Magdalena Klementowicz

Fregowska krytyka poglądów w kwestii natury arytmetyki

Nowa Krytyka 14, 185-222

2003

NOWA KRYTYKA 14 Rok 2003
ISSN 0867-647X

Magdalena Klementowicz
Uniwersytet Wrocławski

Fregowska krytyka poglądów w kwestii natury arytmetyki

Wstęp

Podstawy arytmetyki. Logiczno-matematyczne badania nad pojęciem liczby[1] Gottloba Fregego rozpoczynają się od sformułowania najważniejszego zagadnienia tej pracy, mianowicie pytania o to, czym jest liczba jeden. Zapowiedź podjęcia tych badań znajduje się już w końcowych partiach *Przedmowy* do *Ideografii (Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki)*[2]. Frege konstatuje, że na to pytanie oraz wynikające z niego pokrewne problemy (czym jest liczba w ogóle, czym wobec tego zajmuje się arytmetyka), większość matematyków nie potrafi dać zadowalającej odpowiedzi. Jest to wystarczające usprawiedliwienie podjęcia badań nad pojęciem liczby. Jednak Frege nie poprzestaje tylko na tym:

> Wielu nie uzna za warte wysiłku podjęcie tego zadania. Pojęcie liczby, jak mniemają, jest wystarczająco wyjaśnione w elementarnych podręcznikach i wraz z tym ustalone raz na zawsze. Któż więc mógłby oczekiwać, że nauczy się czegoś jeszcze o tak prostej rzeczy! Pojęcie

---

[1] *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Fragm. [w:] *Próby gramatyki filozoficznej. Antologia*, tłum. i oprac. K. Rotter. Wrocław 1997, s. 87–133. Praca Fregego cytowana będzie w tekście jako *Podstawy arytmetyki* lub *Grundlagen*. Wybór tekstów cytowany będzie dalej jako *Antologia*.

[2] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reines Denkens.* Fragm. [w:] *Antologia*, op.cit., s. 45–85. Praca Fregego cytowana będzie dalej jako *Ideografia* lub *Begriffsschrift*.

> liczb naturalnych uznaje za tak wolne od wszelkich trudności, że może być naukowo wyjaśnione dzieciom w sposób całkowicie wystarczający i że każdy bez dalszego namysłu i znajomości tego, co inni o tym myśleli, jest z nim dokładnie obeznany. Dlatego też częstokroć brakuje tego wstępnego warunku uczenia się: znajomości własnej niewiedzy[3].

Frege pyta retorycznie: „Czy dla nauki nie jest upokarzający brak jasności co do swojego najbliższego i z pozoru tak prostego przedmiotu?" W 1919 roku w szkicu podsumowującym swój dorobek filozoficzny, Frege napisał: „Punktem wyjścia była dla mnie matematyka. Najpilniejszym zadaniem tej nauki wydało mi się jej lepsze ufundowanie"[4]. Pojęcie liczby musi mieć niepodważalną konstrukcję, gdyż to właśnie na nim opiera się cała arytmetyka, a wraz z nią cała matematyka. Frege zauważa, że jeśli nie ma zgody wobec pierwotnych pojęć tak wielkiej nauki, to nie można uzyskać jasności odnośnie do innych, pochodnych wobec liczby (naturalnej), pojęć (liczb ujemnych, ułamków, liczb zespolonych). Jednocześnie stwierdza, że nawet wśród samych matematyków nie ma zgody co do tego, czym są liczby naturalne.

> Aby już w tym miejscu odeprzeć urojenie, jakoby z liczbami naturalnymi nie wiązały się żadne trudności, lecz panowała co do nich powszechna zgodność, wydaje mi się wskazane omówić niektóre poglądy filozofów i matematyków na wchodzące tu w grę problemy. Okaże się, iż tak mało zgodności da się tu znaleźć, że aż dochodzi do pojawienia się przeciwstawnych żądań. Jedni na przykład powiadają: „jedności są sobie równe", inni uznają je za różne, i zarówno jedni, jak i drudzy mają dla swych twierdzeń podstawy nie dające się natychmiast odeprzeć. Usiłuję wzbudzić przez to potrzebę wnikliwszych badań. Przez wstępne naświetlenie wygłoszonych przez innych poglądów chcę jednocześnie przygotować podstawy mojego własnego ujęcia, przekonując na wstępie, że te inne drogi nie prowadzą do celu, mój zaś pogląd nie jest po prostu jednym z wielu równie zasadnych; przynajmniej co do rzeczy głównej mam nadzieję rozstrzygnąć problem ostatecznie[5].

[3] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, [w:] *Antologia*, s. 87–88.

[4] G. Frege: *Szkic dla Darmstaedtera*, [w:] *Pisma semantyczne*, tłum. B. Wolniewicz. PWN 1977, s. 133.

[5] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, op.cit., s. 89.

Na czym polegała więc kompromitująca sytuacja, o której pisał Frege przy ocenie stanu ówczesnej matematyki i problemie podstaw? Jakie podstawy zamierzał „reformować"? Czy chodziło mu o niepodważalne i ostateczne podstawy wszelkiego poznania (byłoby to pytanie epistemologiczne, bądź szerzej – filozoficzne) czy też o podstawowe definicje, na bazie których budowana jest matematyka (byłby to w pewnym sensie problem techniczny)? Wyłaniają się tu dwa zasadnicze rodzaje pytań, które przewijają się w całej filozofii Fregego. Pierwsze z nich dotyczą stosowalności logiki i powszechnego obowiązywania praw logiki. Drugie zaś to pytania o poprawność techniczną zastosowanych narzędzi i rozwiązań. Gdyby problem dotyczył jedynie podstawowych pojęć, to w momencie pojawienia się rozbieżności poglądów lub niejasności, wystarczyło jedynie odpowiednio zmodyfikować pewne definicje lub przyjętą aparaturę pojęciową (uściślić lub ponownie zdefiniować pojęcia uważane za pierwotne, wskazać te elementy, które powodują techniczne trudności). Pytania dotyczące matematyki Frege spodziewał się rozwiązać za pomocą swojego pisma pojęć, ideografii. Wskazywał na konkretne błędy, popełniane przez współczesnych mu matematyków.

Filozofia matematyki Fregego nie ogranicza się jednak tylko do sformułowania definicji liczby, a jego badania wykraczają daleko poza arytmetykę, a nawet problem jej logicznego ugruntowania. Pytanie, które Frege stawia na początku swoich badań wraz z pytaniem o definicję liczby, dotyczy natury zdań matematycznych. Punktem wyjścia jest więc, postawione w duchu kantowskim, pytanie epistemologiczne, „zanurzone" w matematyce. Wyjściowe zadanie polegać ma na prześledzeniu wstecz wnioskowań matematycznych, po to, by dotrzeć do prawd pierwotnych. Dopiero one mogą być właściwym adresatem pytania o naturę. Jednocześnie wyłania się tu oddzielny problem, jakim jest pytanie o *zasady* wnioskowania, dzięki którym od zdań szczegółowych można przejść do leżących u ich podstaw praw ogólnych.

Jednak podjęty przez Fregego problem nie jest zadaniem szczegółowym, bowiem nie dotyczy jedynie matematyki ani też żadnej innej dziedziny, w której można posługiwać się pojęciem liczby. Do podjęcia badań nad podstawami arytmetyki skłonił Fregego przede wszystkim brak takiej definicji liczby, którą mogliby się posługiwać wszyscy używający pojęcia liczby, bez względu na to, w jakiej robią to dziedzinie oraz jakie poglądy na filozofię matematyki podzielają[6].

[6] To, co próbował osiągnąć Frege krótko i trafnie sformułował M. Dummett: „Frege próbował pokazać, że *niektóre* zdania matematyczne, te dotyczące teorii liczb oraz analizy, które zaklasyfikował łącznie jako „arytmetyczne", mają ten sam charakter i faktycznie *są* zdaniami

Z rozrzuconych w wielu miejscach fragmentów można wyodrębnić kilka zasadniczych zarzutów, jakie stawia Frege matematykom. Niezadowalający stan matematyki nie wynika z jej szerokich i różnorodnych zastosowań, lecz z braku wewnętrznej jasności i doskonałości, bowiem wartości poznania matematycznego upatruje Frege nie w tym, *co* się poznaje, lecz w tym, *jak* się to robi, czyli nie w materii tej wiedzy, ale w stopniu jej przejrzystości i zrozumieniu związków logicznych. Frege zarzuca matematykom, że w różny, a co za tym idzie, dowolny sposób wyjaśniają takie terminy jak „funkcja", „zmienna", „równość", oraz że jednym słowem oznaczają różne treści. Pierwszy zarzut związany jest ze znaczeniem terminów matematycznych: matematycy mieszają znak z tym, co on oznacza, a jest to tak rozpowszechnione zjawisko, że Frege nie waha się nazwać tego matematyczną chorobą swoich czasów[7]. Drugi zasadniczy błąd polega na wyizolowaniu znaczenia pojęcia z kontekstu, w jakim się ono pojawia. Pierwszą konsekwencją tych błędów jest naiwne[8] traktowanie pojęcia liczby – jeżeli termin ten wyizoluje się z kontekstu, w jakim się on zwykle pojawia, to możliwe odpowiedzi na pytanie, czym jest liczba, będą prowadziły do psychologizmu (liczba jest przedmiotem psychicznym, np. przedstawieniem) bądź do formalizmu (liczba jest znakiem). Jak ważne dla Fregego były te przewinienia świadczy fakt, że nakaz ich unikania sformułował w *Grundlagen* w postaci zasad metodologicznych, którymi należy się kierować w badaniach logicznych. Pierwsza zasada nakazuje oddzielanie tego, co psychologiczne od tego, co logiczne. Druga zasada to słynna zasada kontekstowości, mówiąca, że o znaczenia słów należy pytać w ich związkach zdaniowych, nie zaś oddzielnie. Trzecia zasada mówi o istnieniu różnicy pomiędzy pojęciem a przedmiotem.

logicznymi; nigdy nie wierzył, że obowiązuje to dla całej matematyki. Teoriomnogościowe sprzeczności sprawiły, że jego pomysł okazał się nieudany. Jednak nie unieważniły one całej próby od początku do końca: przekonanie o logicznym charakterze niektórych prostych zdań [...] nie ulega zmianie. Poza tym problem wyjaśnienia szczególnego charakteru matematycznych zdań w dalszym ciągu wymaga rozwiązania: wartość Fregowskiej nieudanej próby leży w sprecyzowaniu miejsca, w którym leży trudność". M. Dummett: *Frege. Philosophy of Mathematics*. Massachusetts 1991, s. 10.

[7] G. Frege: *Logische Mängel in der Mathematik*, [w:] *Nachgelassene Schriften*. Hamburg 1983.

[8] W recenzji pracy E. Husserla *Philosophie der Arithmetik*, Frege wyjaśnia, że naiwnym nazywa każde takie ujęcie liczby, które *nie mówi* o pojęciu lub zakresie pojęcia.

Fregowskie pytanie o podstawy jest pytaniem filozoficznym – pyta on o naturę tego, co napotykamy analizując nasze rozumowania wstecz aż do prawd pierwotnych oraz o *zasady* definiowania i dowodzenia. Jednocześnie Frege przyjmuje, że badania nad dowodami i definicjami muszą być badaniami logicznymi. Pytanie o podstawy dotyczy natury podstawowych praw logiki, bez których nie można przedstawić jakiegokolwiek dowodu i bez których nie można odróżnić prawdy i fałszu.

Tak więc mimo Fregowskiej deklaracji, iż punktem wyjścia była dla niego matematyka, to wyniki jego rozważań dotyczące liczb musiały być na tyle ogólne, by można je wykorzystać w różnych dziedzinach nauki. Taką intuicję potwierdza również Frege, pisząc:

> § 14 [...] Czy podstawa arytmetyki nie leży głębiej niż podstawa całej wiedzy doświadczalnej, głębiej nawet niż podstawa geometrii? Prawdy arytmetyczne panują w dziedzinie tego, co policzalne. Jest to dziedzina najszersza, gdyż należy do niej nie tylko to, co rzeczywiste i nie tylko to, co da się oglądać, lecz wszystko, co daje się pomyśleć. Czyż więc prawa dotyczące liczb nie powinny pozostawać w najbardziej wewnętrznym związku z prawami myślenia?[9]

Badania nad pojęciem liczby wydają się być związane jedynie z matematyką. Jednak Frege omawia poglądy nie tylko matematyków, lecz także filozofów. Dlaczego? Ponieważ podjęte zadanie jest w równej mierze filozoficzne co matematyczne, a sam Frege zamierza do swoich wyników przekonać również filozofów. Umieszcza zatem swoje rozważania pomiędzy matematyką a filozofią. Problemy powszechnego obowiązywania praw logiki i uniwersalność pojęcia liczby są niejako problemami bez ojczyzny – są one przerzucane z jednej dziedziny nauki do innej. Podejmując te zagadnienia, Frege tworzy coś na kształt nowej nauki, której wyniki będą miały walor powszechności i uniwersalności. Dziś można by powiedzieć, że byłaby to swego rodzaju metanauka. Jednak sam Frege nie znał odróżnienia języka i metajęzyka, a więc i nauki wraz z metanauką, choć intuicyjnie posługiwał się tego rodzaju klasyfikacją.

W *Grundlagen* (§§ 1–4) Frege podaje jeszcze inne powody usprawiedliwiające podjęcie badań nad pojęciem liczby. Jednym z nich jest brak pewności i luki w dowodach arytmetycznych. Matematyka oddaliła się, zdaniem Fregego, od euklidesowej ścisłości, która charakteryzowała geometrię starożytnych

[9] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, op.cit., s. 110.

Greków. W matematyce nie wystarcza jedynie przekonanie oparte na wielu skutecznych jej zastosowaniach. W czasie wielkiego postępu badań i rozwoju matematyki to, co kiedyś uchodziło za oczywiste, wymaga teraz dowodu. Zatem w matematyce najważniejsze jest dążenie do ścisłego dowodzenia, wytyczanie granic prawomocności oraz precyzyjne ujmowanie pojęć. Frege ma tu na myśli głównie pojęcie funkcji i ciągłości, granicy i nieskończoności, liczb ujemnych i niewymiernych. Luki w dowodach matematycznych mogą podważać ich pewność i poprawność. Jednak Frege nie zabiera się za zmienianie poszczególnych definicji czy też uzupełnianie dowodów. Podejmuje on badania znacznie ogólniejsze – szuka ogólnych praw dowodzenia i definiowania, które można będzie zastosować wobec wszelkich przedmiotów poznania. Narzędziem analizy, które ma zapewnić niepodważalność ciągu wnioskowania, jest Fregowskie pismo pojęć (*Begriffsschrift*)[10].

Fregowska ideografia nie była celem samym w sobie. Jej pomysł zaczerpnął Frege z arytmetyki (co wyraził już w samym tytule – *Ideografia. Język formalny czystego myślenia wzorowany na języku arytmetyki*) i tam też spodziewał się najpełniejszego jej wykorzystania, choć zastosować ją można w każdej nauce, w której „szczególny nacisk musi zostać położony na ścisłość dowodzenia"[11] (tymi naukami są, wymienione w *Begriffsschrift*, geometria, kinematyka, mechanika i fizyka). Tym niemniej, najpełniejszego wykorzystania swojej ideografii spodziewa się Frege w arytmetyce, a dokładniej w analizie jej pojęć, uzasadnianiu jej zdań, wyjaśnieniu pojęcia liczby i wielkości i innych. Taką zapowiedź dalszych badań umieścił Frege w *Przedmowie* do *Begriffsschrift*. Tym projektem jest *Grundlagen*, choć swoich zamierzeń z *Begriffsschrift* nie zrealizował Frege w taki sposób, w jaki chciał to zrobić. Chodzi o to, że naturalnym ciągiem dalszym *Begriffsschrift* powinna być praca, analizująca przy pomocy ideografii pojęcie liczby. Tymczasem *Grundlagen* napisane są codziennym

[10] G. Frege: *Ideografia*, op.cit., s. 46: „By zaś przy tym nie mogło się wkraść niepostrzeżenie coś oglądowego, wszystko musiało zależeć od tego, by łańcuch dowodu nie zawierał luk. Gdy zaś starałem się jak najściślej spełnić to żądanie, natrafiłem na przeszkodę w postaci niedostatków języka, która przecież przy wszystkich wyłaniających się uciążliwościach wiążących się z wyrażeniami, tym mniej pozwalała osiągnąć wymaganą dla mego celu dokładność, im bardziej skomplikowane stosunki wchodziły w grę. Z tej właśnie potrzeby wyłoniła się myśl [...] pisma pojęć. Winna ona zatem przede wszystkim służyć jak najpewniejszemu sprawdzaniu wnioskowań i wskazaniu wszelkich, mogących się niepostrzeżenie wśliznąć przesłanek, aby przy tym także one mogły zostać sprawdzone aż po swe źródła".

[11] Ibidem, s. 48.

językiem – w części pierwszej analizowane są różne filozoficzne poglądy dotyczące liczby i zdań arytmetyki, a dopiero w części drugiej proponowana jest nowa definicja liczb naturalnych i pojęcia liczby[12].

Przedmiotem niniejszego artykułu jest przede wszystkim krytyczna część *Grundlagen* oraz te fragmenty innych prac Fregego, w których sprzeciwił się on psychologizmowi, empiryzmowi, kantyzmowi i formalizmowi, jakie panowały w matematyce w jego czasach. W opozycji bowiem do tych programów Frege sformułował później własną definicję liczby (i ogólniej, własną filozofię matematyki).

Począwszy od § 5 *Grundlagen*, Frege przeprowadza krytykę poglądów dotyczących podstawowych pytań arytmetyki, a prezentowanych przez matematyków i filozofów. Ta krytyka obecna jest też w innych pracach Fregego, jednak najdokładniej przeprowadzona jest właśnie w *Grundlagen*, gdzie wyznacza strukturę całej pracy. Jest ona w dużej mierze przygotowaniem do przedstawienia jego własnej koncepcji. Wykazując, że alternatywne ujęcia są nie do utrzymania, Frege, jeszcze zanim przystąpi do przedstawienia własnej teorii, może wykazać, że jest ona nie tylko możliwa, lecz także konieczna. W partiach krytycznych *Grundlagen* przewijają się pozytywne konkluzje, które wykorzysta Frege jako kolejne kroki w procesie definiowania pojęcia liczby. Można więc powiedzieć, że rozważania w *Grundlagen* prowadzone są dwutorowo: z jednej strony Frege odpiera argumenty przeciwników, a z drugiej strony formułuje własną filozofię arytmetyki.

Sposób, czy też technika krytyki, jaką obiera Frege, jest właściwie ta sama, co w innych jego pracach: bierze on fragmentaryczne uwagi swoich oponentów całkowicie literalnie [dosłownie], a następnie wyciąga z nich z całą ścisłością

---

[12] Jaki był tego powód? Sluga uważa, całkiem zresztą słusznie, że powód jest prosty i oczywisty: „Powody odejścia od oryginalnego planu nie są trudne do zrozumienia. Kiedy Frege zaczął myśleć o logicznej analizie arytmetyki, zdał sobie sprawę z coraz powszechniejszego braku zgody pomiędzy matematykami odnośnie znaczenia elementarnych terminów ich nauki". H. Sluga: *Gottlob Frege*. London 1980, s. 96. Taką intuicję, czy raczej motywację do takiego właśnie sposobu poprowadzenia badań, potwierdza Frege w szkicu, w którym podsumowuje pod koniec życia własne poglądy, pisząc, że niemal każdy termin arytmetyki budził wątpliwości, a samej arytmetyki nie można było uznać za naukę, dopóki nie sformułuje się odpowiedzi na zasadnicze pytania – „czy arytmetyka zajmuje się widzialnymi kształtami, czy też są one dla niej jedynie znakami czegoś innego: pomocniczym narzędziem w pracy badawczej, a nie jej przedmiotem? Czy znaki te oznaczają liczby, a jeżeli nie, to co?" (G. Frege: *Pisma semantyczne*, op.cit., s. 139). Frege nie mógł odsunąć odpowiedzi na te pytania na później, miały one bowiem zasadnicze znaczenie dla możliwości sformułowania własnej koncepcji.

wnioski, doprowadzając krytykowane poglądy do absurdalnych konsekwencji. Wykazuje też ukryte przesłanki, które często okazują się równie absurdalne, co ich następstwa. Braki krytykowanych koncepcji pokazuje Frege również poprzez próby zastosowania ich wobec konkretnych przykładów. Ta metoda okazuje się całkiem skuteczna, choć w wielu miejscach ocena Fregego jest głęboko niesprawiedliwa.

Psychologizm

Jednym z powodów, jakie skłoniły Fregego do poczynienia nowych ustaleń dotyczących pojęcia liczby, był, wspomniany już wyżej, panujący wówczas w logice i filozofii, psychologizm[13]. Zdaniem Fregego, psychologiczne rozważania nad wewnętrznymi obrazami, przedstawieniami i procesami psychicznymi nie wnoszą nic do matematycznych dowodów i definicji. Co więcej, ich nieokreśloność i chwiejność stoją w sprzeczności z określonością i trwałością pojęć i przedmiotów matematycznych.

Skoro badania nad pojęciem liczby są wspólne matematyce i filozofii, to powinny one ze sobą współpracować, a jednak nie ma pomiędzy nimi porozumienia. Wprowadzenie psychologicznych uzasadnień do matematyki prowadzi do subiektywizmu i powoduje pomieszanie definicji z opisem tego, w jaki sposób dochodzimy do jakiegoś pojęcia lub przedmiotu. Psychologizm w filozofii matematyki okazuje się nie tylko zbędny, lecz także szkodliwy.

W *Begriffsschrift* oraz w *Grundlagen* Frege zajmował się przede wszystkim zawartością (treścią) zdań, a nie sposobem, w jaki podmiot do nich dochodzi. W późniejszych pismach Frege zwróci się również w stronę tego drugiego problemu. Będzie utrzymywał, że podmiot chwyta (ujmuje) sens zdania. Jednak niewątpliwie to pojęcie treści jest tu punktem wyjścia. Jednym z ważniejszych rozróżnień, jakie Frege wprowadził już w *Ideografii*, a rozszerzył w *Podstawach arytmetyki*, jest oddzielenie sposobu, w jaki dochodzimy do jakiejś prawdy od sposobu, w jaki ją uzasadniamy. Frege krytykuje w tym miejscu nie tylko psychologizm, ale też historyzm i, ogólniej, genetyzm. Wyraźnie zaznacza, że

[13] „Jeśli chodzi o matematyków, to zwalczanie tego rodzaju ujęć w zasadzie nie jest potrzebne; ponieważ jednak chcę także dla filozofów, o ile to możliwe, ostatecznie rozstrzygnąć rozważane tu kwestie sporne, zmuszony jestem zająć się także psychologią, choćby tylko po to, by odrzucić jej wtargnięcie do matematyki". G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, op.cit., s. 91.

w badaniach, jakie podejmuje, nieważna jest historia pojęć, sposób, w jaki podmiot je sobie uświadamia:

> Wydaje się, że sposób, w jaki liczba w nas powstaje, może informować o jej istocie. Chodziłoby tu zatem o dociekania psychologiczne. [...] Taki opis procesów wewnętrznych poprzedzających wydanie sądu dotyczącego liczby nie może nigdy, choćby był trafny, zastąpić właściwego określenia pojęcia. Nie będzie też nigdy mógł być dołączony do dowodu zdania arytmetycznego; nie informuje nas o żadnej własności liczb[14].

Historyczna metoda badań ma, według Fregego, wiele ograniczeń. Metoda, jaką proponuje Frege, polega na badaniu tego, co niezmienne, ogólne, tego, co jest istotą rzeczy i jest niezależne od podmiotu.

M. Dummett zwraca uwagę na pewien zarzut, który wysuwany jest przeciwko Fregemu, mianowicie taki, że zajmuje się on finalnym produktem matematyki, a nie procesem jego konstruowania. Zarzut taki wydaje się zupełnie nietrafiony, gdyż Frege w ogóle nie zamierzał badać warunków powstawania pojęć czy twierdzeń matematycznych, ale szukał podstaw, na mocy których uznawane są jej ogólne prawa. Co więcej, pytania, na które szukał odpowiedzi, dotyczą wyników matematyki, a proces dochodzenia do nich nie może unieważnić Fregowskich rozstrzygnięć. W § 17 *Grundlagen* Frege cytuje Leibniza: „nie chodzi tu o historię naszych odkryć, która jest różna u różnych ludzi, lecz o związek i naturalny porządek prawd, który jest zawsze ten sam". To podsumowuje punkt widzenia Fregego.

Krytyka psychologizmu pojawia się w kilku różnych miejscach w filozofii Fregego. Różnie też jest ujmowany psychologizm. Można podać co najmniej cztery odmienne sposoby, w jaki jest on rozumiany[15]. Po pierwsze, psychologizmem będzie używanie bytów myślowych (mentalnych) w miejsce bytów abstrakcyjnych. Po drugie, będzie nim też przedkładanie opisów genezy pojęć matematycznych i logicznych nad definicje tych pojęć (por. wyżej). Po trzecie, psychologizmem będzie także traktowanie logiki jako nauki o ludzkim myśleniu, czyli próby zastąpienia logiki psychologią. Czwarte możliwe rozumienie psychologizmu związane jest blisko z trzecim, a dotyczy redukowania prawdy

---

[14] *Ibidem*, s. 120.

[15] Czyni tak np. M. Resnik w pracy pt. *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca 1980.

do powszechnego uznawania za prawdziwe. Analogicznie do tych sformułowań, argumenty Fregego przeciwko psychologizmowi można podzielić na związane, po pierwsze, z przedmiotem badań, po drugie, z charakterem praw naukowych i metodą badawczą, a po trzecie – z obiektywistyczną koncepcją prawdy[16].

Pierwszy argument Fregego przeciwko psychologizmowi opiera się na odróżnieniu przedstawień od przedmiotów. Psychologizm w matematyce i logice byłby uprawniony jedynie wtedy, gdyby przedmiotem tych dwóch nauk były jedynie przedstawienia, czyli to, co należy do wewnętrznego świata podmiotu poznającego. A zatem należałoby uznać liczby jedynie za przedstawienia. Zasadnicze niebezpieczeństwo takiego subiektywizmu polega na tym, że każdy podmiot ma swoje własne przedstawienie, co w konsekwencji doprowadziłoby do tego, że istniałoby na świecie tyle liczb dwa, ile podmiotów oraz możliwe byłyby ukryte bądź nieuświadomione dwójki. Frege nie zgadza się na podstawianie bytów mentalnych w miejsce abstrakcyjnych. Jego argumentacja, że liczba nie jest ani wewnętrznym przedstawieniem, ani też nie redukuje się do wrażeń zmysłowych, przedstawiona jest w §§ 26–27 *Grundlagen*. Frege przedstawia tam swoje rozumienie zasadniczego w dyskusji z psychologistami terminu „przedstawienie":

> Przedstawienie w sensie psychologicznym jest tym, do czego odnoszą się psychologiczne prawa asocjacji; jest to coś obrazowego, zmysło-

[16] Podobnie argumentację Fregego dzieli E. Pietruska: „Argumentacja ta koncentruje się wokół następujących wątków tematycznych, umożliwiających ukazanie przeciwieństwa pomiędzy logiką i matematyką z jednej a psychologią i innymi naukami empirycznymi z drugiej strony: charakter praw naukowych, metoda badawcza, przedmiot badań i wreszcie zagadnienie prawdy". E. Pietruska: *Antypsychologizm Fregego i Poppera*, [w:] *Dziedzictwo logicznego empiryzmu*, red. M. Czarnocka. Warszawa 1995. Krytykę różnych odmian psychologizmu zawarł Frege w recenzji *Philosophie der Arithmetik* Husserla, w *Grundgesetze* i w *Grundlagen*, ale jego programowy antypsychologizm można odnaleźć w wielu artykułach i szkicach (np. *Myśl – studium logiczne*, *Logik*). We wstępie do *Grundlagen* Frege zajmuje się przede wszystkim drugim i trzecim ujęciem psychologizmu. Natomiast krytyka pierwszego ujęcia znajduje się w dalszych partiach tekstu. We wstępie do pierwszego tomu *Grundgesetze* oraz w dwóch szkicach zatytułowanych *Logik* (1879–1891 oraz 1897), krytykuje Frege redukowanie prawdy do uznawania za prawdziwość oraz identyfikowanie praw logiki z ogólnymi zasadami opisującymi procesy ludzkiego myślenia. Odcięcie się Fregego od psychologizmu widoczne jest też w sformułowaniu, na zakończenie *Wstępu* do *Grundlagen*, pierwszej z trzech zasad metodologicznych, którymi kieruje się Frege. Nakazuje ona odróżniać to, co psychologiczne od tego, co logiczne, to, co subiektywne od tego, co obiektywne. W myśl tej zasady, Frege odróżnia przedstawienia (rozumiane w sensie psychologicznym) od pojęć i przedmiotów. Jest to więc zapowiedź jego programowego (bo ujętego w formie zasady obowiązującej w badaniach) antypsychologizmu.

> wego. Przedstawienia w sensie obiektywnym należą do logiki i są ze swej istoty niezmysłowe, jakkolwiek słowo oznaczające przedstawienie obiektywne często niesie ze sobą także przedstawienie subiektywne, które jednak nie jest jego znaczeniem. Przedstawienie subiektywne często jest oczywiście różne u różnych ludzi, obiektywne natomiast takie samo u wszystkich. Przedstawienia obiektywne można podzielić na przedmioty i pojęcia. By uniknąć pomieszania, będę używał słowa „przedstawienie" tylko w sensie subiektywnym. [...] Poczynione tu rozróżnienie jest równie zasadne, jak rozróżnienie pomiędzy psychologią a logiką. Czyż tych dwóch nie można by było zawsze ściśle odróżniać![17]

Liczby dla Fregego są przedmiotami, a zatem przedstawieniami obiektywnymi. Jednak to, co obiektywne odróżnia Frege również od tego, co namacalne, przestrzenne, rzeczywiste. A zatem liczby Fregowskie nie są oczywiście przedmiotami empirycznymi.

Przy trzecim z wymienionych ujęć psychologizmu, w punkcie wyjścia, Frege odnosi się krytycznie do ogólnego rozumienia logiki jako nauki o warunkach poprawnego myślenia. Psychologiści utrzymują, że skoro myślenie jest czynnością psychiczną, to logika jest częścią psychologii lub przynajmniej się na niej opiera. Frege jest gotów zgodzić się z tą formułą tylko w tym sensie, że prawa logiki są wskazówkami, jak należy myśleć, aby osiągnąć prawdę. Problem pojawia się tu w związku z podwójnym sensem, w jakim może być rozumiane słowo „prawo". Z jednej strony mówi ono, *co jest* (zwykła wypowiedź oznajmująca), a z drugiej opisuje, *jak być powinno* (wypowiedź w formie nakazu). Prawa logiki mogą być uznane za prawa myślenia jedynie w tym sensie, że ustalają one, *jak należy* myśleć. Pojawia się tu więc koncepcja logiki jako nauki normatywnej. Jednak wyrażenie „prawa myślenia" może prowadzić do złudnego poglądu, jakoby te prawa kierowały myśleniem w takim sensie, jak prawa przyrody kierują procesami świata zewnętrznego. W takim przypadku prawa logiki musiałyby być prawami psychologii empirycznej, gdyż opisywałyby procesy myślenia, czyli zjawiska psychiczne. Przedmiotem logiki nie są jednak czynności myślenia, prawa, jakim ono podlega, przekonania prawdziwe czy też fałszywe przesądy. Frege odróżnia wyjaśnianie zjawisk psychologicznych, prowadzących do jakiegoś sądu od dowodu (uzasadnienia) tego sądu. Zadaniem logiki jest wykrywanie praw prawdziwości, z których „wypływają następnie

[17] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, op.cit., s. 123.

przepisy dotyczące przekonań, myślenia, sądzenia, wnioskowania"[18]. Praw logiki nie można uzasadnić na podstawie dociekań psychologicznych, gdyż prawa obu tych nauk mają różny charakter i odmienny status. Zasadnicza różnica między nimi polega na tym, że prawa logiki są niezmienne oraz nieograniczone w czasie i przestrzeni, natomiast prawa psychologii opisują procesy, których ważność ograniczona jest do określonego świata (tutaj: do świata ludzkich doświadczeń). Pewność praw psychologii oparta jest jedynie na doświadczeniu empirycznym. Nie można tego odnieść do praw logiki i matematyki, które są uniwersalne. Frege ujął to przeświadczenie w jedenastej tezie o logice:

> „2 razy 2 jest 4" pozostanie prawdą, nawet gdyby wskutek jakiejś darwinowskiej ewolucji wszyscy zaczęli twierdzić, że 2 razy 2 jest 5. Każda prawda jest wieczna i niezależna od tego, czy się ją myśli, i jaka jest konstytucja psychiczna myślącego[19].

Rozstrzygające dla ujmowania logiki jako zależnej bądź niezależnej od psychologii jest zatem sposób traktowania praw logiki oraz, co się z tym wiąże, rozumienie słowa „prawda". Błąd psychologizmu popełniają ci, którzy mylą uznawanie lub odrzucanie z uzasadnianiem sądu. Logicy psychologiczni mylą się także sprowadzając prawdę do uznawania za prawdziwe. Drugi Fregowski argument opiera się na założeniu o niezależności prawdy od ludzkiego sądzenia. Krytykując stanowisko psychologistów, reprezentowane w *Logik* B. Erdmanna, Frege pisze:

> Bycie prawdą jest czymś różnym od bycia uznawanym za prawdę przez jednego, wielu lub wszystkich i w żaden sposób nie może być do tego sprowadzone. Nie ma żadnej sprzeczności w tym, że prawdziwe jest coś, co wszyscy uznają za fałszywe. Przez prawa logiczne rozumiem nie prawa uznawania za prawdziwe, lecz prawa prawdziwości. [...] Jeśli więc bycie prawdziwym jest niezależne od bycia ujmowanym przez kogokolwiek, to również prawa prawdziwości nie są psychologicznymi prawami, lecz kamieniami granicznymi, utwierdzonymi na wiecznej podstawie, które nasze myślenie może wprawdzie objąć, ale nie może poruszyć. A ponieważ są takie, to są dla naszego myślenia rozstrzygające, jeśli chce się osiągnąć prawdę. Nie znajdują się one w stosunku do myślenia tak, jak prawa gramatyczne

[18] G. Frege: *Myśl – studium logiczne*, [w:] *Pisma semantyczne*, op.cit., s. 101.

[19] G. Frege: *Kilka tez o logice*, [w:] *Pisma semantyczne*, op.cit., s. 133.

> w stosunku do języka, a zatem nie wyrażają istoty naszego ludzkiego myślenia oraz nie zamieniają się z nim[20].

Dla Fregego prawda jest czymś obiektywnym, niezależnym od poszczególnych podmiotów poznających. Ujmując to jeszcze ogólniej – uznaje on obszar tego, co obiektywne, nie-rzeczywiste, podczas gdy logicy psychologiczni to, co nie-rzeczywiste redukują do tego, co subiektywne. Obiektywizm logiki jest tu przeciwstawiony subiektywizmowi psychologii.

Uznanie liczby za coś obiektywnego, a zatem odrzucenie możliwości, że podstawą liczby może być coś subiektywnego, jest argumentem przeciwko próbie ugruntowania logiki na bazie psychologii. Frege próbuje więc szukać innej podstawy dla zdań arytmetycznych, opierając się na kantowskim odróżnieniu zdań analitycznych i syntetycznych z jednej strony, oraz na *a priori* i *a posteriori* z drugiej:

> § 12. Gdy zostanie do tego dołączone przeciwieństwo pomiędzy sądami syntetycznymi i analitycznymi, otrzymamy wówczas cztery kombinacje, z których jedna, mianowicie analityczne a posteriori, nie wchodzi w rachubę. Jeśli wraz z Millem opowiemy się po stronie tego, co a posteriori, to nie mamy żadnego wyboru i pozostają nam do rozważenia tylko następujące możliwości: syntetyczne a priori oraz analityczne. Za pierwszą z nich opowiedział się Kant[21].

Sprzeciw wobec Kanta

We *Wstępie* do *Podstaw arytmetyki* Frege przedstawił nowe, własne rozumienie analityczności. Problem analityczności pojawia się tu w związku z pytaniem o charakter prawd matematyki. Wprawdzie Frege deklaruje, że nie zamierza zmieniać zastanych rozróżnień na *a priori* i *a posteriori* oraz *syntetyczne* i *analityczne*, jednak jego definicja analityczności jest zupełnie nowa i zrywa z tradycyjnym (tzn. kantowskim) rozumieniem. U Kanta rozróżnienie pomiędzy tym, co analityczne i tym, co syntetyczne dotyczy treści sądu. Dla Fregego rozróżnienie to opiera się na uprawnieniu do wydania sądu (*Berichtigung zur Urteilsfällung*).

---

[20] G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*. Bd. I. Jena 1893, s. XV–XVI.

[21] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, op.cit., s. 107.

Zasygnalizowane wcześniej żądanie niepodważalności dowodów matematycznych pozwala Fregemu na wykazanie zależności pomiędzy poszczególnymi twierdzeniami. Daje mu to z jednej strony możliwość wskazania i dotarcia do prawd i pojęć pierwotnych matematyki, a z drugiej pozwala na sformułowanie nowego pojęcia analityczności.

Po raz pierwszy podział prawd na te, które dowodzi się czysto logicznie i te, których dowód opiera się na faktach doświadczalnych, przedstawił Frege w *Przedmowie* do *Ideografii*. Ta pierwsza klasyfikacja nie jest jeszcze tak precyzyjna, jak ta przedstawiona w *Podstawach arytmetyki*. Jednak już to intuicyjne sformułowanie prawdy, której dowód jest czysto logiczny i „opiera się wyłącznie na zasadach, na których polega wszelkie poznanie", zrywa z tradycyjnym ujęciem prawdy analitycznej. Pierwsza ważna zmiana, to odróżnienie sposobu, w jaki dochodzimy do pewnego zdania od sposobu, w jaki je uzasadniamy. To odróżnienie stanie się podstawą definicji wyłożonej w *Podstawach arytmetyki*. Druga zmiana to zerwanie z traktowaniem pojęcia jako sumy cech.

W *Podstawach arytmetyki* Frege podał następującą definicję prawdy analitycznej:

> Gdy w podanym przeze mnie sensie określa się jakieś zdanie jako analityczne czy a posteriori, nie osądza się przy tym psychologicznych, fizjologicznych czy fizykalnych warunków umożliwiających utworzenie jego treści, nie osądza się też, jak ktoś inny, w sposób być może błędny, doszedł do tego, by uznać je za prawdziwe, osądza się jedynie to, na czym ostatecznie polega uzasadnienie uznania go za prawdę. [...] Wszystko sprowadza się do tego, by zaleźć dowód i prześledzić go aż do prawd pierwotnych. Jeśli na tej drodze natrafia się jedynie na ogólne prawa logiczne i definicje, to ma się do czynienia z prawdą analityczną – zakładając przy tym, że w rachubę wchodzą także zdania, od których zależy dopuszczalność definicji[22].

Posługując się współczesną terminologią metodologiczną, można powiedzieć, że stwierdzenie analityczności dotyczy nie kontekstu odkrycia, lecz kontekstu uzasadnienia. (Sam Frege odróżniał pytanie o to, jak uzyskujemy treść sądu od pytania o uzasadnienie naszego twierdzenia. Można więc stwierdzić, że odróżnienie to odpowiada odróżnieniu kontekstu odkrycia od kontekstu uzasadnienia.)

---

[22] Ibidem, s. 96.

Pytanie o aprioryczny bądź aposterioryczny, analityczny bądź syntetyczny charakter sądów matematycznych to filozoficzna pobudka, która skłoniła Fregego do badań nad pojęciem liczby. Mimo że pytania te należą do filozofii, to, zdaniem Fregego, ich rozstrzygnięcie nie może dokonać się bez matematyki. Jednak Frege nie musiał wykazywać analitycznego charakteru każdego, pojedynczego zdania arytmetycznego. Wystarczyło wykazać, że analityczny charakter posiadają podstawowe twierdzenia (gdyż to właśnie one są właściwym adresatem pytania o naturę). Cała reszta wynika z nich. Z czego jednak wynika analityczność tych pierwotnych zdań? Po pierwsze – z możliwości wyprowadzenia ich z logiki. To rozumienie analityczności związane jest z redukcjonizmem w postaci logicyzmu. Jednak jest to jedynie przerzucenie problemu analityczności z arytmetyki na grunt logiki, gdyż teraz można zadać pytanie, z czego wynika analityczność praw logiki. Ale Frege nie może określić praw logicznych jako analitycznych, ponieważ według jego definicji prawda analityczna to taka, która jest wyprowadzalna jedynie z praw logicznych i definicji, a zatem pojęcie analityczności zakłada pojęcie prawa logicznego. Po drugie, analityczność praw arytmetyki może oznaczać uniwersalność, rozumianą jako powszechne obowiązywanie i powszechną spełnialność. Wynika to z tego, że twierdzenia te odnoszą się do wszelkich możliwych przedmiotów poznania. Tym właśnie argumentem posługuje się Frege, aby wyjaśnić charakter praw logiki. Po trzecie, analityczność może być również rozumiana w sensie kantowskim.

Frege, w §§ 87–91 *Grundlagen*, krytykuje kantowską definicję analityczności głównie ze względu na ograniczenia jej stosowalności. Kantowski podział sądów na analityczne i syntetyczne nie jest wyczerpujący, bowiem dotyczy jedynie sądów uniwersalnych oznajmujących. Jedynie w ich przypadku można mówić o pojęciu podmiotu i wskazywać, że pojęcie predykatu jest w nim zawarte. Jednak procedura taka nie jest możliwa w przypadku, gdy podmiot jest pojedynczym przedmiotem lub gdy sąd jest egzystencjalny[23]. A zatem definicji

[23] I. Kant: *Krytyka czystego rozumu*. Warszawa 1986, fragm. A6–A7: „We wszystkich sądach, w których pomyślany jest stosunek podmiotu do orzeczenia (uwzględniając tylko sądy twierdzące, bo potem łatwo to zastosować do sądów przeczących), stosunek ten jest możliwy w sposób dwojaki. Albo orzeczenie B należy do podmiotu A jako coś, co jest (w sposób ukryty) zawarte w pojęciu A, albo B leży całkiem poza pojęciem A, choć pozostaje w nim w związku. W pierwszym przypadku nazywam sąd analitycznym, w drugim zaś syntetycznym. (Twierdzące) sądy analityczne są więc sądami, w których powiązanie orzeczenia z podmiotem jest pomyślane przez utożsamienie, sądy natomiast, w których to powiązanie pomyślane jest bez utożsamienia,

Kanta można użyć jedynie w odniesieniu do zdań typu „A jest B". Nie nadaje się ona jednak do innych postaci sądów. Frege musiał zatem nie tylko podać nową definicję analityczności, lecz także ogólną formę sądu, wobec której jego definicja będzie miała zastosowanie.

Dużo poważniejszy zarzut wysunął Frege wobec stwierdzenia, że sądy analityczne nie wnoszą nic nowego do wiedzy. Propozycja Kanta doprowadziła do powszechnego niedoceniania sądów analitycznych. Ogólność i możliwość wprowadzenia treści jako wniosku w sądach analitycznych we Fregowskim rozumieniu, pociąga za sobą ich powszechną ważność i stosowalność. A to otwiera drogę do możliwości ich nieograniczonego wykorzystywania.

Czy Fregemu chodziło więc tylko o rozszerzenie i uzupełnienie kantowskiej definicji, jak sugerował to we wstępie i końcowych paragrafach *Grundlagen*? Wydaje się, że nie, choćby z tego powodu, że definicje Fregego nie dają się uzgodnić z kantowskimi, tzn. nie mają wspólnych podstaw i tych pierwszych nie można zinterpretować jako uogólnień tych drugich. Fregowskie definicje odwołują się przede wszystkim do innych elementów, tj. do dowodów, praw ogólnych, a co za tym idzie, do uniwersalności przedmiotów, których dotyczą, oraz definicji, podczas gdy kantowskie – do należenia orzecznika do podmiotu. Podobnie sprawa wygląda w przypadku podziału na sądy aprioryczne i aposterioryczne. Wprawdzie w definicjach Fregowskich istnieje odwołanie do tradycyjnej idei niezależności bądź zależności od doświadczenia, to jednak główny akcent położony jest na ogólność praw leżących u podstaw sądów apriorycznych.

Rozstrzygnięcie o charakterze danego zdania polega, według Fregego, na prześledzeniu kolejnych kroków dowodu i sprawdzeniu, czy istnieją ogólne prawa, na których opiera się dowód. Każdy wiersz dowodu może być albo ogólną prawdą logiczną, albo prawdą jakiejś nauki szczegółowej. Ogólne prawdy logiczne to te, które mają walor powszechnej stosowalności, a więc te, których dziedzina jest nieograniczona. Jeśli rozpatrywane wnioskowanie składa się jedynie z prawd pierwszego typu, to zdanie, którego dowód dotyczy, jest anali-

nazywać się winny syntetycznymi. Pierwsze można nazwać sądami wyjaśniającymi, drugie zaś sądami rozszerzającymi [naszą wiedzę], tamte bowiem nie dorzucają swym orzeczeniem nic do pojęcia podmiotu, lecz jedynie przez rozbiór rozbijają je na pojęcia składowe, które już były w nim, choć mętnie, pomyślane. Te natomiast dodają do pojęcia, będącego podmiotem, orzeczenie, które nie było w nim wcale pomyślane i nie mogło być [z niego] wyprowadzone przez jego rozbiór".

tyczne w sensie Fregowskim. Jeśli zaś we wnioskowaniu znajduje się choć jedna prawda drugiego typu, to zdanie wyjściowe ma charakter syntetyczny. W przypadku drugiego podziału (tj. podziału na *a priori* i *a posteriori*), kroki dowodowe mogą być albo prawdami ogólnymi, „które same ani nie są dowodliwe, ani też nie potrzebują dowodu", albo są niedowodliwymi prawdami szczegółowymi, zawierającymi „wypowiedzi o określonych przedmiotach" (Frege nazywa je faktami). W przypadku, gdy dowód danego zdania przeprowadzony jest w oparciu jedynie o prawdy pierwszego typu, to zdanie wyjściowe ma charakter aprioryczny. W przypadku, gdy we wnioskowaniu znajduje się choć jedno odwołanie do faktów, to zdanie ma charakter aposterioryczny.

W tym samym miejscu Frege krytykuje również kantowską koncepcję pojęcia, która jest jego zdaniem mało owocna. Kant rozumiał pojęcie jako określone przez przyporządkowane cechy charakterystyczne. Taka koncepcja była podstawą definicji analityczności, gdzie pojęcie orzecznika było zawarte w pojęciu podmiotu. Jałowość tego typu definicji jest, zdaniem Fregego, szczególnie widoczna w matematyce. Według Fregego w definicjach matematycznych nie ma szeregu przyporządkowanych cech charakterystycznych, lecz wewnętrzne połączenie pomiędzy składnikami definicji. Różnicę pomiędzy własnym a kantowskim rozumieniem pojęcia przedstawił Frege za pomocą obrazu geometrycznego:

> Jeżeli przedstawić pojęcia (czy ich zakresy) jako obszary płaszczyzny, to pojęciu zdefiniowanemu za pomocą przyporządkowanych cech charakterystycznych odpowiada obszar, który jest wspólną częścią obszarów odpowiadających przyporządkowanym cechom charakterystycznym. Granica tego obszaru będzie składała się z kawałków granic obszarów danych. Przy definicji takiej chodzi więc o to – mówiąc obrazowo – aby dane już linie wykorzystać w nowy sposób do ograniczenia pewnego obszaru. Nie pojawia się jednak przy tym nic nowego. Bardziej owocne definicje pojęć wytyczają granice, które dotąd nie były jeszcze dane. Nie widać z góry co da się z nich wywnioskować; nie wyciąga się przy tym ze skrzyni czegoś, co już wcześniej tam się włożyło. Wnioski takie poszerzają naszą wiedzę i powinno się je, za Kantem, uważać za syntetyczne. Mogą one być jednakże udowodnione w sposób czysto logiczny, są więc analityczne. W rzeczywistości są one zawarte w definicjach, ale tak, jak rośliny w nasionach, a nie jak belki w budynku. Często potrzeba kilku definicji do dowodu

> jakiegoś twierdzenia, które nie jest zawarte w żadnej pojedynczej i wynika w sposób czysto logiczny z nich wszystkich razem[24].

W przytoczonym fragmencie widać, że Fregowska definicja analityczności i leżąca u jej podstaw koncepcja pojęcia różni się od tej, którą posługiwał się Kant.

Charakter praw arytmetyki

Grundlagen zawierają dwa główne postulaty dotyczące praw arytmetyki: po pierwsze, że są one analityczne, a po drugie, że dają się wyrazić w terminach czysto logicznych. Można postawić pytanie, czy stwierdzenia te są niezależne, czy też jedno z nich pociąga za sobą drugie lub, co jest również możliwe, czy jedno uzasadnia drugie. Rozstrzygnięcie tego zagadnienia zależy przede wszystkim od pojęcia analityczności, jakie jest założone w tak sformułowanym problemie. Przy Fregowskim rozumieniu całkiem naturalne jest przyjęcie, że druga z wymienionych tez może być uzasadnieniem pierwszej. Jednak nie jest to jedyny argument na rzecz analityczności arytmetyki, jakim posługuje się Frege. Główny ciężar argumentacji Fregego opiera się na uniwersalności zastosowania praw arytmetyki. Odnoszą się one do wszelkich możliwych do pomyślenia przedmiotów, czyli dziedzina, wobec której mają zastosowanie, jest nieograniczona. *Explicite* sformułował Frege ten argument w referacie przedstawionym na posiedzeniu Jenajskiego Towarzystwa Medycyny i Nauk Przyrodniczych (1885). Powołuje się tu on na argument o uniwersalności zastosowania praw arytmetyki, aby uzasadnić twierdzenie, że są one wyprowadzalne czysto logicznie z definicji. Skoro policzyć można wszystko, co jest przedmiotem myślenia, to podstawowe prawa, na których opiera się arytmetyka, muszą także obejmować wszystko, co można pomyśleć. A takie ogólne prawa zalicza się, zdaniem Fregego, do logiki.

> Pod nazwą „teoria formalna" chcę rozważyć tu dwie koncepcje, z których z pierwszą zgadzam się, a drugą postaram się odrzucić [obalić]. Pierwsza mówi, że wszelkie zdania arytmetyczne mogą być wyprowadzone w sposób czysto logiczny jedynie z definicji, a wobec tego

[24] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, wybór, opracowanie i komentarze R. Murawski. Poznań 1994, s. 199.

> muszą być w ten sposób wyprowadzane. [...] Z wszystkich powodów, jakie uzasadniają tę koncepcję, chcę tu przywołać tylko jeden, który opiera się rozległym zastosowaniu teorii arytmetycznej. Istotnie, można policzyć prawie wszystko, co może być przedmiotem myślenia: to, co idealne jak i to, co realne, pojęcia jak i rzeczy, to, co czasowe jak i to, co przestrzenne, wydarzenia jak i ciała, metody jak i twierdzenia; również same liczby można ponownie policzyć. [...] Należy stąd wywnioskować, że podstawowe prawa, na których opiera się arytmetyka, nie mogą odnosić się do wąskiej dziedziny, której własność wyrażają tak, jak aksjomaty geometrii wyrażają właściwość tego, co przestrzenne. Każde podstawowe prawo musi rozciągać się na wszystko, co można pomyśleć; a takie ogólne zdanie zalicza się prawomocnie do logiki[25].

Jednak koncepcja zakładająca, że arytmetyka składa się z ogólnych praw logicznych wydaje się stać w sprzeczności z faktem, że pewne zdania arytmetyki są zdaniami egzystencjalnymi (a więc nie są w swej formie ogólne). A zatem, aby uzasadnić przekonanie, że arytmetyka jest częścią logiki, Frege musi wykazać, że wszelkie egzystencjalne (jednostkowe) zdania arytmetyki są wyprowadzalne z praw ogólnych.

Część pierwsza *Grundlagen*, tj. §§ 5–17, dotyczy natury zdań arytmetyki, a argumentacja Fregego przebiega w dwóch etapach (§§ 5–11 dotyczą dowodliwości formuł liczbowych, a w §§ 12–17 Frege koncentruje się na rozstrzygnięciu pytania, czy prawa arytmetyki są syntetyczne *a priori* czy analityczne). Frege odróżnia formuły liczbowe (np. $2 + 1 = 3$) od ogólnych praw (np. $a + b = b + a$), które są ważne dla wszelkich liczb. Zadanie, jakie stawia sobie Frege na tym etapie pracy, to wykazanie, że formuły liczbowe są wyprowadzalne tylko z definicji poszczególnych liczb przy użyciu praw ogólnych. Frege musi wykazać, że aksjomaty arytmetyki są prawdami analitycznymi, a co za tym idzie, że są dowodliwe oraz że samo pojęcie liczby jest definiowalne (co do tego również nie ma zgody, gdyż pojęcie liczby można uznać za oczywiste lub uznać, że definiowalne są jedynie poszczególne liczby, a nie ogólne pojęcie liczby). Są to niezbędne etapy prowadzące do nadrzędnego celu, jakim jest sformułowanie definicji liczby za pomocą symboli logicznych i praw ogólnych.

---

[25] G. Frege: *Über formale Theorien der Arithmetik,* [w:] *Kleine Schriften,* red. I. Angelelli. Darmstadt 1967, s. 103.

Frege rozpoczyna od pytania, czy formuły liczbowe są dowodliwe. Odrzuca pogląd, jakoby formuły te należało uznać za niedowodliwe i oczywiste, tak jak aksjomaty. Krytykuje Kanta, który uznaje formuły liczbowe za niedowodliwe i syntetyczne, choć jednak nie klasyfikuje ich jako aksjomatów, ze względu na to, że nie są ogólne i jest ich nieskończenie wiele. Przyjęcie nieskończenie wielu aksjomatów jest sprzeczne z czymś, co określa Frege mianem przejrzystości podstaw. Krytykując Kanta, Frege zmierza jednocześnie do odrzucenia poglądu, głoszącego, że prawa arytmetyki są zdaniami syntetycznymi *a priori*. Posługuje się tutaj argumentem, przytaczanym w *Grundlagen* również później, wykazującym, że dana teoria lub prawo nie obowiązuje dla dużych liczb lub nie zachodzi dla 0 lub 1.

Argumentacja Kanta przebiega następująco:

> Natomiast oczywiste twierdzenia o stosunkach między liczbami są wprawdzie syntetyczne, ale nie są ogólne, jak twierdzenia geometrii, i właśnie dlatego nie można ich też nazwać aksjomatami, lecz tylko formułami liczbowymi. Twierdzenie, że 7 + 5 = 12, nie jest analityczne. Albowiem ani w przedstawieniu liczby 7, ani w przedstawieniu liczby 5, ani w przedstawieniu złożenia ich na nową całość nie myślę o liczbie 12 (nie mówi się tu o tym, że mam ją pomyśleć w dodawaniu obu liczb do siebie; albowiem w wypadku twierdzenia analitycznego zachodzi jedynie pytanie, czy rzeczywiście myślę orzeczenie w przedstawieniu podmiotu). Choć jednak jest ono syntetyczne, to przecież jest tylko twierdzeniem jednostkowym. [...] Tego rodzaju twierdzenia należy więc nazywać nie aksjomatami (gdyż byłoby ich wtedy nieskończenie wiele), lecz formułami liczbowymi[26].

Koronnym argumentem Kanta na rzecz syntetyczności formuł liczbowych jest fakt, że nie są one oczywiste. W teorii Kanta powyższy przykład (tj. 7 = 5 = 12) mógłby być uznany za analityczny tylko wtedy, gdy możliwe byłoby znalezienie żądanej sumy jedynie za pomocą analizy pojęć. Według Kanta w analizowanym przykładzie konieczne jest odwołanie się do pewnego rodzaju unaocznienia (np. do pięciu palców lub pięciu punktów). To zaś sugeruje, że formuły liczbowe należy uznać za syntetyczne:

> Twierdzenie arytmetyczne jest więc zawsze syntetyczne, a uświadamiamy sobie to tym wyraźniej, im nieco większe liczby bierzemy, ponieważ wówczas staje się jasne, że choćbyśmy nasze pojęcia do woli

---

[26] I. Kant: *Krytyka czystego rozumu*, op.cit., fragm. B 205/206.

> obracali na wszystkie strony, nigdy nie moglibyśmy znaleźć sumy przy pomocy samej analizy naszych pojęć, bez uciekania się do pomocy naoczności[27].

Tym tropem idzie również Frege, stawiając pytanie o to, czy formuła 135664 = 37863 = 173527 jest bezpośrednio jasna. Zarówno Frege, jak i Kant, przyznają, że nie jest. Jednak obaj wyciągają z tego faktu różne wnioski. Kant wykorzystuje brak oczywistości, czyli fakt, że dana równość nie jest bezpośrednio jasna, jako argument na rzecz syntetycznego charakteru tych zdań. Według Fregego przemawia to raczej na rzecz ich dowodliwości – choć nie są prawdami oczywistymi, to przecież dają się dowieść. Co więcej, przywoływana przez Kanta konieczność odwołania się do oglądu palców, może doprowadzić do uznania rozpatrywanych formuł za zdania empiryczne, co stoi w jawnej sprzeczności z poglądami i zamiarami Kanta. Problematyczny dla Fregego jest przede wszystkim kantowski „ogląd". Różne rozmieszczenie 10 palców może wywołać różnorodne oglądy, argumentuje Frege, pytając jednocześnie retorycznie, czy możliwy jest ogląd np. 37863 palców. Wydaje się więc, że pomysł Kanta sprawdzałby się jedynie dla małych liczb. Jednak w takim przypadku trudność polegałaby na znalezieniu ostrej granicy oddzielającej małe liczby od dużych, czyli tych liczb, dla których formuły arytmetyczne byłyby oczywiste, od tych, dla których musiałby one być dowodzone. Na taką zaś „niewygodną" konsekwencję nie zgadza się Frege, a zapewne nie zgodziłby się również i Kant. Nie zmienia to jednak faktu, że uzasadnienie formuł liczbowych dla dużych liczb pozostaje w teorii Kanta niewyjaśniona.

Podstawą przekonania Kanta, że zdania arytmetyki są syntetyczne *a priori* jest koncepcja poznania w czystej naoczności, którą krytykuje Frege[28]. Ponadto w logice Kanta pojęcie naoczności jest szersze od tego, którego używa on w estetyce transcendentalnej.

---

[27] Ibidem, fragm. B 16.

[28] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, [w:] *Antologia*, s. 108: „Ponadto zaś zgorszenie budzi wyrażenie «czysta naoczność wielkości». Gdy zwróci się uwagę na to, jak różne rzeczy określa się mianem wielkości: liczby, długości, zawartości powierzchni objętości, kąty krzywizny, masy, prędkości, siły, natężenia światła, natężenia galwaniczne itd., da się wówczas zrozumieć, jak można je podporządkować pojęciu wielkości; mimo to wyrażenia „naoczność wielkości", a zwłaszcza „czysta naoczność wielkości" nie można uznać za trafne. Nie mogę uznać naoczności 100 000, tym bardziej zaś naoczności liczby w ogóle czy zgoła wielkości w ogóle. Zbyt łatwo powołujemy się na wewnętrzną naoczność, gdy nie potrafimy podać innej podstawy. Nie powinno się jednak przy tym całkowicie tracić z oczu sensu słowa «naoczność»".

Ponownie, w § 89 *Grundlagen*, Frege powraca do Kanta. Przywołuje jego stwierdzenie, że bez pomocy zmysłów nie byłby dany żaden przedmiot[29]:

> Zero, jedynka są przedmiotami, które nie mogą nam być dane za pomocą zmysłów. Także ci, którzy uważają małe liczby za intuicyjne, będą jednak musieli przyznać, że żadna z liczb, która jest większa niż $1000^{1000^{1000}}$ nie może być dana intuicyjnie i że mimo to coś jednak o nim wiemy. Być może Kant używał słowa „przedmiot" w innym znaczeniu; ale wtedy zero, jedynka, nasze $\aleph_0$ wypadają z jego rozważań; nie są one bowiem także pojęciami, a również od pojęć żąda Kant, żeby dołączyć do nich przedmiot intuicyjny[30].

Oczywiście, aby ta krytyka Kanta była w pełni uzasadniona, Frege musi udowodnić, że liczby *są przedmiotami.*

Aby podeprzeć swoje przekonanie o dowodliwości formuł liczbowych, Frege w § 6 powołuje się na Leibniza, który próbował udowodnić jedynie za pomocą definicji i wprowadzonego aksjomatu (który jednak można również przekształcić w definicję), prostą równość: 2 + 2 = 4. Niestety, Leibnizjańska próba zawiera pewną lukę – w dowodzie brakuje prawa przemienności dodawania. Jednak sama idea Leibnizjańskiego dowodu okazuje się bardzo obiecująca. Właściwy, zdaniem Fregego, sposób definiowania każdej poszczególnej liczby (dotyczy to również dużych liczb), polega na powiększaniu o 1 liczby poprzedzającej definiowaną. Niepotrzebny jest tu żaden ogląd (jakiego wymagał sposób proponowany przez Kanta), lecz wystarcza liczba 1 oraz operacja powiększania o 1. W tym miejscu Frege formułuje pierwsze ważne prawo, które wykorzysta później przy konstruowaniu własnej definicji liczby. Konkluzja jest następująca: formuły liczbowe są dowodliwe, a nieskończony zbiór liczb zostaje sprowadzony do 1 i powiększania o 1.

Antyempiryzm

H. Sluga uważa, że najszerzej krytykowanym poglądem w *Grundlagen* jest empiryzm. Fregowski – można powiedzieć programowy – antyempiryzm jest,

---

[29] I. Kant: *Krytyka czystego rozumu*, B 75.

[30] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, op.cit., s. 199.

według niego, przewodnią filozoficzną myślą w krytyce innych koncepcji z zakresu podstaw matematyki. Frege atakuje w *Grundlagen* tezę, że prawa arytmetyki są indukcyjne, że liczby są własnościami rzeczy zewnętrznych, że są one subiektywnymi bytami myślowymi, sprzeciwia się uznaniu liczb za „agregaty" fizycznych obiektów czy tylko za znaki, jak chcą formaliści. Dla Slugi indukcjonizm, fizykalizm, psychologizm i formalizm są różnymi formami empiryzmu. Ograniczenie Fregowskiej filozofii matematyki jedynie do antyempiryzmu wydaje się nieuprawnionym zawężeniem, a uznanie formalizmu za pewną wersję empiryzmu musi zakładać jakieś szczególne wersje tych koncepcji. Fregowska krytyka jest szczegółowa i bogata i raczej nie daje się określić tylko jednym terminem – antyempiryzm.

§§ 7–11 *Grundlagen* poświęca Frege dyskusji z poglądami J.S. Milla. Fregowska krytyka zwrócona jest przede wszystkim przeciwko Millowskiej analizie formuł liczbowych oraz przeciw definicjom indywidualnych liczb. Frege sprzeciwia się uznaniu liczb za fizyczne własności rzeczy zewnętrznych. Krytykuje także Millowski pogląd, że aksjomaty arytmetyki są uprawomocnione przez indukcję z obserwacji jednostkowych faktów.

Millowski sposób tworzenia liczby wydaje się początkowo, z punktu widzenia filozofii Fregowskiej, obiecujący: „[...] każda liczba powstaje przez dodanie jedności do liczby bezpośrednio mniejszej od niej co do wielkości [...]"[31] – pisze Mill. Dopuszcza on wprawdzie nazywanie twierdzenia „3 to 2 i 1" definicją, ale jest ona dla niego definicją w sensie geometrycznym, a nie logicznym. I tu właśnie pojawiają się rozbieżności pomiędzy Fregem a Millem. Powyższą definicję interpretuje Mill w duchu filozofii empirycznej, dodając, że stwierdza ona nie tylko znaczenie terminu, lecz także zaobserwowany stan rzeczy:

> Podobnie możemy nazwać zdanie „3 to tyle, co 2 i 1" definicją liczby 3; ale obliczenia, które opierają się na tym twierdzeniu, nie wypływają z samej definicji, lecz z twierdzenia arytmetycznego, jakie się w niej przyjmuje, a mianowicie, że istnieją zbiory przedmiotów, które dając zmysłom wrażenie ooo, mogą jednak być rozdzielone na dwie części tak oto oo o. Gdy przyjmiemy to twierdzenie, wówczas wszelkie takie zespoły oznaczamy mianem „3", a wtedy wyrażenie, stwierdzające

[31] J.S. Mill: *System logiki dedukcyjnej i indukcyjnej*, ks. III, rozdz. XXIV, § 5. PWN 1962, t. II, s. 205.

> powyżej wspomniany fakt fizyczny, będzie służyło również jako definicja słowa „3"[32].

Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na różnice pomiędzy Fregem a Millem dotyczące definicji. Według Milla, definicja liczby, podobnie jak i inne definicje, składa się z dwóch części, a mianowicie z wyjaśnienia dotyczącego nazwy, czyli części konotacyjnej, ustalającej treść definiowanego pojęcia, oraz ze stwierdzenia faktu, czyli części denotacyjnej. Mill pisze: „Fakt, ustalony w definicji liczby, jest faktem fizycznym. Każda spośród liczb 2, 3, 4 i tak dalej oznacza zjawiska fizyczne, a współoznacza własność fizyczną tych zjawisk"[33]. Dla Milla Leibnizjański sposób definiowania liczb naturalnych jest jedynie częścią definicji liczby – częścią konotacyjną. Każde twierdzenie arytmetyczne wskazuje tylko jeden ze sposobów tworzenia danej liczby. Gdyby matematyka składałaby się jedynie z takich twierdzeń, to, zdaniem Milla, nie można by uznać jej za naukę i mówić o jej prawdziwości. Tę ostatnią zagwarantować może jedynie odniesienie do rzeczywistości.

Pierwszy zasadniczy zarzut, jaki Frege stawia koncepcji Milla, dotyczy powiązania zdań arytmetyki z empirycznymi faktami. Wydaje się początkowo, że Mill zamierza pójść drogą wskazaną przez Leibniza, tzn. że będzie próbował dowodzić poszczególne formuły liczbowe. Frege może zgodzić się z Millem jedynie co do tego, że definicje poszczególnych liczb ustalają znaczenie pewnego wyrażenia. Jednak Mill idzie dalej, twierdząc, że definicje te stwierdzają zaobserwowany fakt. Frege protestuje przeciwko wiązaniu formuł liczbowych z empirycznymi faktami, gdyż prowadzi to do trudnych do zaakceptowania konsekwencji. W tym właśnie sensie można filozofię matematyki Fregego nazwać antyempiryczną. Spór Fregego z Millem dotyczy tu interpretacji pojęć arytmetycznych i formuł liczbowych. Obaj zgadzają się co do tego, że liczba musi mieć jakieś odniesienie przedmiotowe (Millowską denotację, Fregowskie znaczenie), lecz każdy z nich szuka go w innym miejscu. Mill postuluje, aby

---

[32] Ibidem, ks. II, rozdz. VI, § 2.

[33] Ibidem, ks. III, rozdz. XXIV, § 5 i t. II, s. 201. Nazwa liczby – wg Milla – konotuje sposób, w jaki należy połączyć razem pewne przedmioty, aby utworzyły one określony zbiór. I tak na przykład zbiór oznaczany nazwą *trzy*, czyli Millowskie *trzy kamyczki*, można otrzymać przez połączenie *jednego kamyczka* z *dwoma kamyczkami* lub odejmując *jeden kamyczek* ze zbioru *czterech kamyczków*. W związku z tym, twierdzenia arytmetyczne, dotyczące wyniku jakiegoś działania arytmetycznego, wskazuje jedynie jeden ze sposobów tworzenia danej liczby. W szczególności, prawa dodawania powstają przez obserwację wyniku fizycznego łączenia fizycznych obiektów.

twierdzenia arytmetyki wiązać bezpośrednio z faktami empirycznymi, gdyż tylko takie powiązanie może zagwarantować arytmetyce (i szerzej, każdej nauce) prawdziwość.

Frege, ponownie odwołując się do argumentu, że krytykowana teoria jest trudna do spełnienia dla dużych liczb, stawia pytanie o to, co odpowiada fizykalnemu stanowi rzeczy, stwierdzanemu w definicji liczby 777864. Co więcej, postulowane przez Milla fizykalne (czy też obserwowalne) stany rzeczy są niemożliwe do spełnienia także dla liczb 0 i 1 – jeśli definicję jakiejś liczby tworzy się poprzez składanie czy też rozkładanie fizycznych rzeczy, to jak można, posługując się tą metodą, złożyć lub rozłożyć zero fizycznych przedmiotów, co odpowiadałoby liczbie 0.

To jednak nie wszystkie słabości koncepcji Milla, na jakie wskazuje Frege. Nawet jeśli przyjmie się za Millem, że liczbie 3 odpowiada takie powiązanie rzeczy, które wywołuje wrażenie ooo, to nie będzie można poprawnie mówić np. o trzech uderzeniach zegara, o trzech doznaniach smakowych czy też uznać za poprawne wyrażenie „trzy sposoby rozwiązania równania", gdyż żadne z przykładowych stwierdzeń nie wywołuje ponownie wrażenia ooo. Ten zarzut jest chyba najpoważniejszy – Millowska koncepcja nie jest uniwersalna.

Wymóg wiązania definicji liczby z faktami empirycznymi, stawiany przez Milla, prowadzi do kolejnej poważnej konsekwencji, której nie może zaakceptować Frege. Mill twierdzi:

> Wyrażenie '2 kamyki i 1 kamyk' i wyrażenie '3 kamyki' w istocie rzeczy oznaczają ten sam zbiór przedmiotów, lecz bynajmniej nie oznaczają tego samego fizycznego faktu. Są one nazwami tych samych przedmiotów, lecz w różnych dwóch stanach[34].

Otóż, definicje takie w Millowskiej interpretacji tracą walor ogólności. Jeśli tworzy się definicję danej liczby, to należy powiązać ją z *konkretnym* stanem fizykalnym rzeczy – jak od tego stanu rzeczy przejść do innego i jak wobec tego sformułować ogólną definicję liczby? Frege zauważa również, że potrafimy liczyć pewne przedmioty nawet, jeśli ich dosłownie nie gromadzimy w (Millowskie) stosy. Powołując się na Fregowski przykład, możemy powiedzieć, że ktoś, kto posiada jednego konia w Niemczech i jednego w Ameryce, może uznać, iż jest właścicielem dwóch koni, bez konieczności sprowadzania obu zwierząt w jedno miejsce, aby przekonać się, że tworzą one „fizykalnie

[34] Ibidem, ks. II, rozdz. VI, § 2 i t. I, s. 399.

postrzegane zjawisko dwóch koni" (jak mógłby to określić Mill). Ponadto, co z liczbami, dla których nie można zaleźć odpowiadających im stanów fizycznych? Jak np. zaobserwować 0 kamyków lub stan rzeczy odpowiadający liczbie osiemnastocyfrowej? Na te pytania koncepcja Milla nie daje odpowiedzi.

Frege (w § 9) przechodzi więc do pytania o naturę tych praw ogólnych, będących podstawą do wyprowadzenia twierdzeń arytmetycznych. Krytykuje pogląd Milla, jakoby prawa te były prawdami indukcyjnymi. Mill interpretuje twierdzenia arytmetyczne, podobnie jak definicje liczb, w duchu filozofii empirycznej, uznając je za prawdy indukcyjne, powstałe w wyniku obserwacji pewnych stanów fizycznych. Frege przytacza przykład twierdzenia, o którym Mill pisze, że jest prawdą indukcyjną albo prawem najwyższego rzędu. W swoim *Systemie logiki* Mill argumentuje:

> Arytmetykę czyni typem nauki dedukcyjnej to, że do niej szczęśliwie się stosuje prawo o tak szerokim zakresie jak „sumy rzeczy równych są równe"; albo (by wyrazić tę samą zasadę w mniej potocznym, lecz bardziej swoistym języku): „co składa się z części, to składa się z części tych części". Tę prawdę, oczywistą dla zmysłów we wszystkich przypadkach, które można zasadnie poddać się ich sądowi, i tak ogólną, że rozciąga się tak daleko, jak sama natura, jako że odnosi się do wszelkich rodzajów zjawisk (jako że wszystkie zjawiska mogą być liczone), tę prawdę trzeba uważać za prawdę indukcyjną, albo za prawo natury najwyższego rzędu. I każde działanie arytmetyczne jest zastosowaniem tego prawa, albo innych praw, które można z niego wydedukować. To jest podstawa zabezpieczająca dla wszelkich obliczeń. Wierzymy, że 5 i 2 to tyleż, co 7, na podstawie tego prawa indukcyjnego, połączonego z definicjami innych liczb[35].

Frege nie zgadza się z argumentacją Milla, zarzucając mu, iż myli zastosowanie praw arytmetycznych z ogólnymi, czysto arytmetycznymi zdaniami[36].

---

[35] Ibidem, ks. III, rozdz. XXIV, § 5.

[36] G. Frege: *Podstawy arytmetyki*, [w:] *Antologia*, s. 104: „Znak + w licznych zastosowaniach zdaje się odpowiadać tworzeniu stosów; nie jest to jednak jego znaczenie, ponieważ w innych jego zastosowaniach może w ogóle nie być mowy o stosach, agregatach czy stosunku ciała fizycznego do jego części, jak na przykład wówczas, gdy rachunki odnoszą się do zdarzeń. Także tu można przecież mówić o częściach; wówczas jednak używa się tego słowa nie w sensie fizykalnym czy geometrycznym, lecz logicznym, jak wówczas, gdy zabójstwo ojców miasta nazywa się częścią zabójstwa w ogóle. Ma się tu do czynienia z podporządkowaniem logicznym. W ogólności, dodawanie nie odpowiada więc jakiemuś stosunkowi fizycznemu. Nie mogą zatem także ogólne prawa dodawania być prawami natury".

Dla Milla, prawdy indukcyjne, rządzące prawem dodawania, powstają przez obserwację wyniku fizycznego łączenia fizycznych obiektów. Problem, jaki rozważa tu Frege, jest następujący: każde zastosowanie ogólnych praw arytmetyki łączy je z czymś, co nie jest ogólne, tj. z konkretnymi przedmiotami. Błąd Milla polega na tym, że takie zastosowanie, czyli coś, co nie jest logiczne, włącza on do treści prawa arytmetycznego, a zatem interpretuje je on jako prawdy syntetyczne (z czym, oczywiście, Frege nie może się zgodzić). Jednak Frege jest daleki od tego, by prawa arytmetyki uznawać za puste reguły przekształcania znaków (por. krytykę formalizmu). To, co musi być w nich zawarte, to ogólna reguła wyrażająca możliwość ich zastosowania. Podobna własność musi również przysługiwać każdemu pojęciu arytmetycznemu, tzn. musi istnieć jego odniesienie przedmiotowe.

Gdyby ogólne prawa dodawania miałyby być prawdami indukcyjnymi – kontynuuje Frege w § 10 – to należałoby wskazać fakty, od których trzeba wyjść, aby dotrzeć do ogólności. Twierdzenia Milla, że te ogólne prawdy miałyby być prawdami indukcyjnymi, nie może przyjąć Frege z jednego zasadniczego powodu: postępowanie indukcyjne musi być w jakiś sposób usprawiedliwione, a jedyną podstawą do tego mogą być, zdaniem Fregego, ogólne zdania arytmetyki. Indukcja nie może być rozumiana jako nawyk, gdyż on nie jest żadnym naukowym gwarantem i opiera się na subiektywnych wrażeniach, co oczywiście mogłoby prowadzić do odrzuconego wcześniej psychologizmu. Indukcja musi opierać się na nauce o prawdopodobieństwie, a ona zaś musi zakładać wcześniej prawa arytmetyki.

Co więcej, szczególny charakter liczb powoduje, że nie można przeprowadzić analogii do przedmiotów fizycznych i zasad stosowanych wobec nich[37]. Liczby są nieprzestrzenne i bezczasowe, a ich miejsca w szeregu nie mogą być traktowane tak jak miejsca w przestrzeni. Każda liczba ma swoje szczególne własności. Jednak nie uprawnia to do stwierdzenia, że własność, która zachodzi w określonym miejscu szeregu, będzie też zachodzić w innym. W przypadku

[37] Ibidem, s. 105: „Liczby zachowują się też całkiem inaczej niż indywidua jakiegoś gatunku zwierząt, gdyż są w określony sposób uszeregowane przez naturę, a każda utworzona jest w jej tylko właściwy sposób i ma swoją odrębność, która daje o sobie znać szczególnie wyraźnie w przypadku 0, 1 i 2. Gdy w innych przypadkach uzasadnia się indukcyjnie jakieś zdanie odnoszące się do gatunku, zwykle już przez samą definicję pojęcia gatunkowego dany jest cały szereg wspólnych własności. Tutaj trudno znaleźć choćby jedną własność, której by wcześniej nie trzeba było dowodzić".

przedmiotów fizycznych określony skutek występuje zawsze, gdy tylko spełnione zostaną te same warunki.

Kontynuując w § 10 argumentację przeciwko uznaniu ogólnych praw arytmetyki za prawdy indukcyjne, Frege przedstawia przykład, który nie może wprawdzie służyć za dowód na poparcie jego własnej tezy, aczkolwiek kryje się za nim ważna zasada. Frege powołuje się na obserwację, iż w otworze wiertniczym, w którym napotyka się różne rodzaje skał, temperatura rośnie wraz ze wzrostem głębokości. Zauważa, że nie można jednak na podstawie takiej obserwacji wnioskować o dalszym wzroście temperatury na większych głębokościach. Można wprawdzie sformułować pojęcie „tego, co napotyka się przy dalszym wierceniu", co mogłoby sugerować wykorzystanie indukcji, ale uzasadnione twierdzenia można wyprowadzić jedynie ze stosunków przestrzennych warstw geologicznych na badanych głębokościach, do czego jednak nie wykorzystuje się indukcji. Podobnie można sformułować pojęcie „tego, co otrzymuje się przez sukcesywne powiększanie o 1". Oczywiście zachodzi zasadnicza różnica pomiędzy warstwami geologicznymi a liczbami: te pierwsze są jedynie znajdowane, natomiast liczby są konstruowane przez powiększanie o 1 i w ten sposób określona jest ich istota. Wszystkie własności liczb mogą być wywnioskowane z tego określonego sposobu ich powstawania:

> To zaś może oznaczać tylko tyle, że z tego, jak przez powiększanie o 1 powstała na przykład liczba 8, można wyprowadzić wszystkie jej własności. Przyznaje się przez to, iż własności liczb wynikają z ich definicji, tym samym zaś pojawia się możliwość udowodnienia ogólnych praw dotyczących liczb na podstawie wspólnego im wszystkim sposobu powstawania, natomiast szczególnych własności poszczególnych liczb dowodziłoby się na podstawie szczególnego sposobu ich powstawania przez sukcesywne powiększanie o 1[38].

Krytyka poglądów Milla pojawia się również w paragrafach dotyczących pojęcia liczby. Frege sprzeciwia się poglądowi, głoszącemu, że liczba jest czymś fizykalnym (fizykalną własnością rzeczy zewnętrznych). Argument Fregego jest bardzo wnikliwy, choć całkiem prosty, a dotyczy przykładu, gdzie różnicy liczbowej nie odpowiada różnica fizykalna. Przykładem tym jest para butów. Można jednocześnie powiedzieć, że jest to *jedna* para butów oraz że są

[38] Ibidem, s. 106. Tutaj kryje się ponownie, wspomniana już przy okazji dyskusji z Kantem, zasada, którą wykorzysta Frege przy formułowaniu definicji liczb naturalnych, a mianowicie sprowadzenie nieskończonego zbioru liczb do liczby 1 i operacji powiększania o 1.

to *dwa* buty. Obu tym stwierdzeniom, zawierającym dwie różne liczby, odpowiada ten sam stan rzeczy – para butów.

Fakt, że w języku liczby występują w formie przymiotnikowej jako atrybuty, nie oznacza, że liczby rzeczywiście są własnościami rzeczy zewnętrznych, tak jak barwa, kształt czy waga. Pierwszy przykład, przytaczany przez Fregego, pokazuje, że mówiąc o 1000 liściach na drzewie, nie przypisujemy im takiej cechy, jaką jest na przykład ich zielona barwa:

> Czyż nie w całkiem innym sensie mówi się o 1000 liściach drzewa niż o jego zielonych liściach? Przypisujemy każdemu z tych liści zieloną barwę, lecz nie liczbę 1000. Możemy wszystkie liście drzewa ująć razem pod wspólnym mianem listowia. Również ono jest zielone, lecz nie jest 1000. Komuż zatem przysługuje własność 1000? Wydaje się, że ani poszczególnemu liściowi, ani im wszystkim; być może w ogóle nie przysługuje ono rzeczom świata zewnętrznego[39].

Po drugie, kiedy zadaje się pytanie „Ile?", rozpatrując na przykład talię kart, należy dookreślić przedmiot pytania, czyli dodać do pytania słowa: kart, gier, wartości itp. A zatem pytanie o liczby („Ile?") zależy od czegoś dodatkowego, w przeciwieństwie na przykład do pytania o ciężar, długość itp. Trzeci przykład pokazuje, że przedmiot nie jest właściwym nośnikiem liczby, gdyż, w przeciwieństwie do barwy, można mu przypisać różne liczby – w przypadku talii kart można, w zależności od sposobu ujęcia, mówić o ilości kart, ilości gier, jakie można rozegrać tymi kartami itp. Można tu przywołać również powyższy przykład z parą butów. Kolejny argument związany jest z faktem, że można policzyć wszystko to, co można pomyśleć. Gdyby liczba była wyabstrahowana z rzeczy zewnętrznych, to nie można by bez zmiany sensu przenosić jej z jednych przedmiotów na inne lub na wydarzenia, przedstawienia, pojęcia.

Antyformalizm

W § 16 *Grundlagen* Frege porusza problem, w jaki sposób należy zinterpretować puste formuły logiki. Frege, w tym przypadku zgadzając się z Millem, odrzuca formalizm, opowiadając się za koniecznością zinterpretowania pojęć i twierdzeń matematyki. Uważa, że możliwość ich zastosowania jest ich nieod-

[39] Ibidem, s. 116.

łączną cechą. „Każdy, kto używa słów lub znaków matematycznych, sądzi, że one coś oznaczają, i nikt nie oczekuje, by z pustych znaków wypływało cokolwiek sensownego"[40] – wyraża swoje przekonanie Frege. Należy przy tym pamiętać, że zadanie, jakie postawił sobie Frege, to zbudowanie semantyki liczb naturalnych. Bez tego cała dyskusja Fregego z formalistami może być po prostu nieczytelna.

Frege dopuszcza możliwość operowania samymi znakami (np. przy przeprowadzaniu długich dowodów), bez bezpośredniego odwoływania się do ich treści, pod warunkiem, że odróżnia się znaki od ich treści, gdyż posługiwanie się samymi znakami nie może pozbawić ich treści. Same znaki wybierane są arbitralnie.

> Wystarczy wiedzieć, jak logicznie posługiwać się uzmysłowioną w tych znakach treścią, gdy zaś chce się ją stosować w fizyce, należy ponadto wiedzieć, jak musi się dokonywać przejście od niej do zjawisk. W takim zastosowaniu nie widać jednak właściwego sensu tych zdań. Traci się wówczas wielką część ich ogólności, a przy tym dołącza się coś szczególnego, co w innych zastosowaniach zostaje zastąpione czymś innym[41].

Jest to jedyny fragment w *Grundlagen*, w którym Frege opowiada się przeciwko formalizmowi w matematyce. Przestawiony powyżej warunek o konieczności istnienia odniesienia przedmiotowego znaków matematycznych jest głównym argumentem filozoficznym, jaki wykorzystuje Frege, krytykując formalizm w *Grundgesetze*. Dopiero w tej właśnie pracy przeprowadza Frege krytyczną dyskusję z formalistami (a dokładniej z dwoma jego przedstawicielami, J. Thomae i H. Heinem). Wcześniej jednak przedstawił na posiedzeniu Jenajskiego Towarzystwa Medycyny i Nauk Przyrodniczych referat, w którym wskazywał na słabe punkty formalistycznej interpretacji arytmetyki[42]. Po *Grundgesetze* jeszcze dwukrotnie Frege będzie atakował formalizm w artykułach, będących odpowiedzią na prace J. Thomae (*Antwort auf die Ferienplauderei*

[40] Ibidem, s. 111.

[41] Ibidem.

[42] Referat ten nosi tytuł *Über formale Theorien der Arithmetik*, [w:] *Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für das Jahr 1885*. Przedruk [w:] *Kleine Schriften*, op.cit., s. 103–111.

des Herrn Thomae[43] oraz *Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs neue Nachgewiesen*[44]).

Argumenty Fregego, skierowane przeciwko formalistom, wiążą się ze sobą, a więc stanowią zwarty wykład, w którym autor nie tylko wskazuje popełnione błędy, lecz także wyjaśnia, jak można rozwiązać te trudności. Argumentacja Fregego opiera się na czterech zasadniczych zastrzeżeniach:

1) formaliści definiują arytmetykę jako naukę o znakach, a więc *de facto* wykluczają liczby z arytmetyki;
2) nie potrafią wyjaśnić zastosowania matematyki;
3) porównując arytmetykę do gry, formaliści nie odróżniają jednak gry od jej teorii;
4) nie potrafią w swojej koncepcji spójnie wyjaśnić pojęcia ciągu nieskończonego.

Argumenty Fregego można zatem podzielić na krytykę rozwiązań technicznych, zaproponowanych przez Thomae i Heinego, oraz na zastrzeżenia natury filozoficznej. Do tych ostatnich zaliczyć trzeba nie tylko problem istnienia przedmiotów matematyki, lecz także problem zastosowania arytmetyki. Frege wskazuje, że formaliści popełniają zasadniczy błąd nie odróżniając znaku od tego, co on oznacza (dlatego liczby są dla nich jedynie zapisanymi znakami, a to nie wystarcza do wyjaśnienia wielu podstawowych problemów) oraz nie oddzielając gry od jej teorii. Fregemu zawdzięczamy pierwsze wyraźne odróżnienie języka od metajęzyka (choć tego ostatniego terminu Frege nie używa).

W §§ 87–88 *Grundgesetze* Frege rekonstruuje wyjściowe założenia formalistycznej koncepcji, które posłużą do wykazania, że ich konsekwencje nie dadzą się utrzymać.

Heine liczbami nazywa rzeczywiste, tj. zapisane bądź wydrukowane, fizyczne znaki, co ma zabezpieczyć istnienie liczb przed jakimikolwiek wątpliwościami. Podstawą tej definicji jest utożsamienie liczby z jej symbolem – nie można wątpić w istnienie liczby, skoro dany jest jej symbol. Frege zauważa, że oczywiście chodzi tu o istnienie empiryczne, a nie o dowód czysto logiczny czy arytmetyczny. Utożsamienia liczby z jej symbolem nie można przeprowadzić, gdyż zapisane symbole mają właściwości, których nie przypisuje się liczbom,

---

[43] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1906, t. 15, s. 586–590. Przedruk [w:] ibidem, s. 324–328.

[44] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1908, t. 17, s. 52–56. Przedruk [w:] ibidem, s. 329–333.

np. właściwości geometryczne, czyli wielkość, czy fizyczne i chemiczne tuszu, którym są zapisane, a tych przecież nie przypisuje się liczbom. I odwrotnie – liczby mają właściwości, których nie można przypisać znakom. Wystarczy w zdaniu „3 jest większe niż 2" zapisać 2 większą czcionką, aby zdanie to było fałszywe, gdyż graficzny symbol 2 będzie fizycznie większy od symbolu 3[45].

Thomae odrzuca pytanie o to, czym jest liczba, jako nieistotne dla arytmetyki. Koncepcja formalnej arytmetyki ma, zdaniem jej zwolenników, usunąć wszelkie problemy metafizyczne, związane z istnieniem liczb. Według Thomae, arytmetyka związana jest jedynie z pewnymi regułami, które rządzą sposobem operowania znakami, jakim są liczby. Arytmetyka nie zajmuje się odniesieniem przedmiotowym tych znaków.

Wyłania się stąd nowa koncepcja arytmetyki, którą Frege nazywa formalną i odróżnia od treściowej (czyli arytmetyki z odniesieniem przedmiotowym, w której znaki posiadają treść). Różnią się one przede wszystkim koncepcją liczby: w arytmetyce treściowej znaki są pomocniczym środkiem dla oznaczania liczb, które są niezmysłowym przedmiotem nauki.

Thomae porównuje arytmetykę do gry w szachy. W tej interpretacji figurom szachowym, których użycie określone jest przez reguły gry, odpowiadają zapisane, zmysłowe symbole, które Thomae nazywa liczbami. Dla tych właśnie symboli należy ustanowić reguły gry rachunkowej (gry arytmetycznej). Niebezpieczeństwo tej dowolności jest bardzo poważne, gdyż nie ma żadnych ograniczeń przy określaniu prawdziwości określonego wyrażenia – wystarczy powiedzieć, że wynika ona z przyjętych reguł. Nie trzeba dowodzić, że liczby posiadające pewne właściwości, istnieją. Jeśli reguły gry potraktuje się jako opisujące właściwości tych figur, to można dowolnie tworzyć przedmioty posiadające

[45] Podobne zastrzeżenia przedstawia Frege w artykule *Funkcja i pojęcie*, gdzie zarzuca formalistom, że nie odróżniają cyfr od liczb: „Rozpowszechniona dziś skłonność, by nie uznawać za przedmiot niczego, co nie podpada pod zmysły, prowadzi do tego, że cyfry bierze się za liczby, za właściwy przedmiot badania. A wtedy 7 i 2 + 5 są rzeczywiście czymś różnym. Poglądu tego nie da się jednak utrzymać, gdyż nie odwołując się do znaczenia cyfr nie można w ogóle mówić o jakichś arytmetycznych własnościach liczb. Tak np. ta własność liczby 1, że pomnożona przez siebie daje znowu siebie samą, byłaby czystą fikcją. Żadne najdokładniejsze badania mikroskopowe albo chemiczne nie doprowadzą bowiem nigdy do wykrycia owej własności w tym niewinnym torze, który nazywamy jedynką. Ktoś nazwie to może definicją. Żadna jednak definicja nie jest w tym sensie twórcza, że może nadawać rzeczy takie własności, jakich ta po prostu nie ma; z wyjątkiem jednej: oznaczania tego, czego z mocy definicji jest znakiem. To natomiast, co nazywamy cyframi, są to twory o własnościach fizycznych i chemicznych, zależnych od przyborów piśmiennych". G. Frege: *Pisma semantyczne*, op.cit., s. 20.

te własności. Jeśli liczby traktowane są jako znaki, to niemożliwe jest wprowadzenie w arytmetyce formalnej definicji, które ustalają przecież sens, jaki wiąże się z pewnym słowem bądź znakiem.

Thomae zauważa jednak pewną różnicę pomiędzy regułami szachów a regułami arytmetyki – te ostatnie wnoszą bowiem coś do wiedzy o naturze. Frege wyprowadza wnioski z tej niekonsekwencji formalistów. Wewnątrz samej arytmetyki formalnej, reguły owej gry rachunkowej są równie dowolne, jak te szachów, a co więcej, są całkowicie dowolne. Różnicę pomiędzy arytmetyką formalną a szachami, na którą wskazuje Thomae, można dostrzec jedynie wtedy, gdy rozważa się jej zastosowanie. Jedyną przyczyną, dla której można uznać wyższość arytmetyki nad innymi grami, to jej wartość dla nauk przyrodniczych. Jednak ta podstawa rzekomej wyższości arytmetyki formalnej leży poza nią samą, co obala ten argument.

Frege nie neguje jednak faktu, iż arytmetyka różni się od gier formalnych. Jednak uzasadnienie tego przekonania, zaproponowane przez formalistów, jest błędne. Jedyną podstawą do uznania przewagi arytmetyki nad grą w szachy jest fakt, iż znaki liczbowe mają swoje odniesienie przedmiotowe, a figury szachowe – nie (por. § 90 *Grundgesetze*). W przypadku szachów nie można mówić o możliwości ich zastosowania, gdyż układ figur szachowych nie wyraża żadnej myśli (we Fregowskim rozumieniu). Aby zdanie miało znaczenie, każda nazwa musi mieć znaczenie. Jeśli nazwy nie mają znaczenia, a tak jest w przypadku arytmetyki formalnej, to całe zdanie nie ma znaczenia, czyli wartości logicznej. Natomiast układ znaków liczbowych (posiadających odniesienie przedmiotowe), czyli pewna formuła arytmetyczna, wyraża myśl, która może być osądzona jako prawdziwa bądź fałszywa. I tylko z takiego zdania można wnioskować. Stosowalność arytmetyki stanowi o jej naturze – przenosi ją z poziomu gry na poziom nauki. Arytmetyka nie jest grą, gdyż w przeciwieństwie do gier, może być stosowana[46].

[46] G. Frege: *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, t. II. Jena 1903, § 91, s. 100: „W arytmetyce treściowej równania i nierówności są zdaniami wyrażającymi myśli, natomiast w arytmetyce formalnej są porównywalne do układu figur szachowych, przekształcanych zgodnie z pewnymi regułami, bez odwoływania się do jakiegokolwiek sensu. Gdyby rozpatrywać je tak, jakby posiadały sens, zasady te nie mogłyby być ustanawiane dowolnie: należałoby je tak wybrać, aby z formuł wyrażających prawdziwe myśli, można wyprowadzać tylko formuły, wyrażające prawdziwe zdania. A zatem należałoby odrzucić punkt widzenia arytmetyki formalnej, która kładzie nacisk na to, że reguły operowania znakami są ustalane całkowicie dowolnie. Następnie można zapytać, czy znakom można by przypisać sens, zgodny z wcześniej ustalonymi

Problem użyteczności arytmetyki musi być, zdaniem Fregego, rozwiązany niezależnie od tych nauk, wobec których może być zastosowana. Wiadomo, że liczba może być odnoszona zarówno wobec długości, czasu, masy, a więc w różnych dziedzinach wiedzy. Formaliści przerzucają problem stosowalności na inne nauki, uwalniając arytmetykę od pewnego rodzaju pracy, a mianowicie od rozwiązania problemu ogólnej metody stosowania. W ten sposób problem stosowalności jest przerzucany pomiędzy naukami i wpada w pustkę pomiędzy różnymi dziedzinami wiedzy, pozostając problemem „bez ojczyzny". Aby być nauką, argumentuje Frege, arytmetyka musi posiadać swój przedmiot, a jest nim to, co ogólne i wspólne we wszystkich jej zastosowaniach. To, co proponują formaliści jest jedynie pozorem nauki:

> Przepaść dzieląca arytmetyczne formuły i ich zastosowania nie zostałaby przezwyciężona. Do tego konieczne jest, aby formuły wyrażały sens oraz by reguły miały swoje ugruntowanie w odniesieniu przedmiotowym [*Bedeutung*] znaków. Celem musi być nauka i to musi determinować wszystko, co się dzieje[47].

Argument o stosowalności jest głęboko filozoficzny i dotyczy nie tylko samej arytmetyki, lecz także i innych nauk. Zapewne Frege nie zgodziłby się z instrumentalizmem w fizyce. Ten argument wpisuje się w jego filozoficzne przekonanie o istnieniu obszaru przedmiotów logicznych. Biorąc pod uwagę jego program sprowadzenia arytmetyki do logiki, argument o stosowalności arytmetyki wiąże się wyraźnie z problemem stosowalności samej logiki.

Frege obawiał się, że jego ideografia mogłaby być potraktowana jako formalna gra, a więc wykorzystana na poparcie formalistycznej interpretacji. Zasady wnioskowania i inne prawa jego ideografii można by potraktować jako dowolne, nie mówiąc nic o sensie i znaczeniu użytych znaków. Znaki można by traktować jako figury, zaś przedstawienie wnioskowania jako ruchy w szachach, a dokładniej, jako przejścia od jednego układu figur do innego, co jednak

regułami. Jednak takie problemy znajdują się całkowicie poza arytmetyką formalną i pojawiają się tylko wtedy, gdy wynika problem stosowalności. Ale jednak muszą być rozpatrywane, a zatem bez myśli jako treści niemożliwa jest stosowalność. Dlaczego nie można zastosować układu figur szachowych? Oczywiście, dlatego, że nie wyrażają żadnej myśli. Gdyby je wyrażały i każdy ruch szachowy zgodny z zasadami, odpowiadałby przejściu od jednej myśli do innej, to można by pomyśleć także stosowalność szachów. Dlaczego równania arytmetyczne mogą być stosowalne? Tylko dlatego, że wyrażają myśli. Jak można by zastosować równanie, które nic by nie wyrażało i byłoby tylko grupą figur, przekształcaną w inną grupę figur, zgodnie z pewnymi zasadami".

[47] G. Frege: *Grundgesetze*, op.cit., t. II, § 92, s. 101.

nie odpowiadałoby przejściu od jednej myśli do innej. Frege przypuszcza nawet, że gdyby ktoś otrzymał jako dane wyjściowe określone formuły i definicje z I tomu *Grundgesetze* oraz dozwolone zasady przekształceń, to prawdopodobnie mógłby on rozwiązać określony problem (np. przeprowadzić dowód jakiegoś twierdzenia), bez znajomości sensu i znaczenia używanych znaków oraz myśli wyrażanych przez zdania. A jednak takie puste operowanie znakami, twierdzi Frege, to nie wszystko: mimo że wykonana zostałaby pewna praca intelektualna, to jednak brakowałoby zupełnie tego ciągu myśli, które towarzyszą takiej pracy i czynią ją interesującą. Wydaje się, że Frege przykładał wielką wagę do tego filozoficznego uzasadnienia i konieczności ustalenia sensu i znaczenia przedmiotów matematycznych, czyli do interpretacji matematyki. Co więcej, uważał, że odrzucenie interpretowania myśli, nie upraszcza lecz utrudnia rozumienie problemu.

Co ciekawe, w referacie *Über formalen Theorien der Arithmetik* Frege podaje dwa sposoby interpretacji określenia „teoria formalna". Pierwsze znaczenie, z którym się zgadza, wyraża podstawowe założenie programu logicyzacji matematyki, a mianowicie stwierdzenie, że wszystkie zdania arytmetyki można wyprowadzić czysto logicznie jedynie z definicji. Drugie znaczenie, jakie przypisuje się określeniu „teoria formalna", zawiera założenia formalistycznej interpretacji matematyki, i to właśnie próbuje w swoim referacie odrzucić Frege. A zatem Frege dopuszczał pewną wersję formalnego wyprowadzania teorii, ale nie formalizm z jego założeniami. Formalne wyprowadzanie teorii będzie usprawiedliwione tylko wtedy, gdy będzie miało u swych podstaw uzasadnienie w postaci odniesienia przedmiotowego znaków.

Trafną uwagę, komentując tę Fregowską obawę, sformułował M. Resnik: filozofowie często wykorzystują sukcesy pewnych technicznych rozwiązań na poparcie własnych filozoficznych tez, dotyczących natury matematyki[48]. W szczególności: możliwość sformalizowania pewnych dziedzin matematyki nie oznacza, że cała matematyka polega na operowaniu systemami formalnymi, a formalistyczna interpretacja matematyki wymaga dodatkowych argumentów.

Drugi argument Fregego związany jest z błędem, jaki popełniają formaliści, nie odróżniając gry od jej teorii.

Przedmiotem gry w szachy są jej figury. Frege, pytając, co jest przedmiotem gry rachunkowej, cytuje Thomae: „System znaków gry rachunkowej

[48] Por. M. Resnik: *Frege and the Philosophy of Mathematics*, op.cit., s. 62.

powstaje ze znaków 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 w wiadomy sposób"[49]. Zasadniczy błąd Thomae polega, zdaniem Fregego, na tym, że zakłada on jako znane to, co czyni podstawą swojej teorii. Jeśli więc ktoś chciałby nauczyć się owej formalistycznej gry rachunkowej, musiałby wcześniej znać sposób, w jaki należy z wymienionych znaków stworzyć wszystkie pozostałe. Nawet, jeśli ten sposób byłby rzeczywiście znany matematykom i logikom, to proponując po raz pierwszy nową interpretację arytmetyki, należało wszystkie zasady wyjaśnić, czego jednak Thomae nie uczynił, zastępując wyjaśnienia określeniem „w wiadomy sposób". Kolejny problem polega na tym, że nie wiadomo, czy symbole takie, jak dwukropek, nawiasy, znak równości, kropki i inne, używane w arytmetyce, również należą do gry rachunkowej oraz, w jaki sposób należy utworzyć je z wymienionych znaków.

W artykule *Antwort auf die Ferienplauderei des Hernn Thomae*[50] Frege zarzuca formalistom, że przenoszą wiele z arytmetyki treściowej do formalnej tam, gdzie jest im to potrzebne, nie widząc, iż tym samym arytmetyka formalna jest zbędna. Pokazując graczom, które symbole są figurami w grze, formaliści potrzebują pewnych reguł przekształcania, pozwalających na operowanie tymi symbolami. Thomae uznaje za jedną z zasad swojej arytmetyki formalnej prawo przemienności dodawania („a + a' = a' + a"). Można więc zapytać, co stwierdza ta zasada. Nie stwierdza się tu przecież, że symbol „a + a'" jest identyczny z symbolem „a' + a". Jeśli znakom liczbowym nie przypisuje się treści, nie można również zdefiniować działań na liczbach, gdyż działania odnoszą się do treści znaków liczbowych, a nie do samych znaków. W referacie *Über formale Theorien der Arithmetik*[51] Frege wyjaśnił to na przykładzie dodawania ułamków. Suma ułamków musi być ogólnie wyjaśniona jako „suma $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jest $\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$". Stąd jednak nie można wyprowadzić, że suma $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$ wynosi 1, gdyż otrzymuje się jedynie $\frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$, a to jest tylko pusta figura. Nie można również stwierdzić, że $\frac{1}{2}$ jest równe $\frac{3}{6}$, gdyż są to tylko figury. Równość taką

[49] G. Frege: *Die Unmöglichkeit der Thomaschen formalen Arithmetik*, op.cit., s. 329.

[50] G. Frege: *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae*, s. 325.

[51] G. Frege: *Über formale Theorien der Arithmetik*, op.cit., s. 108.

można odnieść jedynie wobec treści, a jeśli znakom nie przypisuje się żadnej treści, to równość ta nie ma sensu. Skoro jednak formaliści dopuszczają takie działania, to muszą zakładać arytmetykę treściową.

Drugi błąd, jaki popełnia Thomae, interpretując arytmetykę jako grę rachunkową, dotyczy zasad gry. W szachach sprawa jest określona: jedna figura szachowa na polu szachownicy zostaje zastąpiona przez inną bądź odrzucona z szachownicy. Działania te określone są przez reguły gry, ale żaden ruch ani ustawienie figur szachowych nie wyraża reguł, bo zadaniem figur szachowych nie jest wyrażanie czegokolwiek, a tym bardziej myśli. Reguły nie są przedmiotem gry, lecz podstawą teorii tej gry. Mając daną grę w szachy można utworzyć jej teorię i to właśnie ona zawiera zinterpretowane zdania o ruchach figur szachowych i ich układzie. Tego odróżnienia gry od jej teorii formaliści jednak nie zauważają.

Jak wygląda to w przypadku arytmetyki?

> § 93. Arytmetyka formalna wypiera się tego celu [tj. bycia nauką – M.K.]. Jeśli jest tylko grą z figurami, zawiera równie mało twierdzeń i dowodów, co gra w szachy. Wprawdzie w teorii szachów mogą być twierdzenia, ale nie ma ich w samych szachach. W formalnej arytmetyce są tylko reguły. Ale możliwa do pomyślenia jest teoria formalnej arytmetyki i w niej dane będą twierdzenia, mówiące np. że można, zgodnie z regułami gry, przejść od pewnej grupy figur do innej grupy.
>
> Czy w formalnej arytmetyce możliwe są definicje? W żadnym wypadku te, które ustanawiają znaczenie [*Bedeutung*] znaków arytmetycznych, gdyż nie rozpatruje się tu znaczeń. Zamiast definicji wprowadza się tu nowe figury połączone z regułami operowania nimi. Tylko to można rozumieć przez określenie „definicje formalne" o Thomae. Jednak w teorii arytmetyki formalnej właściwe definicje są możliwe, ale nie ustanawiają one znaczenia figur, gdyż ich znaczenia nie rozpatruje się tu, lecz wyjaśnia się wyrażenia, dzięki którym można krócej ująć twierdzenia tej teorii.
>
> Odróżnienie pomiędzy samą grą a jej teorią, którego nie dokonał Thomae, ma zasadnicze znaczenie dla problemu. Jeśli w wyjaśnieniach Thomae napotka się twierdzenia, muszą one być zaliczone do teorii gry. Te twierdzenia tylko pozornie mówią coś o figurach, których własności są prawie całkiem bez znaczenia i są używane jedynie dla odróżnienia figur. Te twierdzenia rzucają światło na własności

> reguł gry. W teorii szachów nie bada się właściwie figur, lecz rozpatruje się zasady i ich konsekwencje[52].

A zatem formalna arytmetyka jest możliwa pod warunkiem, że zawsze będzie się ściśle oddzielać grę od teorii tej gry, tak jak w logice Fregego – ideografię od zdań mówiących o ideografii. Czemu więc Frege nie podjął próby budowy arytmetyki w taki właśnie sposób? Przede wszystkim dlatego, że nie mógł przyjąć podstawowego założenia formalistów, że znaki w grze rachunkowej nie mają odniesienia przedmiotowego. Możliwość zbudowania metaarytmetyki nie oznaczała dla Fregego, że w samej arytmetyce należy zajmować się pustymi znakami. Drugie przekonanie, którego nie mógł przyjąć Frege, dotyczy dowolności, którą dopuszczają formaliści we wprowadzaniu reguł gry. Frege był przekonany i nie raz dawał temu wyraz, pisząc o swojej filozofii logiki, że wszelkie prawa są już ustalone, bytują w świecie tego, co stałe i niezmienne, a zadaniem podmiotu poznającego nie jest ich wymyślanie, lecz ujmowanie.

Ostatni argument Fregego dotyczy możliwości skonstruowania ciągu nieskończonego w arytmetyce formalnej. Thomae i Heine wprowadzają ciągi nieskończone bez żadnych uzasadnień. Pierwsze zastrzeżenie, jakie czyni Frege, opiera się na formalistycznej koncepcji liczby. Skoro liczby są zapisanymi, fizycznymi znakami, to żaden człowiek nie jest w stanie i nigdy nie będzie mógł zapisać nieskończonego ciągu takich znaków.

Podsumowanie

Przed prezentacją własnej definicji liczby, Frege przeprowadził krytykę panujących w filozofii matematyki poglądów dotyczących natury arytmetyki. Swoją propozycję sformułował w opozycji wobec psychologistów, kantystów, empirystów i formalistów. Wpływ Fregego na filozofię matematyki jest zatem podwójny: nie tylko zaproponował on nowe rozwiązania, lecz także wykazał błędy i niespójność ówczesnych poglądów. Tej właśnie krytycznej części filozofii matematyki poświęcony został niniejszy artykuł.

---

[52] G. Frege: *Grundgesetze*, op.cit., § 93, s. 101–102.