Youschkevitch, A. P.

Traditions archimèdiennes en mathèmatique au Moyen Age

Organon 4, 95-103

1967

A. P. Youschkevitch (U.R.S.S.)

TRADITIONS ARCHIMÈDIENNES EN MATHÉMATIQUE AU MOYEN AGE

L'influence exercée par les ouvrages d'Archimède sur l'évolution des sciences mathématiques au Moyen Age et plus tard fut immense; son analyse detaillée pourrait faire l'objet d'une grande étude spéciale Dans cette communication, j'aborderai certains aspects de ce problème qui est loin d'avoir été étudié dans toute son étendue. Je montrerai, sur plusieurs examples, comment les méthodes et les problèmes du grand Syracusain influencèrent, en fonction du lieu et du temps, la création mathématique des savants médiévaux. Il serait tout naturel de commencer par la science des pays islamiques.

Les traductions des travaux d'Archimède suivent de près la traduction en langue arabe des *Eléments* d'Euclide qui, dans les pays islamiques, a préparé le terrain à l'assimilation rapide de l'héritage mathématique grec. Au milieu du IX^{e} siècle, Thabit ibn Qurra traduisit en langue arabe *La mesure du cercle, Sur la sphère et le cylindre* et, probablement, une partie des commentaires s'y rapportant élaborés par Eutocius. De plus, ibn Qurra remania le *Livre des lemmes,* le *Livre sur la division du cercle en sept parties,* le *Livre sur les cercles tangents.* L'ouvrage d'Archimède sur les lignes parallèles (non retrouvé jusqu'à présent) et certains autres existaient également en langue arabe. La *Quadrature de la parabole, Sur les spirales, Sur les conoïdes et sphéroïdes, L'épitre à Eratosthène sur la méthode, Arénaire, Sur l'équilibre des figures planes* et *Sur les corps flottants* probablement tout à fait inaccessibles ne furent pas traduits. D'ailleurs, les savants arabes étaient partiellement au courant de ces travaux soit par des aperçus ou des exposés dans d'autres ouvrages, appartenant à Archimède même ou à d'autres auteurs. Il faut ajouter que ibn Qurra traduisit aussi *Les coniques* d'Apollonius. Thabit ibn Qurra et les trois frères savants, Muhammad, Ahmad et al-Hasan, connus sous le nom de Banu Musa, ou autrement les fils de Musa ibn Shakir, avec lesquels il travailla à Bagdad, furent les premiers propagateurs et en même temps les continuateurs des traditions d'Archimède dans les pays islamiques. Dans leur *Livre sur la mesure des figures planes et solides,* qui connut une très large popularité les Banu Musa énoncèrent toute une série de théorèmes fondamentaux appartenant aux traités *La mesure du cercle* et *Sur la sphère et le cylindre,* et appliquèrent la méthode antique d'exhaustion pour les démontrer. Quand au calcul approché du nombre que nous notons par la lettre π, ils appliquèrent le procédé archimédien d'approximation de la circonference par des suites de 3.2^n — polygones inscrits et circonscrits ramenant ainsi les calculs à des extractions de racines carrées. Dans ce même ouvrage, le fameux problème de la trisection de l'angle est résolu par la méthode d'intercalation, tout comme dans le *Livre des lemmes* d'Archimède. Il contient également la règle permettant de calculer l'aire du triangle en fonction de ses trois côtés que Héron d'Alexandrie emprunta probablement à Archimède. Certaines differences essentielles dans l'énonce des propositions (par exemple, de l'expression du volume de la sphère) témoignent soit de l'indépendance des Banu Musa, soit encore qu'ils etaient en possession de sources qui nous sont restées inconnues. En tous cas, ils connaissaient parfaitement les procédés de démonstration d'Archimède et se les étaient appropriés spirituellement.

Il serait superflu d'insister sur l'importance de l'introduction par les Banu Musa dans l'usage mathématique des théorèmes d'Archimède sur le cercle et les corps ronds et de ses méthodes de calcul. Tout ceci eut des consequences profondes. Je me contenterai de mentionner que, encore six cents ans après les Banu Musa, en 1424, al-Kashi calcula le nombre π avec 17 décimales exactes après la virgule à l'aide des 3.2^{28} — polygones inscrits et circonscrits.

L'enthousiasme fut grand quand on prit connaissance de l'héritage d'Archimède. Ses oeuvres, ainsi que les travaux d'Apollonius attirèrent l'attention des savants de Bagdad sur les coniques, d'autant plus qu'à cette époque ou peu de temps après, on apprit qu'ils servaient à résoudre certains problèmes exprimés par des équations du troisième degré. Probablement, les propriétés optiques des miroirs paraboliques étaient également connues. Il n'est pas étonnant que les premiers efforts aient été orientés vers la démonstration du théorème d'Archimède sur la surface du segment parabolique mentionné tout à fait au debut du traité *De la sphère et du cylindre* mais demontré dans l'ouvrage *La quadrature de la parabole* que Bagdad ne possédait pas. Thabit ibn Qurra calcula la quadrature du segment parabolique autrement qu' Archimède recréant lui-même la méthode des sommes intégrales appliquées par Archimède dans deux traités qui lui étaient également inconnus. Le procédè d'ibn Qurra, équivalent au calcul de l'intégrale de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, représentait une nouvelle performance de l'ancienne technique d'intégration: les intégrations d'Archimède correspondaient au calcul des intégrales des fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$. Dans un autre ouvrage, ibn Qurra recalcula autrement qu'Archimède le volume du corps de révolution obtenu par la rotation du segment de parabole limité par un diamètre quelquonquee et la demi-corde conjuguée autour de ce diamètre. Enfin, il posa le problème analogue mais plus difficile de la cubature du corps obtenu par la rotation du segment de la parabole autour de sa base, appelé aujourd'hui fuseau parabolique. Plusieurs savants continuèrent les recherches d'ibn Qurra donnant ainsi d'autres démonstrations des mêmes résultats. Environ vers l'an 1000, le mthématicien et opticien du Caïre, Ibn al-Haytham, qui résolut le problème d'ibn Qurra de la cubature du fuseau parabolique équivalent à l'integration de la fonction $f(x) = x^4$ par la méthode d'exhaustion acheva ces recherches.

Notons que ces remarquables recherches en mathématique infinitesimale, s'étendant environ sur cent cinquante ans, intéressèrent fort peu de mathématiciens et qu'elles cessèrent presque entièrement après Ibn al-Haytham. L'influence de ces idées d' Archimède, après avoir noté deux ou trois resultats remarquables, ne s'avéra que trop fragile. Les problèmes d'intégration étaient restés en marge des lignes principales du développement des mathématiques dans les pays islamiques et, dans la science mathématique d'alors, leur signification n'était pas grande.

En revanche, l'ouvrage *De la sphère et du cylindre* communiqua d'énergiques impulsions à l'algèbre, une des principales sciences dans les pays islamiques. Déjà au IX^e^ siècle, la 4^e^ proposition du 2^nd^ livre de cet ouvrage, dans laquelle on demande de partager la sphère d'un diamètre donné par un plan en deux segments dont le rapport des volumes est donné également, attira particulièrement l'attention. La solution d'Archimède, introuvable jusqu'à nos jours, et celles données par d'autres géomètres grecs étaient apparémment inconnues des mathematiciens des pays islamiques. Au milieu du IX^e^ siècle, al-Mahani fut le premier à avoir exprimé explicitement ce problème par une équation cubique dont il ne put trouver la solution. Dans la première moitié du X^e^ siècle, Abu Ja'far al-Khazin réussit à construire les segments du diamètre cherchés. Vers la fin du même siècle, al-Kuhi ramena aux équations cubiques deux autres problèmes d'Archimède faisant suite immedéiatement à celui qui vient d'être mentionné; il ajouta son propre problème sur la construction du segment sphérique d'après son volume et son aire. Al-Kuhi donna la solution complète des trois problèmes. En même temps, Abu Nasr ibn Iraq ramena à une équation cubique le problème de la détermination du côté de l'heptagone régulier inscrit dans un cercle de rayon donné. Archimède résolut ce problème par la méthode d'intercalation et ibn Iraq à l'aide d'une équation cubique. Dans tous ces cas, les mathématiciens arabes appliquaient une seule et même méthode empruntée aux Grecs anciens. Le segment inconnu, c'est-à-dire la racine positive de l'équation cubique, se determine comme l'abscisse du point d'intersection de deux coniques choisis convenablement. De nombreux problèmes ayant une signification pratique en géomètrie et en trigonomètrie dont celui de la trisection de l'angle avaient été ramenés aux équations cubiques. Déjà au XI^e siècle, Abu'l Jud et plus particulièrement Umar Khayyam élaborèrent minutieusement une théorie géomètrique des équations du troisième degré qui servit de base de principe aux procédés numériques de résolution — théorie dans laquelle il est impossible de ne pas reconnaitre certains traits de ressemblance avec l'algèbre de Descartes. Dans la première moitié du XV^e siècle al-Kashi étendit cette même méthode aux equations du quatrième degré. Malheureusement, les résultats qu'il a obtenu dans ce domaine nous sont restés inconnus.

Certains des travaux de géometrie d'Archimède jouèrent un rôle notoire dans l'évolution de la trigonométrie dont les premiers succès importants dans les pays islamiques furent associés à l'assimilation des *Siddhanta* indiennes et d'*Almageste* de Ptolémé. L'ouvrage sur la détermination des cordes du cercle de al-Biruni, écrit au début du XI^e siècle en temoigne. Ici, la place la plus importante est occupée par la proposition du *Livre sur les cercles tangents* d'Archimède: si une ligne brisée constituée de deux segments est inscrite dans un arc de circonférence, alors la perpendiculaire abaissée du milieu de l'arc sous--tendu sur le grand segment partage la ligne brisée en deux parties égales en longueur. Dans les livres arabes, cette proposition a reçu plus de vingt démonstrations et al-Biruni l'appliqua pour démontrer des théorèmes de trigonométrie dans son *Al-Qanun al-Mas'udi* terminé en 1030.

Omettant sciemment les autres découvertes mathématiques d'Archimède, dont le contenu entra d'une manière ou d'une autre dans les mathématiques des pays islamiques (par exemple, les théorèmes sur les polyèdres semi-réguliers, le théorème de Héron-Archidème, le *Livre des lemmes* commenté par al-Kuhi et son contemporain al-Nasavi et d'autres), je m'arrêterai brièvement encore sur ses travaux en mécanique qui ne sont pas sans signification pour la science de ces pays. Il faut mentionner ici en premier lieu le *Livre sur le Qarastun* de Thabit ibn Qurra, consacré à la balance à bras inégaux (la romaine). L'influence de la statique et de la théorie du levier d'Archimède, ainsi que sa méthode de démonstration, vient ici rejoindre celle des idées sur la statique de l'école d'Aristote; cependant ces dernières prédominent. On ne sait pas exactement dans quelle mesure les savants des pays islamiques connaissaient l'hydrostatique d'Archimède. En tout cas, ils appliquaient le principe d'Archimède pour déterminer les poids spécifiques de différents corps, notamment des pierres et des métaux précieux dans le but de déceler les imitations et pour établir la composition des alliages. On peut mentionner ici les travaux de al-Biruni, Khayyam (qui exprima dans le langage algébraique le problème d'Archimède sur les alliages d'or et d'argent) et de son élève al-Khazini, auteur du *Livre sur la balance de la sagesse,* c'est-à-dire la balance hydraulique.

Ainsi, les travaux d'Archimède eurent une influence extrêmement fructueuse pour le progrès des mathématiques et de la mécanique dans les pays islamiques. Les problèmes posés par Archimède furent le point de départ pour de nouvelles recherches. Ses méthodes furent appliquées dans la pratique et quelquefois developpées, parfois même elle furent redécouvertes. Mais je voudrais surtout souligner que le destin de la tradition archimédienne, dans une mesure déterminante, se définissait par les conditions générales de l'évolution scientifique dans les pays islamiques. Ainsi, ses travaux communiquèrent une première impulsion à l'élaboration de la théorie des équations cubiques et contribuèrent au progrès ultérieur de la trigonométrie. En même temps, l'élaboration des procédés d'integration, idées des plus profondes d'Archimède, fut un episode certes marquant, mais relativement insignifiant et éphémère. On peut supposer que les méthodes différentielles d'Archimède, exposées dans le traité *Sur les spirales,* si ce dernier avait été accessible aux savants arabes, auraient connu le même sort. Ce qui vient d'être dit se rapporte également à ses théorèmes profonds sur l'équilibre des corps flottants.

En Europe du Moyen Age, les ouvrages d'Archimède furent connus au XII^{e} siècle d'abord grâce à leurs traductions et élaborations arabes. Le traité *La mesure du cercle* fur traduit deux fois de l'arabe en latin. La première fois probablement par Platon de Tivoli et la seconde fois par Gérard de Crémone. C'est à cette époque qu'apparut la traduction latine du *Livre sur la mesure des figures planes et solides* de l'arabe de Banu Musa ainsi que celle du *Livre d'Archimède sur les surfaces courbes,* traduit probablement du grec. Ce dernier ouvrage n'est pas d'Archimède. On y demontre à l'aide de la méthode d'exhaustion plusieures propositions sur les surfaces et les volumes du cylindre, du cône et de la sphère contenues dans l'ouvrage *Sur la sphère et le cylindre.* Ces trois travaux connurent une grande popularité chez les savants de l'Europe médiévale. Je citerai comme exemple le livre des Banu Musa qui fut utilisé par Léonard de Pise (1220) dans sa *Pratique de géométrie* (d'ailleurs ce dernier en aurait pu prendre connaissance dans l'original) et que Roger Bacon mentionna, ainsi que l'ouvrage sur les surfaces courbes. La traduction du *Livre sur le Qarastun* de

Thabit ibn Qurra, due au même Gérard de Crémone, influença au debut du XIII^e siècle Jordanus Nemorarius et son école; elle les initia à la statique d'Archimède et des péripatéticiens. Il était question, dans le travail pseudo-archimédien *Sur les poids d'Archimède,* composé par un auteur inconnu du XIII^e siècle, du principe hydrostatique d'Archimède et de la question des alliages. D'ailleurs les problèmes hydrostatiques n'intéressaient guère les savants du Moyen Age.

Aux environs de 1270, Guillaume de Moerbecke, qui à l'époque séjournait en Italie, traduisit du grec presque tous les ouvrages d'Archimède qui nous sont parvenus dans cette langue, et deux des trois commentaires conservés d'Eutocius. Malgré quelques insuffisances, cette traduction fut une excellente performance pour l'époque. De plus, par suite, on s'en servit aux XV^e et XVI^e siècles.

Toutefois, l'influence de cette traduction sur les mathématiques des deux siècles suivants ne fut pas importante bien que des savants aussi éminents que Jean de Murs, Nicole Oresme, Nicolas de Cues et autres, en aient eu connaissance et qu'ils connaissaient aussi des copies et des élaborations des ouvrages séparés qui en faisaient partie: *La mesure du cercle, Sur les spirales, Sur la sphère et le cylindre, Sur les conoïdes et les sphèroïdes.* Ceci est dû en partie à ce que la traduction avait été faite à des endroits éloignés des centres scientifiques principaux de l'époque; mais ce n'est qu'une cause secondaire. En général, les ouvrages d'Archimède influencèrent beaucoup moins l'évolution des mathématiques en Europe du XIII^e au XV^e siècles que dans les pays islamiques du IX^e au XI^e siècles. À mon point de vue ce fait est dû aux particularités spécifiques de la science européenne au Moyen Age. L'astronomie et les domaines de trigonométrie et de mathématique numérique qui s'y rapportent n'ont atteint en Europe un niveau comparable à celui d'Alexandrie et de Bagdad que dans la première moitié du XV^e siècle. La lutte pour l'introduction de l'arithmétique décimale de position — algorisme — occupait une grande place en mathématiques. L'algèbre n'était pas une discipline d'avant-garde. La faible formation mathématique donnée dans les facultés des arts des universités se limitait d'ordinaire à l'étude de l'algorisme, de la théorie des proportions et de certains théorèmes du premier et deuxième livres des *Eléments* d'Euclide. Dans la philosophie de la nature prédominaient des doctrines aristotéliciennes et pseudo-aristotéliciennes qui laissèrent leur empreinte en mécanique (en statique et cinématique) et qui contribuèrent, notamment à Oxford et à Paris, au développement de la doctrine des calculations, en d'autres termes les mathématiques supérieures du Moyen Age. Comme on le sait, aux «calculateurs» appartient toute une série de découvertes remarquables et ils avancèrent, sous une forme originale, l'idée embryonnaire du concept de fonction, ainsi que de la méthode des indivisibles et de la méthode des coordonnées. A ceci était intimement lié le développement ulterieur de la théorie des proportions et de la généralisation de l'opération de l'élèvation à la puissance. Les «calculateurs» enrichirent la mécanique des notions de vitesse et d'accélération instantanées et de la loi du mouvement uniformement accéléré. Il faut encore y ajouter les discussions autour des notions de l'indivisible et du continu soulevées toujours par la même philosophie péripatéticienne de la nature. Mais tout ceci était assez loin de la tradition proprement archimédienne.

Je viens de mentionner la méthode des indivisibles qui, sous une forme soit explicite, soit quelque peu voilée, fût appliquée lors de l'étude des relations existant entre les volumes, les aires et les longueurs, que l'on peut considérer respectivement comme des ensembles d'aires, de longueurs et de points. A l'époque envisagée, pour la première fois cette méthode est appliquée par Gérard de Bruxelles qui vécut au début du XIII[e] siècle. Par la suite elle servit de moyen de recherche et devint l'objet de discussions pendant tout le Moyen Age. Dans *L'épitre à Erastosthène,* Archimède applique cette méthode en la combinant avec la loi du levier. Toutefois, dans le cas présent, il n'y a pas lieu d'estimer qu'il y ait précisement une continuation de la tradition archimédienne. Pour autant qu'on le sache, l'épitre mentionnée fut inconnue au Moyen Age. Elle a été découverte il y a seulement soixante ans. Il est fort possible que Gérard ait abouti indépendamment à la comparaison des ensembles des indivisibles en partant des travaux d'Archimède qui lui étaient accessibles et des discussions sur le problème du continu dans la litterature péripatéticienne. Kepler lut cette methode chez Archimède, entre les lignes, comme on dit.

Bien que l'influence d'Archimède sur la science européenne au Moyen Age na pas été considérable, elle stimula néanmoins certaines recherches. Ainsi que dans les pays islamiques, la quadrature du cercle éveilla un vif intérêt par son aspect de principe (problème de la possibilité de la quadrature) et par son aspect numérique. *La mesure du cercle* fut l'origine des recherches qui durèrent longtemps, par exemple de la *Question de la quadrature du cercle* d'Albert de Saxe dans la première moitié du XIV[e] siècle et de toute une série d'ouvrages de Nicolas de Cues au XV[e] siècle, qui proposa des procédés d'expressions approchées de l'arc de circonférence ce qui stimula des recherches sur cette question pendant encore plus de deux cents ans.

Il ne faut pas oublier, en parlant de la tradition archimédienne du Moyen Age, qu'une série de théoremes du grand mathématicien s'enracina solidement, à l'époque, dans la littérature scientifique et didactique. Les mèthodes mêmes avec lesquelles il travaillait furent — au contraire — sousestimées dans une bonne mesure, probablement parce que, souvent, elles étaient au-dessus du niveau des lecteurs. J'ajouterai que ses travaux furent connus parfois grâce aux sources secondaires.

Autrement, il serait difficile de comprendre comment un aussi grand mathématicien du XIV[e] siècle que Thomas Bradwardine ait pu prendre le 3 1/7 pour la valeur exacte du nombre π.

La Renaissance fut en Europe l'époque d'une véritable regénération des traditions d'Archimède. L'épanouissement des techniques civiles et militaires, de la mécanique et de l'hydrostatique, de l'astronomie et de l'optique, et en même temps des mathématiques dont on se servait, redoubla subitement l'intérêt pour les travaux d'Archimède, ainsi que pour tout ce qui touchait l'héritage de l'Antiquité. On commençait à voir dans ses travaux le point d'appui permettant de sortir du point mort et de résoudre beaucoup de problèmes actuels. Vers 1450 environ, Jacopo de Crémone entreprit une traduction nouvelle des ouvrages d'Archimède de la langue greque que Regiomontanus retoucha vingt ans plus tard. Cette traduction pour laquelle Jacopo se servit aussi de la traduction de Moerbecke, fut imprimée en 1544. *La mesure du cercle* et *La quadrature de la parabole*, traduits par Moerbecke, ont été édits plus tôt, en 1503. Niccolo Tartaglia réedita la dernière traduction avec un complément, toujours d'après la traduction de Moerbecke, de *Sur l'équilibre des figures planes* et *Sur les corps flottants*. Ce dernier fut édit par lui en italien en 1551.

Une nouvelle traduction utilisant partiellement la traduction de Moerbecke, minutieusement et amplement commentée, a été préparéé à la même époque par Federigo Commandino (publiée en 1558 et 1565) et par Francesco Maurolico (publiée en 1570, réeditée en 1685). Ces deux traducteurs, comme le montrent leurs commentaires et leurs propres travaux, connaissaient parfaitement les méthodes d'Archimède. Le fait qu'il existaient tant de traductions et d'éditions témoigne de l'immense signification de l'oeuvre d'Archimède aux yeux des savants de l'époque de la Renaissance.

En principe, c'est sur ces traductions que se termine en Europe, l'histoire des traditions d'Archimède au Moyen Age et à l'époque de la Renaissance, et que prend fin l'époque de l'assimilation relativement passive de ses résultats et de ses méthodes. Ensuite vient une période, durant environ cent ans, de l'évolution créatrice de l'héritage d'Archiméde, développé par les travaux de Viète, Stevin, Kepler, Galilée, Leibniz et d'autres grands géomètres de la fin du XVI[e] siècle et du XVII[e] siècle, fondateurs de la nouvelle astronomie, de la mécanique et de l'analyse mathématique. Ce développement se faisait dans de différentes directions sur lesquelles il m'est impossible de s'arrêter ici. Je mentionnerai un seul fait. Tous les travaux fondamentaux d'Archimède et toutes ses méthodes les plus fines deviennent maintenant le point de départ de nouvelles grandes performances. John Wallis exprima admirablement l'opinion de ses contemporains quant au géomètre genial en disant, que cet homme d'une extraordinaire perspicacité a posé les principes de presque toutes les découvertes dont le développement fait l'orgueil du XVII^e siècle.

Dans mon article je voulai rappeler certains moments de l'histoire de la tradition archimédienne dans les pays de l'Islam et de l'Europe du Moyen Age — tradition à laquelle, ces dernières dix années, les excellentes recherches de M. Clagett, V. Zoubov et d'autres savants furent consacrées, recherches ininterrompues jusqu'à nos jours. J'ai rappelé ces moments afin de pouvoir montrer sur l'exemple des travaux d'Archimède, comment dans l'histoire des sciences, l'aphorisme de Terentianus Maurus énonçant que les livres ont leur destinée conforme à la façon dont ils sont acceptés par le lecteur, se justifie d'une manière originale. Je voulais aussi tracer la voie à l'explication historique des particularités spécifiques de la tradition archimèdienne qui joua le rôle d'une des composantes principales reliant la science antique à la science moderne.

BIBLIOGRAPHIE

M. Clagett, *The science of mechanics in the Middle Ages, Madison 1959.*

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. I, Madison 1964.

В. П. Зубов, «У источников механики», в кн.: А. Т. Григорьян и В. П. Зубов, *Очерки развития основных понятий механики.* М. 1962.

В. П. Зубов, «Об „архимедовской" традиции в средние века», *Ист. -матем. исслед.*, вып. XVI, 1965.

А. П. Юшкевич, *История математики в Средине века*, М. 1961; tradd allemande, revisée et augmentée: A. P. Juschkewitsch, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter*, Leipzig 1964.