Jerzy Łoś

Próba Aksjomatyzacji Logiki Tradycyjnej

Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska Lublin-Polonia. Sectio F 1/3, 211-228

1946

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL I, 3 SECTIO F 1946

Z Zakładu Logiki Matematycznej i Podstaw Matematyki Wydziału Przyrodniczego Uniwersytetu M. C. S.
Kierownik: Doc. Dr Jerzy Słupecki

JERZY ŁOŚ

Próba Aksjomatyzacji Logiki Tradycyjnej [1] *)

Une preuve d'axiomatisation de la logique traditionelle

§ 1. Zadaniem niniejszej pracy jest:

a) analiza sądów elementarnych występujących w różnych systemach sylogistyki A r y s t o t e l e s a, przy pomocy stosunków zakresowych;

b) aksjomatyzacja praw, tzw. w logice tradycyjnej, wnioskowania bezpośredniego;

c) aksjomatyzacja logiki tradycyjnej tj. sylogistyki i praw wnioskowania bezpośredniego.

W pracy niniejszej posługiwać się będę symboliką p. prof. J. Ł u k a s i e w i c z a [2]), dla zachowania jednolitości również funktory nie występujące u p. prof. J. Ł u k a s i e w i c z a, umieszczać będę przed argumentami, wyjątek robię jedynie dla negacji przynazwowej i tak negację nazwy a piszę, za algebraikami logiki, w postaci a'. Definicje podawać będę w postaci równoważności, przy pomocy funktora E (równoważność zdaniowa).

§ 2. Logika tradycyjna odziedziczyła po logice A r y s t o t e l e s a tę własność, że przy pomocy niektórych jej praw można udowodnić zdania, z których wynika istnienie desygnatów nazwy, chociaż w założeniach rozumowania nie tkwiło założenie istnienia tych desygnatów. Chodzi tu przede wszystkim o prawo konwersji z ograniczeniem, które mówi:

Jeżeli każde S jest P, to niektóre P jest S.

Zdanie to, w potocznym rozumieniu terminów tu użytych, jest fałszywe przy podstawieniu za S nazwy pustej.

Niektórzy logicy widzą tu poważny błąd A r y s t o t e l e s a, inni starają się go usprawiedliwić, trudność jednak pozostaje.

Trudność tę starali się logicy rozwiązać na trzy sposoby. Pierwszy z nich polega na ograniczeniu dyrektywy podstawiania za zmienne nazwowe do nazw niepustych. Dyrektywę taką wprowadza do swego sy-

*) Wszystkie odnośniki umieszczone są przy końcu pracy.

stemu p. prof. J. Łukasiewicza[3])). Pozwala ona zachować w systemie wszystkie prawdziwe sylogizmy, prawa kwadratu logicznego i prawa konwersji zdań Arystotelesa bez zmiany tradycyjnego sensu tych zdań. System prof. J. Łukasiewicza określony jest następującymi aksjomatami:

AŁ$_2$ U_1aa

AŁ$_2$ I_1aa

AŁ$_3$ $CKU_1mbU_1amU_1ab$

AŁ$_4$ $CKU_1mbI_1maI_1ab$[4])

Widzimy, że terminami pierwotnymi tego systemu są funktory zdaniotwórcze zdań Arystotelesa ogólno-twierdzące i szczegółowo-twierdzące. Systemem pierwotnym jest tu system rachunku zdań. Aksjomaty *AŁ*$_3$ i *AŁ*$_4$ są to tryby sylogistyczne *Barbara* i *Datisi*. Pozostałe dwa zdania Arystotelesa definiuje p. prof. J. Łukasiewicz, następująco:

DŁ$_1$ $EY_1ab\ NI_1ab$

DŁ$_2$ $EO_1ab\ NU_1ab$

Wyzyskane są tu jak widzimy znane z kwadratu logicznego związki sprzeczności. System p. prof. J. Łukasiewicza będziemy w dalszym ciągu nazywali systemem *Ł*.

§ 3. Prof. J. Słeszyński zauważył[5]), że zdania Arystotelesa można traktować jako zdania, orzekające o zachodzeniu pomiędzy nazwami wchodzącymi w skład zdania pewnych stosunków zakresowych. Jak wiadomo logika tradycyjna wyróżniała pięć takich stosunków, są to stosunki zamienności, podrzędności, narzędności, krzyżowania i wykluczania. Jeżeli funktory zdaniotwórcze zdań orzekających o zajściu jednego z nich oznaczymy odpowiednio przez α, β, γ, δ, ε to np. zdanie

$$\gamma\ ab$$

przeczytamy: „*a* pozostaje w stosunku nadrzędności do *b*".

Oznaczmy teraz skrótowo przez

$[z_1, z_2, \ldots z_n]ab$ gdzie z_i jest jednym z funktorów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

alternatywę zdań

$$z_1ab, z_2ab, \ldots . z_nab$$

Zdania Arystotelesa dadzą się teraz zdefiniować

DA$_{11}$ $EUab\ [\alpha, \beta]ab$

DA$_{12}$ $EIab\ [\alpha, \beta, \gamma, \delta]\ ab$

DA$_{13}$ $EOab\ [\gamma, \delta, \varepsilon]ab$

DA$_{14}$ $EYab\ \varepsilon ab$

Sens tak zdefiniowanych zdań Arystotelesa wydaje się identyczny z sensem zdań U_1ab, I_1ab, O_1ab oraz Y_1ab systemu *Ł*.

W zawiązku jednak z wprowadzeniem do logiki nazw pustych, prof. J. Sleszyński wprowadza w miejsce pięciu, osiem stosunków zakresowych, które otrzymuje przez podział dichotomiczny. W niniejszej pracy jednak aby je otrzymać posłużymy się sposobem, stosowanym w tym celu przez p. prof. K. Ajdukiewicza[6]).

Niech wyrażenie:

I. *exab*

znaczy: część wspólna zakresów *a* i *b* nie jest pusta.

Wyrażenie zaś:

II. *a'*

jak to już zostało powiedziane w § 1 niech oznacza negację nazwy *a*.

Pomiędzy dowolnymi nazwami *a* i *b* musi zajść, ze względu na prawdziwość zdań

exab, exab', exa'b

osiem i tylko osiem stosunków, które odpowiednio definiują nam osiem stosunków zakresowych

D δ Eδ*abKKexabexab'exa'b* (stos. krzyżowania się)

D γ Eγ*abKKexabexab'Nexa'b* („ nadrzędności)

D β Eβ*abKKexabNexab'exa'b* („ podrzędności)

D ε Eε*abKKNexabexab'exa'b* („ wykluczania)

D α Eα*abKKexabNexab'Nexa'b* („ zamienności)

D ζ Eζ*abKKNexabexab'Nexa'b* („ pusto-nadrzędności)

D η Eη*abKKNexabNexab'exa'b* („ pusto-podrzędności)

D ϑ Eϑ*abKKNexabNexab'Nexa'b* („ pusto-zamienności)

Przy pomocy tych stosunków definiuje prof. Sleszyński zdania Arystotelesa następująco (definicje te zapiszemy przy pomocy skrótów podobnie jak definicje DA_{11}—DA_{14}):

D_1 EU_2ab $[\alpha, \beta, \eta, \vartheta]ab$

D_2 EI_2ab $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]ab$

D_3 EO_2ab $[\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta]ab$

D_4 EY_2ab $[\varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta]ab$

Prof. Sleszyński zauważa, że przy tym rozumieniu zdań Arystotelesa odpadają wszystkie prawa kwadratu logicznego za wyjątkiem praw sprzeczności, prawo konwersji z ograniczeniem, tryby sylogistyczne, w których nazwie znajduje się litera *p*, więc *Darapti, Felapton,* i *Fesapo*. Łatwo również wykazać, że odpadają tryby osłabione tak, że pozostaje ogółem 16 trybów, po 4 w każdej figurze.

Prof. Sleszyński nie podał aksjomatyki swojego systemu (system ten dalej nazywać będziemy systemem *S*), można jednak bez trudu wykazać, że następujące trzy wyrażenia

AS$_1$ CI_2abI_2ba

AS$_2$ $CKU_2mbU_2amU_2ab$

AS$_3$ $CKU_2mbI_2amI_2ab$

w których funktory zdaniotwórcze I_2 oraz U_2 są wyrażeniami pierwotnymi, pozostałe zaś wyrażenia definiuje się następująco:

DS$_1$ EO_2abNU_2ab

DS$_2$ EY_2abNI_2ab

stanowią aksjomatykę niezależną i zupełną systemu *S*.

§ 4. Trzeci wreszcie sposób usunięcia omawianej trudności polega na takiej zmianie znaczenia zdania ogólno-twierdzącego, aby przy tym nowym znaczeniu prawo konwersji z ograniczeniem pozostało w mocy rówież przy podstawianiu za zmienne nazw pustych. Sposobu tego używa p. prof. J. Słupecki przy budowie swojej aksjomatyki sylogistyki [7]. Aby zagwarantować zdaniu ogólno-twierdzącemu i szczegółowo-twierdzącemu, występującym jako terminy pierwotne tego systemu (dalej nazywać go będziemy systemem *Sł.)* takie właśnie znaczenie, interpretuje p. prof. J. Słupecki znaczenie tych zdań w systemie rachunku nazw prof. St. Leśniewskiego tzw. „*ontologii*". W systemie tym, jak wiadomo, występują jako termin pierwotny funktor *est* [8]), posiadający tę własność, że wyrażenie

estab

przy podstawieniu za zmienną *a* nazwy pustej przechodzi w fałsz przy wszelkim podstawieniu za *b*.

Następujące dwie definicje:

DO$_1$ $\Pi a \Pi b EUab \Pi x Cestxaestxb$

DO$_2$ $\Pi a \Pi b EU_3abK \Sigma x estxa \Pi x Cestxaestxb$

poprawne na gruncie ontologii definiują nam odpowiednio zdanie ogólno-twierdzące w sensie Arystotelesa i zdanie ogólno-twierdzące w sensie jaki nadaje się temu zdaniu w systemie *Sł.* Jeżeli dla zdania szczegółowo twierdzącego przyjmie się jeszcze następującą poprawną na gruncie ontologii i zgodną jak się wydaje z rozumieniem tego zdania u Arystotelesa, definicje:

DO$_3$ $\Pi a \Pi b EI_3ab \Sigma x Kestxaestxb$

to łatwo zauważyć można, że wyrażenie

$\Pi a b CUabI_3ba$

przy nie ograniczonej do nazw nie pustych dyrektywie podstawiania będzie wyrażeniem fałszywym, zaś wyrażenie

$TO_1 \quad \Pi a \Pi b C U_3 ab I_3 ba$

jest tezą ontologii i jako takie jest wyrażeniem prawdziwym.

System *Sł* jest określony następującymi aksjomatami i definicjami:

$AS\text{ł}_1 \quad CU_3 ab I_3 ab$
$AS\text{ł}_2 \quad CI_3 ab I_3 ba$
$AS\text{ł}_3 \quad CKU_3 mb U_3 am U_3 ab$
$AS\text{ł}_4 \quad CKU_3 mb I_3 am I_3 ab$
$DS\text{ł}_1 \quad EO_3 ab NU_3 ab$
$DS\text{ł}_2 \quad EY_3 ab NI_3 ab$

Należy jeszcze podkreślić, że w systemie *Sł* wyrażenie

$U_3 aa$

będące odpowiednikiem aksjomatu $A\text{Ł}_1$ systemu *Ł*. jest wyrażeniem fałszywym, wszystkie zaś wyrażenia $AS\text{ł}_1$—$AS\text{ł}_4$ po dołączeniu kwantyfikatorów dużych przed znakiem *C* stają się na mocy definicji DO_2 i DO_3 tezami ontologii

Gdybyśmy chcieli zdania wchodzące w skład systemu *Sł* przedstawić w postaci alternatyw stosunków zakresowych, to moglibyśmy to zrobić w sposób następujący:

$D_5 \quad EU_3 ab \; [\alpha, \beta] \, ab$
$D_6 \quad EI_3 ab \; [\alpha, \beta, \gamma, \delta] \, ab$
$D_7 \quad EO_3 ab \; [\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta] \, ab$
$D_8 \quad EY_3 ab \; [\varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta] \, ab$

W dalszym ciągu tej pracy definicje te jeszcze bliżej omówimy. Zauważmy jeszcze, że rozumienie zdania $O_3 ab$ najbardziej odbiega od rozumienia zdania szczegółowo-przeczącego u A r y s t o t e l e s a, a to ze względu na prawdziwość tego zdania przy podstawieniu za *a* nazwy pustej [9]).

§ 5. Przy pomocy ośmiu stosunków zakresowych zbudować można również definicje innych zdań orzekających o stosunkach zakresowych między dwoma nazwami, będącymi argumentami funktora głównego, i tak np. zdanie H a m i l t o n a „wszystkie *a* są wszystkimi *b*" (oznaczmy jego funktor główny przez *H*) zdefiniować można:

$D_9 \quad EHab \; [\alpha, \vartheta] \, ab$

zaś zdanie „tylko niektóre *a* są *b*" (w ten sposób niektórzy logicy chcieliby rozumieć zdanie szczegółowo twierdzące A r y s t o t e l e s a), przy oznaczeniu jego funktora głównego przez *T*:

$D_{10} \quad ETab \; [\gamma, \delta] \, ab$

§ 6. Przechodząc do praw tzw. wnioskowania bezpośredniego zauważmy, że wszystkie one posiadają postać okresu warunkowego, w poprzedniku którego stoi jedno i tylko jedno zdanie zakresowe, w następniku zaś również jedno zdanie należące do tej samej grupy (w przypadku zdań A r y s t o t e l e s a w poprzedniku i następniku stoi jedno ze zdań A r y s t o t e l e s a), przy czym argumentami poprzednika i następnika są te same dwie zmienne. Wśród praw wnioskowania bezpośredniego wyróżnić można dwa typy [10]). Jeden z nich zachowuje w następniku ten sam porządek argumentów co w poprzedniku, przy czym poprzednik i następnik mogą być negacjami. Typ drugi nie posługuje się funktorem negacji przyzdaniowej, natomiast w następniku może występować negacja przynazwowa i kolejność argumentów może być w stosunku do poprzednika zmieniona. W typie więc drugim (który dalej będziemy nazywali przekształceniami, zaś o poprzedniku będziemy mówili, że się przekształca w następnik) mogą przy porządku argumentów poprzednika *ab* zajść następujące przekształcenia:

ab' — *obwersja*

ba — *konwersja*

ba' — *obwersja konwersji*

b'a — *kontrapozycja częściowa*

b'a' — *kontrapozycja zupełna*

a'b — *inwersja częściowa*

a'b' — *inwersja zupełna*

Zauważmy teraz, że nie każde zdanie, wyrażające alternatywę stosunków pomiędzy zakresami, posiada wszystkie przekształcenia i tak zdanie ogólno-twierdzące A r y s t o t e l e s a, jak wiadomo, obwersji-konwersji nie posiada, zdanie zaś szczegółowo-przeczące nie posiada konwersji.

Przyjmujemy obecnie następujące określenie:

Mówimy, że układ zdań *G* jest grupą ze względu na przekształcenie *P* wtedy i tylko wtedy, gdy każde ze zdań należących do *G* posiada przekształcenie *P* oraz gdy każdy z funktorów głównych zdań, należących do *G*, występuje w przekształceniu, któregoś ze zdań należących do *G* [11]).

W myśl powyższego określenia zdania A r y s t o t e l e s a stanowią grupę ze względu na obwersję, mamy bowiem następujące cztery prawa (znane z logiki tradycyjnej):

TA$_1$ *CUabYab'*

TA$_2$ *CIabOab'*

TA$_3$ *COabIab'*

TA$_4$ *CYabUab'*

§ 7. Zdefiniowane w § 3 przy pomocy funktora ex w definicjach $D\alpha - D\delta$ zdania, jako zdania orzekające o zachodzeniu stosunków zakresowych między argumentami również podlegają podanym wyżej przekształceniom. Aby te przekształcenia zbadać posłużymy się następującym układem aksjomatów, którego terminami pierwotnymi są: funktor zdaniotwórczy od dwóch argumentów nazwowych „ex" oraz negacja przynazwowa „'"

A₁ $Cexa''b\,exba$

A₂ $Cexabexa''b$

Pierwotnym dla naszego systemu (dalej nazywać go będziemy systemem S_1) jest system implikacyjno-negacyjny rachunku zdań wraz z definicjami, jako dyrektywy przyjmiemy więc normalne dyrektywy obowiązujące w takim systemie, przy czym definicję wyrażenia sensownego rozszerzymy na wyrażenia w których w miejsce dowolnej zmiennej zdaniowej stoi wyrażenie $exab$ lub jego podstawienie. Ponadto przyjmujemy normalnie określoną dyrektywę podstawiania za zmienne nazwowe.

W dowodach też posługiwać się będziemy dyrektywą zastępowania dla równoważności zdaniowej, która jest, jak wiadomo, na gruncie rachunku zdań dyrektywą pochodną ze względu na dyrektywę odrywania. W wierszach dowodowych zaznaczać będziemy stosowanie dyrektywy zastępowania przez Dz, podając równocześnie numer tezy lub definicji, na którą, lub na podstawie której, będziemy się w danym wypadku powoływali i, o ile zastępujemy nie na mocy definicji wyrażenie zastępowane i zastępujące np.: $Dz\ T_2\ exab'/exb'a$.

System S_1 będziemy w ten sposób budowali, aby tezami systemu były tylko te wyrażenia, których wartość logiczna nie jest zależna od założenia istnienia bądź nieistnienia jakichkolwiek przedmiotów na świecie. Wyrażenia, których wartość logczna zmiena się w zależności od założenia istnienia, bądź nieistnienia przedmiotów będziemy nazywali wyrażeniami egzystencjalnymi. Każde wyrażenie egzystencjalne jest na gruncie systemu S_1 wyrażeniem fałszywym. Zbudujmy teraz trzy następujące matryce interpretacyjne:

Mat. I

$exab$	Λ	a'
Λ	0	Λ

Mat. II.

$exab$	Λ	V	a'
Λ	0	0	V
V	0	1	Λ

Mat. III.

C	0	1
0	1	1
1	0	1

K	0	1
0	0	0
1	0	1

	N
0	1
1	0

Zauważmy, że matryca I odpowiada wypadkowi, w którym zakładamy, że na świecie nie ma wcale przedmiotów, wtedy każda nazwa jest pusta (Λ), zdanie zaś $exab$ jest zawsze fałszywe. Matryca II odpowiada zaś wypadkowi, w którym założyliśmy, że na świecie istnieje tylko jeden przedmiot, wtedy każda nazwa jest bądź nazwą pustą, bądź powszechną (V) wyrażenie zaś *exab* jest wtedy i tylko wtedy prawdziwe, gdy zarówno *a* jest nazwą powszechną, jak i *b* jest nazwą powszechną (nazwy *a* i *b* oznaczają wtedy jeden i ten sam jedyny na świecie przedmiot).

Wreszcie matryca III jest zwykłą matrycą dwuwartościowej implikacji, koniunkcji i negacji.

Z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie I.

Każde wyrażenie sensowne systemu S_1 zbudowane przy pomocy funktorów C, K, N, ex, oraz $'$, i zmiennych nazwowych, które ma tę własność, że przy podstawieniu za wszystkie zmienne symbolu Λ przyjmuje zgodnie z matrycami I i III wartość 0, lub tę własność, że przy pewnym podstawieniu za zmienne symboli Λ i V przyjmuje zgodnie z matrycami II i III wartość 0, jest na gruncie systemu S_1 wyrażeniem fałszywym.

Zauważmy, że wyrażenia A_1 i A_2 przyjmują przy wszystkich podstawieniach za zmienne symboli Λ i V zarówno zgodnie z matrycami I i III jak i z matrycami II i III wartość 1.

§ 8. Dowiedziemy obecnie kilku tez wstępnych systemu S_1.

$CCpqCCqrCpr$ $p/exab$, $q/exa''b$, $r/exba$ * CA_2 — CA_1 — T_1

T_1 $Cexabexba$

$CCpqCCqpEpq$ $p/exab$, $q/exba$ * CT_1 — CT_1 $(a/b, b/a)$ — T_2

T_2 $Eexabexba$

$CCpqCCqrCCrpEpr$ $p/exa''b$, $q/exba$, $r/exab$ * CA_1 — CT_1 $(a/b, b/a)$ — ' CA_2 — T_3

T_3 $Eexa''bexab$

Denificje $D\alpha$—$D\vartheta$ są definicjami na gruncie systemu S_1 poprawnymi, możemy je więc dołączyć do tego systemu. Zachodzą teraz twierdzenia następujące:

Twierdzenie II.

Zdania zdefiniowane w $D\alpha$—$D\vartheta$ stanowią grupę ze względu na konwersję.

Twierdzenie to wynika z ośmiu następujących tez systemu S_1, z których dowodzimy tylko pierwszej, dowody siedmiu pozostałych są analogiczne:

CEpKKqNrNsCKKqNsNrp p/α*ba, q*/*exab, s*/*exab', r*/*exa'b* * *CD*α(*a*/*b, b*/*a, Dz* T_2 *exba*/*exab, exba'*/*exa'b, exb'a*/*exab'*) — *Dz D*α—T_4

T_4 $C\,\alpha\,ab\ \alpha\,ba$

T_5 $C\,\beta\,ab\ \gamma\,ba$

T_6 $C\,\gamma\,ab\ \beta\,ba$

T_7 $C\,\delta\,ab\ \delta\,ba$

T_8 $C\,\varepsilon\,ab\ \varepsilon\,ba$

T_9 $C\,\zeta\,ab\ \eta\,ba$

T_{10} $C\,\eta\,ab\ \zeta\,ba$

T_{11} $C\,\vartheta\,ab\ \vartheta\,ba$

Twierdzenie III.

Zdania zdefiniowane w *D*α—*D*ϑ-nie stanowią grupy ze względu na żadne inne przekształcenie, za wyjątkiem konwersji.

Dowód:

Jeżeli zdania *D*α—*D*ϑ stanowią grupę ze względu na omawiane przekształcenia, to również zdanie $\vartheta\,ab$ przekształca się w każdym z tych przekształceń w jakieś zdanie *D*α—*D*ϑ

Z definicji *D*α—*D*ϑ z własności omawianych przekształceń oraz z tez rachunku zdań wynika, że bądź wyrażenie

F_1 *CKKNexabNexab'Nexa'bexa'b'*

bądź wyrażenie

F_2 *CKKNexabNexab'Nexa'bNexa'b'*

jest konsekwencją każdego takiego przekształcenia [12]).

Wyrażenie jednak F_1 przy podstawieniu za zmienne symbolu Λ przyjmuje zgodnie z matrycami I i III wartość 0, wyrażenie za F_2 przy podstawieniu *a*/Λ, *b*/Λ zgodnie z matrycami II i III wartość 0, oba wyrażenia są więc w myśl twierdzenia I fałszywe.

§ 9. Podzielmy teraz osiem naszych stosunków zakresowych według prawdziwości lub fałszywości wyrażenia *exa'b'*. Definiując zdania w ten sposób powstałe uzyskamy 16 następujących definicji:

Dα_1 *E*α_1*ab KKexabNexab' KNexa'bexa'b'*

Dα_2 *E*α_2*ab KKexabNexab' KNexa'bNexa'b'*

Dβ_1 *E*β_1*ab KKexabNexab' Kexa'bexa'b'*

$D\beta_2$ $E\beta_2 ab\, KKexabNexab'Kexa'bNexa'b'$

$D\gamma_1$ $E\gamma_1 ab\, KKexabexab'KNexa'bexa'b'$

$D\gamma_2$ $E\gamma_2 ab\, KKexabexab'KNexa'bNexa'b'$

$D\delta_1$ $E\delta_1 ab\, KKexabexab'Kexa'bexa'b'$

$D\delta_2$ $E\delta_2 ab\, KKexabexab'Kexa'bNexa'b'$

$D\varepsilon_1$ $E\varepsilon_1 ab\, KKNexabexab'Kexa'bexab$

$D\varepsilon_2$ $E\varepsilon_2 ab\, KKNexabexab'Kexa'bNexa'b'$

$D\zeta_1$ $E\zeta_1 ab\, KKNexabexab'KNexa'bexa'b'$

$D\zeta_2$ $E\zeta_2 ab\, KKNexabexab'KNexa'bNexa'b'$

$D\eta_1$ $E\eta_1 ab\, KKNexabNexab'Kexa'bexa'b'$

$D\eta_2$ $E\eta_2 ab\, KKNexabNexab'Kexa'bNexa'b'$

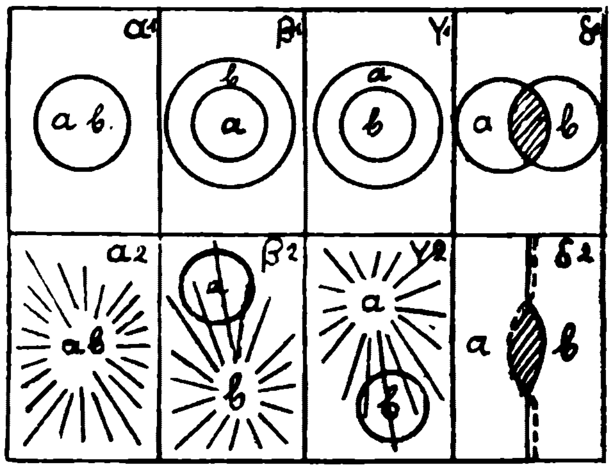
$D\vartheta_1$ $E\vartheta_1 ab\, KKNexabNexab'KNexa'bexa'b'$

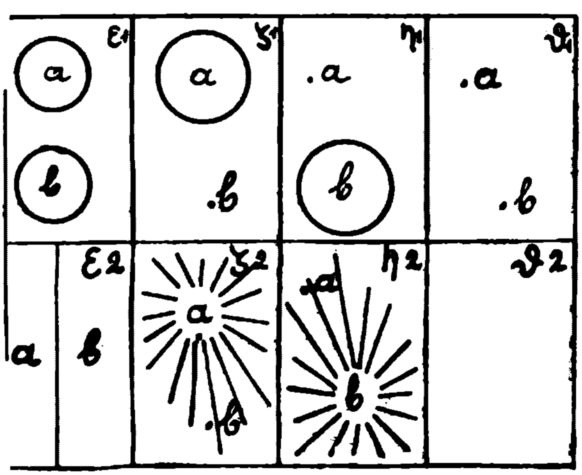
$D\vartheta_2$ $E\vartheta_2 ab\, KNexabNexab'Kexa'bNexa'b'$

Łatwo udowodnić, że zdanie $\vartheta_2 ab$ przy wszystkich przekształceniach przechodzi w samo siebie, stanowi więc, ze względu na wszystkie przekształcenia grupę.

Łatwo również zauważyć, że zdanie $\vartheta_2 ab$ jest prawdziwe tylko przy założeniu nieistnienia przedmiotów na świecie, tak też zdanie $\vartheta_2 ab$ spełnia matryce I i III, nie spełnia zaś matryc II i III, wyrażenie zaś $N\vartheta_2 ab$ przeciwnie.

Aby łatwiej uchwycić intuicje zawarte w definicjach $D\alpha_1 - D\vartheta_2$ posłużymy się następującymi rysunkami analogicznymi do diagramów E u l e r a.





Twierdzenie IV.

Zdania $D\alpha_1 - D\vartheta_2$ stanowią grupę ze względu na wszystkie przekształcenia.

Prawdziwość tego twierdzenia wynika ze 105 tez zestawionych w poniższej tabeli ułożonej na wzór tabeli K e y n e s'a. Tez tych nie będziemy szczegółowo dowodzić. Dowody ich są analogiczne do dowodu tezy T_4.

	Poprzednik a b / Następnik	α_1	α_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ_1	δ_2	ε_1	ε_2	ζ_1	ζ_2	η_1	η_2	ϑ_2	ϑ_1
Obwersja . . .	a b′	ε_2	ζ_2	ε_1	ζ_1	δ_2	γ_2	δ_1	γ_1	β_1	α_1	β_2	α_2	η_1	ϑ_1	η_2	ϑ_2
Konwersja . . .	b a	α_1	α_2	γ_1	γ_2	β_1	β_2	δ_1	δ_2	ε_1	ε_2	η_1	η_2	ζ_1	ζ_2	ϑ_1	ϑ_2
Obwersja konwersji	b a′	ε_2	ζ_2	δ_2	γ_2	ε_1	ζ_1	δ_1	γ_1	β_1	α_1	η_1	ϑ_1	β_2	α_2	η_2	ϑ_2
Kontropozycja częściowa	b′ a	ε_2	η_2	ε_1	η_1	δ_2	β_2	δ_1	β_1	γ_1	α_1	γ_2	α_2	ζ_1	ϑ_1	ζ_2	ϑ_1
Kontropozycja zupełna	b′ a′	α_1	ϑ_1	β_1	η_1	γ_1	ζ_1	δ_1	ε_1	δ_2	ε_2	γ_2	ζ_2	β_2	η_2	α_2	ϑ_2
Inwersja częściowa	a′ b	ε_2	η_2	δ_2	β_2	ε_1	η_1	δ_1	β_1	γ_1	α_1	ζ_1	ϑ_1	γ_2	α_2	ζ_2	ϑ_2
Inwersja zupełna	a′ b′	α_1	ϑ_1	γ_1	ζ_1	β_1	η_1	δ_1	ε_1	δ_2	ε_2	β_1	η_2	γ_2	ζ_2	α_2	ϑ_2

Twierdzenie V.

Każde przekształcenie dowolnego zdania zakresowego zdefiniowanego jako alternatywa zdań $D\alpha$ —$D\vartheta$ wynika z aksjomatów A_1 i A_2.

Dowód:

Z definicji $D\alpha$ — $D\vartheta$ oraz $D\alpha_1$ -- $D\vartheta_2$ wynikają równoważności. które zapiszemy skrótowo:

$EMabAM_1abM_2ab$ gdzie M jest bądź kształtu α, bądź β, bądź γ, bądź β, bądź ε, bądź ζ, bądź η, bądź ϑ.

(Wynika np. równoważność $E\gamma abA\gamma_1 ab\gamma_2 ab$).

Z tych równoważności, z tez zawartych w poprzedzającej tabeli oraz z tez rachunku zdaniowego wynika nasze twierdzenie.

§ 10. Twierdzenie VI.

System S_1 po dołączeniu aksjomatu

A_8 $CKNexmb'\ exam\ exab$

oraz defnicji D_1—D_8 zawiera w sobie systemy S i Sl.

Zwróćmy przede wszystkim uwagę, że wyrażenie A_3 spełnia zarówno matryce I i III, jak też matryce II i III.

Dowód twierdzenia VI.

$CEeAAKKpNqNrKKpNqrAKKNpNqrKKNpNqNrEeNq$ e/U_2ab, $p/exab$, $q/exab'$, $r/exa'b$ * CD_1 (Dz $D\alpha$ $\alpha ab/KKexabNexab'Nexa'b$, $D\beta$ $\beta ab/KKexab Nexab'exa'b$, $D\eta$ $\eta ab/KKNexabNexab'exa'b$, $D\vartheta$ $\vartheta ab/KKNexabNexab' Nexa'b$) — T_{12}

T_{12} $EU_2ab\ Nexab'$

Zupełnie analogiczne dowody siedmiu następujących tez pomijamy.

T_{13} $EI_2abexab$

T_{14} $EO_2abexab'$

T_{15} $EY_2abNexab$

T_{16} $EU_3abKexabNexab'$

T_{17} $EI_3abexab$

T_{18} $EO_3abANexabexab'$

T_{19} $EY_3abNexab$

$CEpNqCErqErNp\ p/U_2ab,\ q/exab',\ r/O_2ab\ *\ CT_{12}—CT_{14}—T_{20}$

T_{20} EO_2abNU_2ab (DS_1)

Analogiczne dowody trzech poniższych tez pomijamy.

T_{21} EY_2abNI_2ab (DS_2)

T_{22} EO_3abNU_3ab $(DSł_1)$

T_{23} EY_3abNI_3ab $(DSł_2)$

$T_{13}\ Dz\ T_2\ exab/exba,\ T_{13}\ exba/I_2ba\ *\ T_{24}$

T_{24} EI_2abI_2ba (AS_1 w postaci równoważności)

$CEpqCErKqNsCrp\ p/I_3ab,\ q/exab,\ r/U_3ab,\ s/exab'\ *\ CT_{17}—CT_{16}—T_{25}$

T_{25} CU_3abI_3ab $(ASł_1)$

$T_{17}\ Dz\ T_2\ exab/exba,\ T_{17}\ exba/I_3ba\ *\ T_{26}$

T_{26} EI_3abI_3ba ($ASł_2$ w postaci równoważności)

$CCKNpqrCKNpNrNq\ p/exmb'\ q/exab'\ r/exam'\ *\ CA_3\ (b/m',\ m/b',$ $Dz\ T_3\ exb'm''/exb'm,\ T_2\ exb'm/exmb')\ —\ T_{27}$

T_{27} $CKNexmb'NexamNexab'$

$CCKNpqrCKKsNpqr\ p/exmb',\ q/exam,\ r/exab,\ s/exmb\ *\ CA_3—T_{28}$

T_{28} $CKKexmbNexmb'examexab$

$CCKKpNqrsCKKpNqNsNr\ p/exam,\ q/exam',\ r/exab',\ s/exb'm\ *\ CT_{28}$ $(a/b',\ b/m,\ m/a\ —\ Dz\ T_2\ exb'a/exab')\ —\ T_{29}$

T_{29} $CKKexamNexam'Nexb'mNexab'$

$CCKKpNqrsCCKKrNtNqNuCKKpNqKrNtKsNu\ p/exmb,\ q/exmb',$ $r/exam,\ s/exab,\ t/exam',\ u/exab'\ *\ CT_{28}—CT_{29}\ (Dz\ T_2\ exb'm/exmb')\ —T_{30}$

T_{30} $CKKexmbNexmb'KexamNexam'KexabNexab'$

$T_{27}\ Dz\ T_{12}\ Nexmb'/U_2mb,\ Nexam'/U_2am,\ Nexab'/U_2ab\ *\ T_{31}$

T_{31} $CKU_2mbU_2amU_2ab$ (AS_2)

$A_3\ Dz\ T_{12}\ Nexmb'/U_2mb,\ T_{13}\ exam/I_2am,\ exab/I_2ab\ *\ T_{32}$

T_{32} $CK\,U_2mb\ I_2am\ I_2ab$ (AS_3)

T_{30} $Dz\ T_{16}\ KexmbNexmb'/U_3mb, KexamNexam'/U_3am, Kexabexab'/U_3ab * T_{33}$

T_{33} $CK\,U_3mb\,U_3amU_3ab$ $(ASł_3)$

T_{28} $Dz\ T_{16}\ KexmbNexmb'/U_3mb,\ T_{17}\ exam/I_3am,\ exab/I_3ab * T_{34}$

T_{34} $CK\,U_3mb\,I_3am\,I_3ab$ $(ASł_4)$

Wykazaliśmy więc, że z aksjomatów A_1, A_2 i A_3 wynikają tezy T_{24}, T_{31}, T_{32}, T_{20}, T_{21} oraz T_{25}, T_{26}, T_{33}, T_{34}, T_{22}, T_{23}, a więc wszystkie zdania będące aksjomatami bądź definicjami systemów S i $Sł$. Stąd wynika prawdziwość twierdzenia VI.

§ 11. Jak zostało powiedziane w § 3 wyrażenie

I $exab$

czytamy: część wspólna zakresów a i b nie jest pusta. Na gruncie ontologii wyrażenie to zdefiniować możemy w sposób następujący:

DO_4 $\Pi a \Pi b\ Eexab\Sigma xKestxaestxb$

prawa strona tej definicji jest równokształtna z prawą stroną definicji DO_3, co wynika również z tez T_{13} i T_{17} wskazuje na to, że wyrażenie I identyfikować można z pewnym rozumieniem sądu szczegółowo twierdzącego.

Wyrażenie zaś

II a'

zdefiniować w ontologii możemy

DO_5 $\Pi x \Pi a Eestxa'KestxxNestxa$

Przy takich definicjach tezami ontologii będą wyrażenia

TO_2 $\Pi a \Pi bEK\Sigma xestxa\Pi xCestxa\ estxbKexab\ Nexab'$

TO_3 $\Pi a \Pi bE\Sigma xKestxaestxb\,exab$

które wraz tezami T_{16}—T_{19} i definicjami $DSł_1$, $DSł_2$ uzasadniają nam poprawność definicji D_6—D_8.

Zauważmy, że wyrażenia A_1, A_2 i A_3 po dołączeniu kwantyfikatorów dużych, obejmujących wszystkie zmienne w nich występujące przed znakiem C stają się na mocy definicji DO_4 i DO_5 tezami ontologii. Wynika stąd niesprzeczność systemu S_1. Niezależność zaś aksjomatów A_1, A_2, A_3 łatwo daje się udowodnić przez interpretację w arytmetyce liczb naturalnych.

Zauważmy dalej, że aksjomatyka systemu S_1 nie jest zupełna, wyrażenia bowiem

III $Nexaa'$

IV $Cexamexaa$

które zaliczylibyśmy do wyrażeń prawdziwych, nie wynikają z aksjomatów systemu S_1.

§ 12. Twierdzenie VII.

System określony przy pomocy aksjomatów A_1, A_2, A_3 oraz dwóch dodatkowych aksjomatów

A_4 $Nexaa'$

A_5 $Aexabexab'$

przy przyjęciu dyrektyw odrywania i podstawiania za zmienne zdaniowe tak samo określonych jak w systemie S_1, dyrektywy zaś podstawiania za zmienne nazwowe ograniczonej do nazw niepustych i niepowszechnych, zawiera w sobie system Ł, przy czym przyjmujemy definicję $D\alpha_1 - D\vartheta_2$, zdania zaś elementarne systemu Ł definiujemy następująco:

DA_{21} $EU_1ab\ [\alpha_1, \beta_1,]\ ab$

DA_{22} $EI_1ab\ [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \delta_2,]\ ab$

DA_{23} $EO_1ab\ [\gamma_1, \delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2,]\ ab$

DA_{24} $EY_1ab\ [\varepsilon_1, \varepsilon_2]\ ab$

Zanim podamy dowód twierdzenia VII, musimy się zająć omówieniem systemu, którego ono dotyczy (system ten nazywać będziemy systemem S_2).

Zauważmy przede wszystkim, że wszystkie tezy systemu S_1 wchodzą w skład systemu S_2. (Będziemy się też w dalszym ciągu powoływali na tezy systemu S_1)!

Zauważmy dalej, że twierdzenie analogiczne do twierdzenia I dla systemu S_2 nie zachodzi, wyrażenie bowiem A_5 nie spełnia ani matryc I i III, ani matryc II i III. Wyrażenie A_5 jest wyrażeniem egzystencjalnym, wymaga ono do swej prawdziwości założenia, że każda nazwa oznacza jakiś przedmiot, oraz, co za tym idzie, że istnieje przynajmniej jeden przedmiot. Wyrażenie zaś A_4, choć nie jest wyrażeniem egzystencjalnym, jednak łącznie z A_5 wymaga nieistnienia nazwy powszechnej oraz istnienia co najmniej dwu przedmiotów.

$CEeKKpNqKNrNsCArsNe$ e/α_2ab, $p/exab$, $q/exab'$ $r/exa'b$, $s/exa'b'$

$* CD\alpha_2 - CA_5\ (a/a') - T_{35}$

T_{35} $N\alpha_2ab$

Podobnie dochodzimy do tezy

T_{36} $KN\alpha_2abKN\beta_2abKN\gamma_2abKN\zeta_1abKN\zeta_2abKN\eta_1abKN\eta_2ab$
$KN\vartheta_1abKN\vartheta_2ab$

Teza T_{36} wykazuje nam, że z 16 stosunków zakresowych pozostało nam tylko 7, 8 stosunków odpadło nam, gdyż, zgodnie z założeniem zawartym w aksjomacie A_5 nie istnieją nazwy pusta i powszechna, stosunek zaś odpowiadający zdaniu ϑ_2ab odpadł na skutek założenia istnienia przedmiotu. Pozostałe stosunki mają swoje odpowiedniki w pięciu stosunkach tradycyjnych, według przyjętych w § 3 oznaczeń możemy zapisać skrótowo

$EMabM_1ab$ gdzie M jest kształtu α, β lub γ.

$ELabAL_1abL_2ab$ gdzie L jest kształtu δ lub ε.

Powyższych pięciu równoważności zapisanych skrótowo nie możemy bliżej uzasadnić, gdyż nie posiadamy w logice tradycyjnej ścisłych definicji poszczególnych stosunków zakresowych, wydają się one jednak najzupełniej intuicyjne.

Zauważmy jeszcze, że zdania zdefiniowane w definicjach $D\alpha_1$, $D\beta_1$, $D\gamma_1$, $D\delta_1$, $D\delta_2$, $D\varepsilon_1$, $D\varepsilon_2$ stanowią grupę ze względu na wszystkie przekształcenia.

$CEpAqrCEqKKsNtKNuvCErKKsNtKuvCAstCAtvEpNt$ p/U_1ab, q/α_1ab r/β_1ab, $s/exab$, $t/exab'$ $u/exa'b$, $v/exa'b'$ * $CDA_{21}-CD\alpha_1-CD\beta_1-CA_5$ $-CA_5$ $(a/b', b/a,$ Dz T_2 $exb'a/exab', exb'a'/ exa'b') - T_{37}$

T_{37} $EU_1abNexab'$

Analogiczne dowody trzech pozostałych tez pominiemy.

T_{38} $EI_1abexab$

T_{39} $EO_1abexab'$

T_{40} $EY_1abNexab$

Obecnie podamy:

Dowód twierdzenia VII.

$CEpNqCNqp$ p/U_1aa, $q/exaa'$, * $CT_{37}(b/a) - CA_4 = T_{41}$

T_{41} U_1aa $(A\text{Ł}_1)$

$CEpqCAqrCNrp$ p/I_1aa, $q/exaa$, $r/exaa'$ * $CT_{38}(b/a) - CA_5(b/a) - CA_4 - T_{42}$

T_{42} I_1aa $(A\text{Ł}_2)$

A_3 Dz T_2 $exam/exma$, T_{37} $Nexmb'/U_1mb$, T_{38} $exma/I_1ma$ $exab/I_1ab$ $- T_{43}$

T_{43} $CKU_1mbI_1maI_1ab$ $(A\text{Ł}_4)$

T_{27} Dz T_{37} $Nexmb'/U_1mb$, $Nexam'/U_1am$, $Nexab'/U_1ab$ * T_{44}

T_{44} $CKU_1mbU_1amU_1ab$ $(A\text{Ł}_3)$

Dowód dwóch poniższych tez jest analogiczny do dowodu tezy T_{20}

T_{45} EO_1abNU_1ab $(D\text{Ł}_2)$

T_{46} EY_1abNI_1ab $(D\text{Ł}_1)$

Otrzymaliśmy tezy T_{41}—T_{46}, które stanowią aksjomaty i definicje systemu Ł, a więc dowód twierdzenia VII został przeprowadzony.

ODNOŚNIKI

1) Niniejsza praca pozostaje w ścisłym związku z pracą p. prof. J. Słupeckiego pt. „Uwagi o sylogistyce Arystotelesa" umieszczoną w niniejszym Roczniku. Poczuwam się również do miłego obowiązku podziękować p. prof. J. Słupeckiemu za wiele cennych rad, których mi udzielił w związku z niniejszą pracą.

2) Symbolika ta jest wyłożona w następujących pracach p. prof. J. Łukasiewicza.

Elementy logiki matematycznej — skrypt autoryzowany — Warszawa 1929.

Znaczenie analizy logicznej dla poznania — Przegląd Filozof. Rocznik 37.

3) System ten jest wyłożony w następujących pracach p. prof. J. Łukasiewicza.

Elementy logiki matematycznej — cytowane pod 2).

O sylogistyce Arystotelesa — spraw. z czyn. i pos. PAU, tom XLIV, czerwiec 1939.

Tak ograniczoną dyrektywę wprowadza również p. prof. K. Ajdukiewicz w pracy: Założenia logiki tradycyjnej — Przegl. Filoz. Rocznik 29. Zeszyt III—IV. Systemu p. prof. K. Ajdukiewicza w niniejszej pracy nie omawiamy, ograniczając się tylko do systemów bezkwantyfikatorowych.

4) P. prof. J. Łukasiewicz oznacza funktor główny zdania ogólno-twierdzącego przez U, szczegółowo-twierdzącego przez I, szczegółowo-przeczącego przez O, zaś ogólno-przeczącego przez Y. Aby zachować tę symbolikę oznaczam w niniejszej pracy funktory główne odpowiednich zdań w różnych systemach tymi samymi literami z odpowiednimi wskaźnikami liczbowymi.

5) W pracach:

J. Sleszyński — O logice tradycyjnej — Kraków — 1924.

Teoria dowodu — podług wykładów uniwersyteckich prof. dra Jana Sleszyńskiego opracował S. K. Zaremba — Tom I — Kraków 1925.

6) W pracy:

K. Ajdukiewicz — Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej — Skrypt autoryzowany — Warszawa 1928.

7) W pracy:

J. Słupecki — Uwagi o sylogistyce Arystotelesa — w niniejszym Roczniku.

8) W oryginalnej symbolice ontologii używany jest symbol „ε" ponieważ jednak w pracy tej symbol ten oznacza już inny funktor, używam za p. prof. T. Kotarbińskim (Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk) symbolu *„est"*.

9) P. Prof. J. Słupecki kilkakrotnie sam zwrócił mi uwagę na tę kwestię. P. prof. J. Słupecki czyta zdanie O_3ab „nie wszystkie a są b", przypuszczam, że ze względu na to, że przy prawdziwości tego zdania wykluczone są tylko stosunki zamienności i podrzędności, bardziej odpowiada definicji czytanie „co najwyżej niektóre a są b", zatraca się tu jednak sens intuicyjny zdania szczegółowo-przeczące.

10) Rozróżnienie to przeprowadzam za p. prof. T. Kotarbińskim — Elementy teorii poznania, logiki i metodologii nauk — str. 209 i in.

11) Inaczej można powiedzieć — wtedy i tylko wtedy gdy przekształcenie P odwzorowuje klasę G na samej sobie.

12) Należałoby właściwie powiedzieć: tezy opisującej takie przekształcenie.

RÉSUMÉ

Cet article présente une analyse de la signification des jugements simples qui paraissent dans les différents systèmes de la syllogistique. La méthode de cette analyse est celle du prof. J. Sleszyński. D'après elle chaque jugement simple de la syllogistique peut-être défini comme une alternative des jugements dont chacun exprime un rapport simple entre les dénotations des arguments.

En utilisant cette méthode on s'occupe de trois systèmes des:

1. Prof. J. Łukasiewicz (§ 2, les axiomes $AL_1 - AL_4$), Dans ce système on ne peut substituer pour les variables que les noms qui na sont pas vides.
2. Prof. J. Sleszyński (§ 3, les axiomes $AS_1 - AS_8$).
3. Prof. J. Słupecki (§ 4, les axiomes $ASł_1 - ASł_4$).

Dans la suite on trouve les demonstrations des théorèmes dont les plus importants sont:

Théorème V. § 9.

Chaque loi de raisonnement direct d'un jugement simple défini d'après la méthode du prof. J. Sleszyński est une conséquence des axiomes A_1, A_2 (§ 7).

Théorème VI. § 10.

Les axiomes du prof. J. Sleszyński et du prof. J. Słupecki sont une conséquence des axiomes A_1, A_2 et A_3 (§ 10) et des définitions d'après la méthode du prof. J. Sleszyński.

Théorème VII. § 12.

Les axiomes du prof. J. Łukasiewicz sont une conséquence des axiomes A_1, A_2, A_3 et A_4, A_5 (§ 12) et des définitions d'après la méthode du prof. J. Sleszyński.

La symbolique employée ici est une symbolique spaciale de prof. Łukasiewicz — symbolique sans parenthèse.