" prawdziwości twierdzenia matematycznego, podając przykłady. Niezależnie od nabywania określonych programem wiadomości i umiejętności, rozwijają się u uczniów postawy i zachowania sprzeczne z postulowanymi przez dydaktyków jako cele nauczania matematyki.

Równie silne oddziałuje na szkolną rzeczywistość przeświadczenie o tym, że aktywność matematyczna dostępna jest wyłącznie dla niewielu utalentowanych jednostek, niedostępna zaś dla pozostałych (a więc dla większości uczniów). O jego nieprawdziwości przekonuje Z. Krygowska mówiąc, że gdyby nie było możliwe rozwijanie inteligencji i aktywności intelektualnej ogółu dzieci, należałoby zachować matematykę „tylko w kształceniu przyszłych użytkowników, lepiej dających sobie radę z tym przedmiotem"[13]. Tymczasem widoczna jest światowa tendencja do przywracania myśleniu matematycznemu rangi kompetencji niezbędnej do rozumienia współczesnego świata i życia we współczesnym społeczeństwie.

Trzecią przeszkodą wydaje się nie tyle niechęć do organizowania aktywności uczniów, ile brak pełnego zrozumienia specyfiki istoty konkretnej aktywności matematycznej. Szkoła zaakceptowała konieczność odejścia od transmitowania wiedzy w kierunku ucznia i recypowania jej przez tego ostatniego na rzecz aktywnego uczestniczenia w konstruowaniu wiedzy przez uczącego się. Wciąż jednak wykonywanie przez ucznia jakichkolwiek czynności (na przykład wyznaczanie – w ramach ćwiczeń – pierwiastków dziesiątego z kolei równania kwadratowego) na lekcji matematyki uznaje się za aktywność matematyczną.

Jedną z form aktywności matematycznej jest (według Krygowskiej) definiowanie. Lekcja matematyki, na której ma zostać wprowadzone określenie pozwalające rozstrzygać, kiedy dwa punkty są symetryczne względem pewnej prostej rozpoczyna się niekiedy od tego, że uczniowie przekłuwają złożoną

[12] Charakterystyka aktywności matematycznej zawarta została w artykule Z. Krygowskiej *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich* zamieszczonym w 6 numerze „Dydaktyki Matematyki".

[13] Z. Krygowska, *Nauczanie matematyki uczniów w wieku 10–16 lat – stan aktualny i tendencje*, „Wiadomości Matematyczne" 1979, t. 21, 2.

wzdłuż narysowanej prostej kartkę i dowiadują się, że dwa otrzymane w ten sposób punkty nazywane są symetrycznymi względem owej prostej. Następnie proszeni są o zmierzenie odległości każdego z punktów od prostej i porównanie wyników obu pomiarów, sprawdzenie, jaka jest miara kąta między daną prostą a prostą przechodzącą przez wyznaczone punkty oraz stwierdzenie, czy punkty leżą po tej samej czy po przeciwnych stronach danej prostej. Jeśli jednym z celów lekcji jest wdrażanie uczniów do definiowania pojęć matematycznych następuje moment, w którym uczniowie kończą rozpoczęte przez nauczyciela zdanie: „Punkty A i A' nazywamy symetrycznymi względem prostej k, gdy leżą po…" (i tu wymieniają trzy warunki). Nauczyciel dopowiada jeszcze, że punktem symetrycznym względem prostej do punktu leżącego na tej prostej jest on sam. Czy uczniowie są aktywni? Przekłuwają, mierzą, porównują, wreszcie – definiują. Czy jednak ta ostatnia aktywność nie jest tylko pozorna (ze względu na cel, jakim jest nauka definiowania)? Czy można ową szkolną aktywność zbliżyć jeszcze do tej, która jest udziałem matematyków w autentycznym procesie definiowania pojęć? Wydaje się, że tak. W jaki sposób? Pozwalając, aby to uczniowie wybierali warunki definicyjne (decydowali o ich ilości i treści) i aby rozstrzygali przy tym, czy sformułowane przez nich określenie jest adekwatne do tego, co chcą opisać. Takie podejście zakłada, że uczniowie będą błądzić i prawdopodobnie wielokrotnie korygować pomyłki. Ma ono jednak niezaprzeczalne walory. Pozwala ujawnić błędy w myśleniu uczniów, które często przy innym sposobie wprowadzenia i po wyuczeniu przez uczniów narzuconego im określenia mogą nigdy się nie ujawnić. Pozwala też pokazać matematykę jako dziedzinę *in statu nascendi*, co może mieć duże znaczenie jako element motywacji do uczenia się tego przedmiotu.

Okazji do prowokowania różnego typu aktywności matematycznych dostarcza każda lekcja matematyki. Ważne jest, aby aktywność ucznia organizować tak, by była maksymalnie zbliżona do sposobu pracy, który charakteryzuje matematyka odkrywającego dopiero elementy teorii matematycznej.

Bibliografia

Covington M. V., Teel K. M., *Motywacja do nauki*, GWP, Gdańsk 2004.

Krygowska Z., *Nauczanie matematyki uczniów w wieku 10–16 lat – stan aktualny i tendencje*, „Wiadomości Matematyczne" 1979, t. 21, 2.

Mason B., Burton L., Stacey K., *Matematyczne myślenie*, WSiP, Warszawa 2005.

Polya G., *Jak to rozwiązać?*, PWN, Warszawa 1993.

Polya G., *Odkrycie matematyczne*, WN-T, Warszawa 1975.

Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów OECD PISA. Wyniki Badania 2003 w Polsce.

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół, Dz. U. 2009, Nr 4, poz. 17.

Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie, Bruksela 2006.