Lilla Wojtyga

Kłopoty z interpretacją logiki trójwartościowej Łukawiewicza jako logiki indeterminizmu

Nowa Krytyka 3, 89-100

1992

NOWA KRYTYKA 3 Rok 1992

Lilla Wojtyga

Kłopoty z interpretacją logiki trójwartościowej Łukasiewicza jako logiki indeterminizmu

Celem artykułu jest przedstawienie problemów dotyczących zagadnień logiki wielowartościowej, a w szczególności dotychczasowych prób interpretacji trójwartościowej logiki Łukasiewicza jako logiki indeterminizmu, które zdaniem autora, nie są jednak zadowalające. Artykuł składa się z trzech części: krótkiego przedstawienia trójwartościowej logiki Łukasiewicza, omówienia metody Słupeckiego i interpretacji semantyki Kripkego dla logik Łukasiewicza.

Pierwszą informację o logice trójwartościowej zawiera odczyt pożegnalny, wygłoszony przez Łukasiewicza 7 marca 1918 roku w Auli Uniwersytetu Warszawskiego. Stwierdza on tam, że oprócz zdań prawdziwych i fałszywych istnieją zdania możliwe, którym odpowiada obiektywna możliwość, jako coś trzeciego obok bytu i niebytu. "Ta nowa logika, wprowadzając obiektywną możliwość, łamie dotychczasowe koncepcje naukowe, oparte na konieczności. Zjawiska możliwe nie mają przyczyn, choć same mogą być początkiem szeregu przyczynowego"[1]. Widzimy więc, że trójwartościowość u Łukasiewicza wiąże się nierozerwalnie z problematyką determini-

[1] J. Łukasiewicz: *Treść wykładu pożegnalnego wygłoszonego w auli Uniwersytetu Warszawskiego 7 marca 1918*. Warszawa 1918, s. 2.

zmu. Najobszerniejsze omówienie sensu intuicyjnego trzeciej wartości logicznej można znaleźć właśnie w artykule "O determiniźmie"[2]. Przez determinizm Łukasiewicz rozumiał pogląd, który głosi, "że jeśli A jest b w chwili t, to prawdą jest w każdej chwili wcześniejszej od t, że A jest b w chwili t". Mówiąc inaczej, dla deterministy wszelka prawda jest wieczna i odwieczna, a więc co raz było prawdą, pozostanie prawdą na zawsze, oraz wszystko co się kiedyś stanie i kiedyś będzie prawdą, jest już dziś prawdą i będzie nią od wieków. Łukasiewicz, który był zwolennikiem indeterminizmu, nie mógł się z takim poglądem oczywiście pogodzić. Jego zdaniem, argument przytaczany w obronie determinizmu opiera się na zasadzie przyczynowości, która głosi, że każde zdarzenie posiada jako swoją przyczynę inne zdarzenie mające miejsce w chwili wcześniejszej. Wywodzi się stąd wniosek, że w poszukiwaniu pierwszych przyczyn danego zdarzenia możemy cofnąć się w czasie dowolnie daleko. Jako kontrprzykład Łukasiewicz podaje następującą konstrukcję. Weźmy przedział czasowy 1 i załóżmy, że chwili teraźniejszej odpowiada punkt 0, a pewne zdarzenie dzieje się w chwili 1, zaś przyczyny tego faktu dzieją się w chwilach, którym odpowiadają liczby rzeczywiste większe od $\frac{1}{2}$. Wtedy ciąg przyczyn jest nieskończony i początku, czyli pierwszej przyczyny, nie posiada, gdyż odcinek $(\frac{1}{2}, 1)$ jest otwarty z dołu. Konstrukcja ta pokazuje, że uznanie zasady przyczynowości, zgodnie z którą każdy fakt ma swoją przyczynę w jakimś fakcie wcześniejszym, nie usprawiedliwia wcale wniosku o nieuchronności dowolnie daleko rozciągającego się wstecz w czasie łańcucha przyczyn i skutków, ze względu na możliwość istnienia granicy. Pewne zdarzenia nie są z konieczności wyznaczone przez obecny stan świata, pomimo że istnieje związek przyczynowy, ponieważ pewne zdarzenia przyszłe mogą mieć swoje przyczyny, które nie dosięgają chwili obecnej.

– Jeśli istnieją w chwili obecnej przyczyny jakiegoś przyszłego zdarzenia to winniśmy uznać, że zdanie stwierdzające, iż to zdarzenie zaistnieje jest prawdziwe (posiada logiczną wartość 1).

– Jeśli istnieją w chwili obecnej przyczyny jakiegoś przyszłego zdarzenia to winniśmy uznać, że zdanie stwierdzające, iż to zdarzenie nie zaistnieje jest fałszywe (posiada logiczną wartość 0).

– Jeśli natomiast w chwili obecnej nie istnieją przyczyny jakiegoś przyszłego zdarzenia to nie możemy uznać za prawdziwe ani zda-

[2] J. Łukasiewicz: *O determiniźmie*, [w:] *Z zagadnień logiki i filozofii, Pisma wybrane*. PWN, Warszawa 1960.

nia stwierdzającego, że to zdarzenie zajdzie, ani jego zaprzeczenia, stwierdzającego że to zdarzenie nie zajdzie. Interpretujemy zdanie to jako możliwe, bądź niezdeterminowane (i przypisujemy mu wartość logiczną $\frac{1}{2}$).

Kierując się tymi intuicjami Łukasiewicz stworzył system logiki i trójwartościowej[3], definiując znaczenie spójników implikacji ($\rightarrow$) i negacji ($\neg$) za pomocą tabelek:

p	$\neg p$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

(1.1)

Pozostałe spójniki - alternatywę, koniunkcję i równoważność - wprowadził Łukasiewicz poprzez następujące definicje:

$$\begin{aligned} p \vee q &= (p \rightarrow q) \rightarrow q, \\ p \wedge q &= \neg(\neg p \vee \neg q), \\ p \Leftrightarrow q &= (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ich tabelki mają postać:

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\Leftrightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

(1.3)

Cechą charakterystyczną logiki Łukasiewicza jest fakt, że pewne ważne prawa logiki klasycznej nie są tautologiami logiki trójwartościowej, np. prawo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$, czy też zasada sprzeczności: $\neg(p \wedge \neg p)$, jak również niektóre klasycznie sprzeczne formuły są w jego logice niesprzeczne, jak np. $p \Leftrightarrow \neg p$.

[3] J. Łukasiewicz: *O logice trójwartościowej*, [w:] "Ruch Filozoficzny" t. V, 1920.

2. Trudności z interpretacją J. Słupeckiego

2.1. Metoda Słupeckiego interpretacji logiki Łukasiewicza

Próbę intuicyjnej interpretacji logiki Łukasiewicza podjął J. Słupecki[4], opierając się na pewnej konstrukcji formalizującej idee Łukasiewicza dotyczące determinizmu i indeterminizmu. Konstrukcja ta wydaje się dosyć dokładnie oddawać intencje Łukasiewicza, a poza tym czyni to w sposób bardzo intuicyjny. Słupecki rozważa zbiór zdarzeń dzielących się na zdarzenia minione, zdarzenia z chwili obecnej oraz zdarzenia przyszłe. (Zdarzenia minione i z chwili obecnej oznaczamy za pomocą g, g_1, g_2, a dowolne zdarzenie przez f, f_1, f_2. Przyjmuje on dalej, że zbiór zdarzeń Z tworzy algebrę Boole'a $Z = (Z, \cup, \cap, -)$, a więc dla każdych dwóch zdarzeń f i f_1 istnieją zdarzenia będące ich sumą $f \cup f_1$ i iloczynem $f \cap f_1$, oraz że dla każdego zdarzenia f istnieje zdarzenie przeciwne $-f$ (tzn. zdarzenie, którego realizacja jest równoważna niezachodzeniu danego zdarzenia), zupełnie tak samo jak w rachunku prawdopodobieństwa. Następnie określa na Z relację przyczynowości:

$$\rightarrow \subset Z \times Z \tag{2.1}$$

Wyrażenie $f \rightarrow f_1$ czytamy: "zdarzenie f jest przyczyną zdarzenia f_1". O relacji tej Słupecki założył, że posiada następujące własności:

$$(f \rightarrow f_1 \cup f_2) \equiv (f \rightarrow f_1) \text{ lub } (f \rightarrow f_2), \tag{2.2}$$

$$(f \rightarrow f_1 \cap f_2) \equiv (f \rightarrow f_1) \text{ i } (f \rightarrow f_2), \tag{2.3}$$

$$\exists (f \rightarrow f_1) \Rightarrow \sim \underset{f}{\exists} (f \rightarrow -f_1) \tag{2.4}$$

$$(f_1 \rightarrow f) \Rightarrow (f_1 \cap f_2 \rightarrow f). \tag{2.5}$$

Własność (2.4) stanowi, że posiadanie przyczyny przez jakieś zdarzenie wyklucza istnienie przyczyny zdarzenia przeciwnego, a własność (2.5), że jeśli pewne zdarzenie f_1 jest przyczyną zdarzenia f, to żadne inne zdarzenie f_2 nie może tego faktu zmienić - związek przyczynowo-skutkowy jest "konieczny". Własności te wydają się być naturalne i zgodne z codzienną intuicją. Poza zdarzeniami Słupecki rozważa zbiór zdań o zdarzeniach **P** wraz z relacją:

---

[4] J. Słupecki: *Próba intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza,* [w:] *Rozprawy logiczne.* PWN, Warszawa 1964.

$$* \subset P \times Z \tag{2.6}$$

Zapis $p * f$, gdzie $p \in P$ a $f \in Z$ czyta się następująco: "zdanie p opisuje zdarzenie f". O tej relacji zakłada się, że spełnia (naturalne) warunki:

$$\forall_p \exists_f (p * f), \tag{2.7}$$

$$(p * f) \wedge (p_1 * f_1) \Rightarrow (p \wedge p_1) * (f \cap f_1), \tag{2.8}$$

$$(p * f) \wedge (p_1 * f_1) \Rightarrow (p \vee p_1) * (f \cup f_1), \tag{2.9}$$

$$(p * f) \Rightarrow (\neg p * -f). \tag{2.10}$$

Słupecki definiuje dwie własności (predykaty jednoargumentowe) przysługujące zdarzeniom:

$$D(f) = \exists_g (g \rightarrow f), \tag{2.11}$$

$$\overline{D}(f) = \sim D(f) \text{ i } \sim D(-f). \tag{2.12}$$

Pierwszą czyta się: "zdarzenie f jest zdeterminowane" (tzn. że w chwili obecnej znana jest (istnieje) jego przyczyna), drugą: "zdarzenie f jest niezdeterminowane" (tzn. ani zdarzenie f, ani -f (zdarzenie przeciwne) nie są zdeterminowane). Na podstawie tego podziału Słupecki wprowadza trzy własności przysługujące zdaniom o zdarzeniach - $1(p)$, $\frac{1}{2}(p)$, $0(p)$ - za pomocą definicji:

$$(p * f) \Rightarrow [1(p) \equiv D(f)] \tag{2.13}$$

$$(p * f) \Rightarrow [\tfrac{1}{2}(p) \equiv \overline{D}(f)] \tag{2.14}$$

$$(p * f) \Rightarrow [0(p) \equiv D(-f)] \tag{2.15}$$

Jak można się łatwo przekonać, każde zdanie o zdarzeniach może mieć dokładnie jedną spośród tych trzech własności, czyli dzielą one zbiór zdań na trzy rozłączne klasy. Już sposób zapisywania tych własności sugeruje, że mają one związek z wartościami logicznymi zdań o zdarzeniach. O tym, że jest tak w istocie możemy się przekonać tworząc tabelki działań dla alternatywy, koniunkcji i negacji. Są one zgodne z tabelkami Łukasiewicza.

2.2. Trudności interpretacyjne

Pewną trudność w przedstawionej interpretacji stanowi kwestia implikacji, której nie można zdefiniować ani w sposób tak naturalny jak alternatywy, koniunkcji i negacji, ani poprzez nie wyrazić. Słupecki pokonuje ten problem definiując spójniki modalne konieczności i możliwości, za pomocą których można już wyrazić implikację, choć jest to zupełnie nieintuicyjne.

Prawdziwą trudność, jeżeli chodzi o tę interpretację, stanowi wynik do jakiego doszedł M. Nowak w swojej pracy poświęconej metodzie Słupeckiego[5]. Mianowicie wykazał on, że założenie Słupeckiego, mówiące że zdarzenia tworzą algebrę Boole'a, prowadzi do wewnętrznych sprzeczności w założeniach tej interpretacji. Interpretacja ta jest formalnie niesprzeczna jeżeli zdarzenia tworzyć będą kratę De Morgana z jedynką (algebrę quasi-Boole'owską)[6]. W celu przedyskutowania tego wyniku przypomnimy tu krótko powyższe pojęcia. Kratą jest taka struktura algebraiczna $K = (K, \cup, \cap)$, w której działania $\cup$ i $\cap$ spełniają związki:

$$
\begin{array}{ll}
a \cup b = b \cup a, & (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c), \\
a \cap b = b \cap a, & (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c), \\
a \cup a = a, & a \cap a = a, \\
a \cup (a \cap b) = a, & a \cap (a \cup b) = a.
\end{array}
\tag{2.16}
$$

Gdy wprowadzimy relację porządku przez: $a \le b \equiv a \cup b = b$, to krata staje się zbiorem (częściowo) uporządkowanym, w którym dla dowolnych dwóch elementów **a** i **b** istnieje najmniejsze ograniczenie górne i największe ograniczenie dolne: $a \cup b = \sup(a, b)$, $a \cap b = \inf(a, b)$ i alternatywnie jest czasami tak definiowana. Kratę nazywamy dystrybutywną, jeżeli działania $\cup$ i $\cap$ są rozdzielne względem siebie:

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \tag{2.17}$$

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \tag{2.18}$$

[5] M. Nowak: *O możliwości interpretowania trójwartościowej logiki Łukasiewicza metodą J. Słupeckiego*, [w:] "Folia Philosophica". Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łodź 1988.

[6] H. Rasiowa: *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. Warszawa 1974, s. 44-48.

Krata dystrybutywna jest kratą De Morgana jeżeli można w niej określić działanie jednoargumentowe oznaczane przez - takie, że spełnione są warunki:

$$- - a = a, \tag{2.19}$$

$$- (a \cup b) = -a \cap -b. \tag{2.20}$$

Równość $- (a \cap b) = -a \cup -b$ jest wnioskiem z powyższych własności). Krata De Morgana jest więc strukturą $M = (M, \cup, \cap, -)$. Jeżeli krata zawiera taki element (oznaczany jako 1), że dla dowolnego elementu a spełnione są zależności: $a \cup 1 = 1$ oraz $a \cap 1 = a$ to nazywa się kratą z jedynką. W kracie De Morgana z jedynką istnieje element $0 = -1$ taki, że spełnione są zależności: $a \cup 0 = a$ i $a \cap 0 = 0$. Element ten nazywamy zerem kraty. Jeżeli w kracie De Morgana z jedynką spełnione są warunki:

$$a \cup -a = 1, \qquad a \cap -a = 0, \tag{2.21}$$

to nazywamy ją algebrę Boole'a. Element -a nazywamy wtedy uzupełnieniem elementu a. Dobrze znanymi przykładami algebr Boole'a są np. zbiór wszystkich podzbiorów pewnego danego zbioru X (jedynką jest X a zerem jest zbiór pusty $\varnothing$) czy też dwulementowa algebra Boole'a $B = (\{0, 1\}, \cup, \cap, -)$ wartości logicznych logiki klasycznej (gdzie $\cup$ oznacza alternatywę, $\cap$ koniunkcję, a - negację). Jeżeli zdarzenia tworzą kratę De Morgana, lecz nie tworzą algebry Boole'a to ze względu na to, że na ogół nie zachodzi związek $f \cap -f = 0$, zdarzenia f i -f nie wykluczają się wzajemnie. Niezachodzenie związku $f \cup -f = 1$ powoduje, że suma tych zdarzeń nie jest zdarzeniem pewnym. Nie możemy więc traktować zdarzenia -f jako przeciwnego do zdarzenia f, zgodnie z naszą intuicją. Z pewnością taki sposób traktowania zdarzeń nie odpowiada intencji Łukasiewicza. Nie wiązał on bowiem trzeciej wartości logicznej z nieboolowskością zdarzeń, lecz z ich niezdeterminowaniem. Nie oznacza to, że konstrukcja ta jest pozbawiona wartości, ale z pewnością nie jest ona formalizacją idei Łukasiewicza trójwartościowości w logice jako odzwierciedlenia indeterminizmu, wbrew intencjom jej autora.

3. Trudności z interpretacją semantyki typu Kripkego

3.1. Semantyka Kripkego dla logiki Łukasiewicza

Trudności związane z intuicyjną interpretacją wielowartościowych logik Łukasiewicza ilustruje również opracowana przez A. Urquharta (1974) semantyka typu Kripkego dla tych logik[7]. Semantyka ta oparta jest na strukturze Kripkego, stanowiącej uporządkowaną trójkę:

$$K = (U, \leq, \vdash), \tag{3.1}$$

gdzie U jest pewnym zbiorem zwanym uniwersum struktury, jest relacją (częściowego) porządku w U a | jest relacją określoną między elementami uniwersum U struktury i zbiorem formuł atomowych F pewnego języka:

$$\vdash \subset U \times F. \tag{3.2}$$

Na relację $x \vdash p$, nazywaną wymuszaniem (ang. *forcing*) formuły p przez $x \in U$, nakładany jest podstawowy warunek[8]:

$$x \vdash p \ \text{i} \ x \leq y \Rightarrow y \vdash p \tag{3.3}$$

dla dowolnych $x,y \in U$ i $p \in F$. Jeżeli w języku występują spójniki pozwalające tworzyć formuły złożone z formuł atomowych, to reguły ustalające zależność relacji wymuszania dla formuły złożonej poprzez relacje wymuszania dla formuł składowych muszą zapewnić spełnienie warunku (3.3). Wartościowaniem formuł w metodzie Kripkego jest takie odwzorowanie

$$w : F \rightarrow 2^U, \tag{3.4}$$

że relacja $\vdash_F$ dana przez: $x \vdash_F p \equiv x \in w(p)$ spełnia warunek (3.3). Dla n-wartościowych logik Łukasiewicza $Ł_n$ strukturę Kripkego otrzymuje się poprzez przyjęcie jako uniwersum U (n-1)-elementowego podzbioru liczb naturalnych (oraz zera):

---

[7] G. Malinowski: *Logiki wielowartościowe*. PWN, Warszawa 1990.

[8] M. Fitting: *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*. North-Holland Publishing, Amsterdam 1977.

$$U = S_n = \{0, 1, \dots, n\text{-}2\}. \tag{3.5}$$

Relacja $\leq$ jest zwykłą relacją "nie większe" dla liczb. Dla formuł złożonych, zawierających spójniki negacji i implikacji, zakłada się następujące reguły wymuszania:

$$x \vdash (p \rightarrow q) \equiv \forall\, y \leq (n\text{-}2)\text{-}x:\ y \vdash p \Rightarrow x+y \vdash q \tag{3.6}$$

$$x \vdash \neg p \equiv (n\text{-}2)\text{-}x \nvdash p \tag{3.7}$$

Zilustrujemy tę metodę na przykładzie trójwartościowej logiki Łukasiewicza $Ł_3$, pokazując sposób otrzymania znanych tabelek dla negacji i implikacji. Dla trójwartościowej logiki Łukasiewicza uniwersum Kripkego jest dwuelementowe: $U = S_1 = \{0, 1\}$. Dla każdej formuły atomowej są możliwe *a priori* trzy schematy wymuszania, zgodne z warunkiem (3.3), ustalające trzy możliwe wartościowania tej formuły:

$$\begin{array}{lllll} 1. & 0 \nvdash p \text{ i } 1 \nvdash p & \equiv & w(p) = \varnothing & (0) \\ 2. & 0 \nvdash p \text{ i } 1 \vdash p & \equiv & w(p) = \{1\} & (\tfrac{1}{2}) \\ 3. & 0 \vdash p \text{ i } 1 \vdash p & \equiv & w(p) = \{0, 1\} & (1) \end{array} \tag{3.8}$$

Wyprzedzając nieco tok rozważań, oznaczyliśmy te wartościowania symbolami wartości formuł w logice Łukasiewicza, co jak się przekonamy później, jest usprawiedliwione zgodnością otrzymywanych tabelek dla implikacji i negacji z tabelkami Łukasiewicza. Aby bardziej unaocznić reguły (3.6, 3.7) wypiszemy je *explicite:*

$$0 \vdash (p \rightarrow q) \equiv (0 \vdash p \Rightarrow 0 \vdash q) \text{ i } (1 \vdash p \Rightarrow 1 \vdash q) \tag{3.9a}$$

$$1 \vdash (p \rightarrow q) \equiv (0 \vdash p \Rightarrow 1 \vdash q) \tag{3.9b}$$

$$0 \vdash \neg p \equiv 1 \nvdash p \tag{3.10a}$$

$$1 \vdash \neg p \equiv 0 \nvdash p \tag{3.10b}$$

Posługując się tymi zależnościami tworzymy tabelki pokazujące zależności wymuszania dla implikacji i negacji, w zależności od możliwych kombinacji schematów wymuszania (wartościowań) dla formuł atomowych:

$$
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{2}{c}{p} & \multicolumn{2}{c}{q} & \multicolumn{2}{c}{p \to q} \\
0 \nvdash p & 1 \nvdash p & 0 \nvdash q & 1 \nvdash q & 0 \vdash p \to q & 1 \vdash p \to q \\
0 \nvdash p & 1 \vdash p & 0 \nvdash q & 1 \nvdash q & 0 \nvdash p \to q & 1 \vdash p \to q \\
0 \vdash p & 1 \vdash p & 0 \nvdash q & 1 \nvdash q & 0 \nvdash p \to q & 1 \nvdash p \to q \\
0 \nvdash p & 1 \nvdash p & 0 \nvdash q & 1 \vdash q & 0 \vdash p \to q & 1 \vdash p \to q \\
0 \vdash p & 1 \vdash p & 0 \nvdash q & 1 \vdash q & 0 \vdash p \to q & 1 \vdash p \to q \\
0 \vdash p & 1 \vdash p & 0 \nvdash q & 1 \vdash q & 0 \nvdash p \to q & 1 \vdash p \to q \\
0 \nvdash p & 1 \nvdash p & 0 \vdash q & 1 \vdash q & 0 \vdash p \to q & 1 \vdash p \to q \\
0 \nvdash p & 1 \vdash p & 0 \vdash q & 1 \vdash q & 0 \vdash p \to q & 1 \vdash p \to q \\
0 \vdash p & 1 \vdash p & 0 \vdash q & 1 \vdash q & 0 \vdash p \to q & 1 \vdash p \to q
\end{array}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{2}{c}{p} & \multicolumn{2}{c}{\neg p} \\
0 \nvdash p & 1 \nvdash p & 0 \vdash \neg p & 1 \vdash \neg p \\
0 \nvdash p & 1 \vdash p & 0 \nvdash \neg p & 1 \vdash \neg p \\
0 \vdash p & 1 \vdash p & 0 \nvdash \neg p & 1 \nvdash \neg p
\end{array}
\tag{3.12}
$$

Zauważmy, że obliczone schematy wymuszania dla formuł złożonych spełniają warunek (3.3), czyli reguły (3.9ab, 3.10ab) czynią zadość minimalnemu wymaganiu. Otrzymane schematy wymuszania (czyli wartościowania) można ułożyć w formie tabelek działań na wartościach. Dla większej przejrzystości dogodnie jest przy tym oznaczać te wartościowania - zgodnie z wzorami (3.8) - symbolami 0, $\frac{1}{2}$ i 1. W otrzymanych tabelkach rozpoznać możemy znane tabelki Łukasiewicza dla implikacji i negacji. Dowodzi to, że przedstawiona semantyka w istocie opisuje trójwartościową logikę Łukasiewicza.

3.2. Dyskusja interpretacji

Semantyka typu Kripkego została wprowadzona dla logiki intuicjonistycznej i posiada bogatą i sugestywną motywację[9]. Motywację tę ilustruje się rozważając proces nabywania wiedzy przez wyidealizowanego matematyka w kolejnych stadiach. Zbiór tych stadiów

---

[9] *Logika formalna (Zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki)*, pod red. W. Marciszewskiego. PWN, Warszawa 1987.

U stanowi uniwersum struktury. Każdemu stadium $x \in U$ odpowiada zbiór formuł atomowych $E(x)$ zaakceptowanych w tym stadium. Częściowy, w ogólności, porządek w zbiorze U wyraża istnienie różnych dróg rozszerzania wiedzy. Podstawową relację: $x \vdash p \equiv p \in E(x)$, rozumie się jako: "formuła p jest zaakceptowana w stadium x". Warunek (3.3) nałożony na relację $\vdash$ wyraża przekonanie, że raz zdobytej wiedzy się nie traci. Powstaje pytanie, czy dla semantyki Kripkego opisującej logikę trójwartościową Łukasiewicza możliwa jest taka intuicyjna interpretacja. Chcąc patrzeć na tę semantykę zgodnie z ideą Łukasiewicza, elementowi 0 struktury Kripkego należałoby przypisać chwilę obecną, a elementowi 1 pewną chwilę w przyszłości, zaś wartościowana formuła atomowa wyrażałaby stwierdzenie o zachodzeniu w przyszłości (odpowiadającej chwili przypisanej elementowi 1) pewnego zdarzenia. Relację wymuszania traktowalibyśmy jako zaakceptowanie tej formuły w danej chwili.

Formuła (3.3) wyrażałaby powszechnie przyjmowane przekonanie, że "co się stało, odstać się nie może" i że fakt istnienia przyczyn prowadzi do skutków w sposób nieunikniony. Schemat wymuszania odpowiadający wartości logicznej 0 ($0 \nvdash p$, $1 \nvdash p$) wyrażałby fakt niezachodzenia danego zdarzenia w chwili 1 i istnienia przyczyny tego faktu w chwili 0, schemat odpowiadający wartości logicznej $\frac{1}{2}$ ($0 \vdash p$, $1 \vdash p$) zachodzenie danego zdarzenia w chwili 1 i nieistnienie przyczyn tego faktu w chwili 0, a schemat odpowiadający wartości 1 ($0 \vdash p$, $1 \vdash p$) zachodzenie zdarzenia w chwili 1 i istnienie przyczyn tego faktu w chwili 0. Niestety, od razu popadamy w sprzeczność rozważając negację formuły, której przypisujemy wartość $\frac{1}{2}$. Mianowicie negacja formuły o wartości $\frac{1}{2}$ jest również formułą o wartości $\frac{1}{2}$, co oznacza, że posiadają one ten sam schemat wymuszania. Niemożliwym jednak jest aby, zgodnie ze schematem wymuszania dla wartościowania $\frac{1}{2}$, w chwili 1, w której zachodzi bądź nie zdarzenie, o którym mówi dana formuła, zaakceptować zarówno tę formułę, jak i jej zaprzeczenie. Powstaje z kolei pytanie, czy istnieje taka logika trójwartościowa, w której powyższe postulaty, dotyczące interpretacji semantyki Kripkego, byłyby spełnione. Należałoby w tym celu inaczej sformułować reguły wymuszania dla implikacji i negacji. W przypadku logiki intuicjonistycznej dla spójników implikacji i negacji przyjmuje się zwykle intuicyjnie akceptowalne następujące reguły:

$$x \vdash (p \Rightarrow q) \equiv \forall y \geq x: y \vdash p \Rightarrow y \vdash q, \tag{3.13}$$

$$x \vdash \neg p \equiv y \geq x: y \vdash p. \tag{3.14}$$

Reguła dla implikacji wyraża przekonanie, że implikacja winna być zaakceptowana jeżeli będzie zachodziła w stadium obecnym i we wszystkich możliwych stadiach późniejszych, natomiast reguła dla negacji mówi, że winniśmy zaakceptować zaprzeczenie danej formuły o ile w obecnym i w żadnym możliwym przyszłym stadium nie zaakceptujemy tejże formuły. Reguły te wydają się także zgodne z intuicją gdyby relacja wymuszania dotyczyła związków przyczynowo-skutkowych, tak jak je opisano wcześniej. Stosując metodę przedstawioną powyżej, tzn. biorąc takie samo dwuelementowe uniwersum Kripkego jak poprzednio, obliczając z reguł (3.13, 3.14) schematy wymuszania dla negacji i implikacji i zapisując wyniki w formie tabelek (używając skrótowych oznaczeń 0, $\frac{1}{2}$ i 1), otrzymujemy następujące tabelki implikacji i negacji:

p	¬p
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

→	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

(3.15)

Są one, jak widać, tabelkami implikacji i negacji trójwartościowej logiki intuicjonistycznej Heytinga. Tabelki alternatywy i koniunkcji dla logiki Heytinga są zgodne z tabelkami logiki Łukasiewicza. W logice tej, przy próbach interpretacji semantyki Kripkego jako opisującej związki przyczynowo-skutkowe, nie natrafiamy na sprzeczności opisane w przypadku logiki Łukasiewicza. Zaletą tej logiki jest ponadto fakt, że (odmiennie niż w logice Łukasiewicza) zdanie $p \wedge \neg p$ jest w tej logice zawsze fałszywe, co, jak argumentował Gonseth (1938), jest konieczne jeżeli chcielibyśmy uznać zdania o wartości $\frac{1}{2}$ za zdania wyrażające niezdeterminowanie. Mankamentem tej interpretacji jest to, że negacja zdania niezdeterminowanego byłaby zdaniem fałszywym, co nie odpowiada raczej naszej intuicji. Być może więc trójwartościowa logika Łukasiewicza nie odnosi się do związków przyczynowo-skutkowych, wbrew intencjom jej autora, bądź też semantyka Kripkego nie nadaje się do opisu logiki indeterminizmu. Wniosek ten wydaje się dotyczyć logiki Heytinga.