ORGANON 5 (1968)

A. P. Youschkevitch (U.R.S.S.)

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ ET LES FONDEMENTS DU CALCUL INFINITESIMAL *

I

Dans l'histoire de l'humanité il y a eu peu de penseurs dont l'activité intellectuelle et pratique eût été aussi universelle et aussi féconde que celle de Leibniz. Il s'intéressait aussi bien à l'exploitation des mines qu'à la métaphysique de la religion. Il a non seulement conçu le plan d'une expédition contre les Turcs, mais aussi, avec beaucoup plus de succès, élaboré des projets pour la fondation de nouvelles sociétés savantes et il fut l'un des organisateurs de l'Académie des Sciences de Berlin et un des conseillers de Pierre le Grand lorsque celui-ci se préparait à fonder une Académie des Sciences à Saint-Pétersbourg. Dans l'histoire de la mécanique, le nom de Leibniz est attaché à la notion des forces vives, en biologie — à la doctrine du préformisme, en psychologie il tenta, le premier, une incursion dans la sphère du subconscient. Mais ses mérites les plus importants appartiennent au domaine des mathématiques et c'est bien l'empreinte de cette science que portent tous les traits essentiels de son activité créatrice.

La multitude des thèmes mathématiques auxqels Leibniz s'est intéressé était aussi surprenante. La logique mathématique, les calculs numériques, la théorie des nombres, l'algèbre, l'analyse combinatoire et la théorie des probabilités, l'analyse, la géométrie analytique et projective — voilà une énumération incomplète des disciplines mathématiques qui ont attiré son attention et dont chacune lui doit des contributons originales. Bien que Leibniz se fût adonné à des recherches mathématiques aussi variées, embrassant pratiquement toutes les branches de cette science dans l'état où elle se trouvait en ce temps, il n'en est pas moins vrai que son oeuvre manifeste une profonde unité interne qui

* Conférence faite le 18 novembre 1966 à la séance d'avant-midi du Congrès International Leibniz à Hanovre. Traduit de l'allemand.

s'explique par le fait que Leibniz a poursuivi, pendant des dizaines d'années, un but: celui de créer une méthode universelle mathématique ou même métamathématique. Ce travail a mené, en particulier, à des inventions aussi remarquables que le calcul différentiel et intégral, ou le projet, seulement ébauché par Leibniz lui-même, de l'*Analysis situs*.

L'idée d'une méthode universelle de recherche et de démonstration, qui était au centre même de la conception leibnizienne du monde, a une longue préhistoire. Ses sources remontent à la philosophie du Moyen-Age; on en trouve des germes chez Raymond Lulle au XIII^e siècle et — sous une autre forme — chez les savants des écoles d'Oxford et de Paris du XIV^e siècle, tels R. Swineshead et N. Oresme. Les éclatants succès des sciences naturelles et de l'algèbre au XVI^e siècle et au commencement du XVII^e ont posé avec une extrême urgence le problème de la création de méthodes générales dans la recherche scientifique. Ce problème a été abordé par de nombreux savants et penseurs de l'époque, dont la plupart étaient bien conscients de l'insuffisance des outils dont disposait l'ancienne logique, entre autres la syllogistique rhétorique d'Aristote et de ses adeptes et critiques du Moyen-Age. On a tenté de résoudre ce problème en prenant pour point de départ différents points de vue philosophiques, qui étaient manifestement contradictoires, mais, en fait, se complétaient mutuellement. Telles étaient, par exemple, la méthode empirique inductive de Francis Bacon et la méthode rationnelle déductive de René Descartes. Le savant philosophe français croyait fermement à l'existence d'une science qui serait capable de tout expliquer en ce qui concerne l'ordre et la mesure, science qu'il désignait comme une *Mathesis universalis*. La mathématique universelle de Descartes était en fait une synthèse de la géométrie et d'une algébre symbolique perfectionnée par lui-même. Les parties composantes les plus importantes en étaient la géométrie analytique et le procédé algébrique qui servait à déterminer les tangentes et les normales aux courbes algébriques. Après avoir tenté à quelques reprises de pénétrer dans le domaine des problèmes transcendants, Descartes constata que sa méthode algébrique était incapable de les résoudre et fut obligé d'en dépasser les limites. Le conflit qui se manifesta à cette occasion entre la mathématique universelle cartésienne et les exigences des mathématiques et de la mécanique de l'époque, dans lesquelles les courbes et les fonctions transcendantes intervenaient de plus en plus, ne fut résolu ni par Descartes ni par ses disciples directs, tels Debeaune, F. van Schooten et d'autres. Le cartésianisme resta impuissant devant la science de l'infini, sans laquelle il était pourtant impossible d'étudier en règle la sphère du fini. Quelques dizaines d'années plus tard, ce conflit a été tranché de principe et pratiquement par Leibniz et Newton.

En quête de nouvelles méthodes de recherche on a essayé de transformer la logique elle-même en la fondant sur une base algébrique et de l'adapter aux exigences croissantes de la nouvelle science. Ainsi, le géometre J. Jungius de Lübeck a avancé dans sa *Logica Hamburgensis* (1638) l'idée de construire la logique comme un genre de calcul mathématique et fit en même temps remarquer que la syllogistique classique était insuffisante pour englober toutes les implications qui pourraient se présenter dans la recherche scientifique. Connaissant bien toutes les oeuvres de ses prédécesseurs qui lui étaient accessibles, Leibniz était d'avis que dans la théorie de la démonstration personne n'avait pénétré aussi loin que le savant de Lübeck.

Dès ses jeunes années Leibniz avait conçu l'idée d'une mathématique universelle. Il développa tout d'abord le projet d'un langage scientifique universel. Après avoir pris un contact plus étroit avec l'algèbre symbolique il eut i'idée de créer, en adoptant celle-ci pour modèle, une logique universelle symbolique qu'il appela *Characteristica universalis*.

Tous les concepts existants sont ramenés à des concepts primitifs et chaque concept primitif est désigné par un signe convenable, le caractère, qui lui correspond d'une façon biunivoque. Ces caractères constituent en quelque sorte un alphabet de la pensée humaine. «Les caractères — écrivait Leibniz — sont des choses quelconques au moyen desquels on peut exprimer les relations entre d'autres choses et dont l'usage est plus facile que celui de celles-ci» (Characteres sunt res quaedam, quibus aliarum rerum inter se relationes exprimuntur, et quarum facilior est quam illarum tractatio) [1]. Les idées compliquées s'expriment, d'après des règles déterminées, par des combinaisons des concepts primitifs et, par conséquent, en combinant les caractères; les raisonnements sont remplacés par des formules et des équations. Tout le processus de la pensée est ainsi formalisé et transformé en un algorithme régulier spécifique, un Calcul. Le propre des mots est d'avoir une signification équivoque, ce qui provoque des malentendus réciproques et des controverses sans raison; de plus, les mots ne se prêtent pas au calcul. En introduisant la caractéristique universelle, qui opère avec ses caractères comme l'algèbre avec les lettres, il serait possible de résoudre le problème des démonstrations et de trancher en principe toutes les controverses. Leibniz pensait que dans le cas où il surgirait des différences d'opinions entre savants et philosophes, il suffirait de faire les calculs nécessaires et de s'entendre en disant: calculons! Leibniz attribuait à la caractéristique universelle le pouvoir de résoudre tous les problèmes théoriques par un procédé purement algorithmique. Elle devrait devenir un appareil de démonstration véritablement universel pour toutes les sciences et surtout pour les mathématiques. Leibniz ne se contenta pas d'annoncer son plan de la caractéristique universelle. Il travailla pendant de nombreuses années à créer les fondements de la logique symbolique.

---

[1] *Leibnizens mathematische Schriften,* hgs. von C. T. Gerhardt (= *LMS*). Halle 1849—1863, B. V, p. 141.

Maintenant que K. Gödel et d'autres ont publié leurs travaux sur le problème de la décision, il est clair que le rêve le Leibniz, qui cherchait à créer un algorithme universel capable de vérifier toutes les propositions possibles d'une théorie quelconque, ne saurait, pour des raisons de principe, être réalisé. Néanmoins les mérites de ce grand penseur comme pionnier et précurseur de la logique symbolique et de la théorie des algorithmes, dont les conséquences théoriques et pratiques sont aujourd'hui si importantes, sont immortels.

Les idées fondamentales de la mathématique universelle ont eu une grande influence sur toute l'activité mathématique de Leibniz. Je voudrais insister ici sur l'importance qu'il a attachée aux notations. »Il faut avoir soin — écrivait-il — d'employer des signes commodes pour la découverte. Cela peut se faire le mieux lorsque les signes expriment brièvement et reflètent en quelque sorte la nature intime des choses, de sorte que le travail de la pensée en est merveilleusement diminué« (In signis spectanda est commoditas ad inveniendum, quae maxima est quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor) [2]. Cette préoccupation de douer de notations convenables les algorithmes correspondants a toujours été le souci de Leibniz et elle a produit des fruits dignes d'admiration.

II

Comme exemple de la féconde influence des idées générales de Leibniz, dont nous venons de parler, sur ses recherches mathématiques concrètes on peut citer les indices et les déterminants introduits par lui pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, invention qui a contribué plus tard à la formation de toute l'algèbre linéaire. Un autre exemple, c'est son projet de calcul géométrique, qui a été développé avec succès dans les travaux de Hamilton, Grassmann et Möbius. Mais l'exemple le plus convaincant et le plus important est la création du calcul différentiel et intégral, dont Leibniz a exposé les fondements dans ses notes manuscrites à partir de 1675 et auquel il a consacré de nombreux mémoires publiés en 1684 et plus tard.

Après 1670 les mathématiciens réalisèrent de grands progrès dans l'élaboration de différentes méthodes infinitésimales permettant de déterminer les tangentes et les valeurs extrémales, de calculer les quadratures et les centres de gravité, de déterminer la vitesse en connaissant la longueur du chemin parcouru et, inversement, de trouver cette longueur pour une vitesse donnée *etc.* Non seulement les fonctions algébriques, mais aussi les fonctions logarithmique et circulaires devinrent des no-

---

[2] *LMS*, B. IV, p. 455.

tions d'usage courant. En utilisant le langage moderne on peut dire que les mathématiciens de ce temps savaient résoudre, pour les fonctions des classes les plus simples, les problèmes qui relevaient de la dérivée première, souvent aussi de la seconde, effectuer différentes intégrations et transformer certaines intégrales en d'autres et *vice-versa*. Sous forme géométrique ou mécanique, le caractère inverse des opérations de l'intégration et de la différentation a été reconnu. Les premiers pas ont été faits dans l'étude du «problème inverse des tangentes», c'est-à-dire dans l'intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Enfin, on a découvert les premiers développements de fonctions en séries de puissances.

C'est pourquoi quelques historiens des mathématiques ont cru pouvoir attacher différents noms à la découverte du calcul différentiel et intégral. Quelques uns attribuent l'honneur de cette découverte à P. Fermat, d'autres à B. Pascal, d'autres encore à I. Barrow. Dans cet ordre d'idées on cite aussi parfois le nom d'Archimède. Mais le plus souvent on considère comme inventeurs du nouveau calcul Newton ou Leibniz, ou encore l'un et l'autre. A mon avis, cette dernière opinion est correcte, notamment parce que seuls Newton et Leibniz ont donné aux opérations infinitésimales fondamentales la forme d'un algorithme.

En effet, il s'en fallait de beaucoup que les brillantes découvertes qui ont été faites dans les deux premiers tiers du XVII^e siècle fussent devenues un calcul opérationnel. Aussi bien chez Fermat que chez Pascal et d'autres savants du XVII^e siècle, (*a fortiori* chez Archimède) il manquait un système uniforme de concepts fondamentaux et de notations convenables, assujetties à des règles d'opérations déterminées. Le calcul différentiel et intégral n'est pas seulement un ensemble de diverses méthodes servant à déterminer les tangentes et les valeurs extrémales, à effectuer des quadratures, des rectifications, des cubatures etc. Tout cela, et encore plus, appartient bien au calcul différentiel et intégral (ou à ses applications), mais ce calcul est encore quelque chose de beaucoup plus grand: c'est un calcul opérationnel basé sur un système de concepts arithmétiques généraux, exprimés par des signes de nature algébrique, dans lequel les opérations sont définies á l'aide de ces signes. Leibniz était bien conscient du problème de l'algébrisation de l'analyse mathématique, posé et résolu par lui. Comparant son calcul au procédé de Descartes, dans lequel les fonctions transcendantes étaient bannies de sa mathématique universelle, et aux méthodes de Cavalieri et de Wallis, il écrivait:

«L'analyse nouvelle des infinis ne regarde ni les figures, ni les nombres, mais les grandeurs en général, comme fait la specieuse ordinaire [l'algèbre]. Elle montre un algorithme nouveau, c'est-à-dire une nouvelle façon d'ajouter, de soustraire, de multiplier, de diviser, d'extraire, propre aux quantités incomparables, c'est-à-dire à celles qui sont infiniment grandes, ou infiniment petites en comparaison des autres. Elle emloye les équations tant finies qu'infinies [les séries infinies]... elle se sert d'une nouvelle affection des grandeurs variables, qui est la variation même, marquée par certains caractères et qui consiste dans les différences, ou dans les différences des différences de plusieurs degrés [les différentielles], auxquelles les sommes [les intégrales] sont réciproques, comme les racines le sont aux puissances». [3]

Au cours de ses travaux sur le nouveau calcul Leibniz introduisit, pour la première fois ou d'une façon toute nouvelle, les notions de quantités constantes et variables, de fonction, de paramètre, de différentielles de différents ordres, d'intégrale, d'équation différentielle et beaucoup d'autres. Il imagina lui-même, ou en collaboration avec ses disciples Jean et Jacques Bernoulli, des termes aptes à exprimer ces notions. Il développa avec soin des notations convenables et des règles de calcul qui se sont prouvées durables. Il indiqua les premières applications du nouveau calcul à de nombreux difficiles problèmes de géométrie et de mécanique. La solution de cas particuliers était d'ailleurs pour lui de moindre importance. Il avait coutume de dire que son souci était non pas de résoudre des problèmes, mais de développer des méthodes, puisque toute méthode particulière comprend une infinité de solutions. Et il attachait la plus grande importance au perfectionnement du calcul infinitésimal, en attendant que l'application de cette méthode mènerait à d'énormes succès dans toute la physique. Il espérait aussi que la formation du nouveau calcul serait bientôt achevée. En 1691 il écrivait à Huygens: «Je souhaitte que nous puissions encore dans ce siècle porter l'analyse des nombres et des lignes à sa perfection, au moins quant au principal, *ut hac cura genus humanum absolvamus,* afin que doresnavant on tourne toute la subtilité de l'esprit humain à la physique» [4]. Cet espoir quelque peu hardi témoigne de l'enthousiasme avec lequel Leibniz travaillait à sa nouvelle analyse.

En mai 1684 Leibniz publia dans les *Acta Eruditorum* son premier mémoire sur le calcul différentiel, publication qui fit époque dans l'évolution de l'analyse mathématique. C'était la célèbre „Nouvelle méthode des maxima et minima, et aussi des tangentes... avec un nouveau genre de calcul s'y rapportant" (Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus ... et singulare pro illis calculi genus). Ce bref article contenait la définition de la différentielle (differentia) et le signe d que nous employons encore pour la désigner, la règle de différentiation de la somme, de la différence, du produit, du quotient et de la fonction puissance, le théorème extrêmement important sur l'invariance de la différentielle première; on y trouvait de plus la différentielle seconde introduite sans aucune explication. Il n'y avait aucune démonstration.

---

[3] *LMS*, B. V, p. 259.
[4] *LMS*, B. II, 107—108.

Toutes les règles, remarquait cependant Leibniz, se démontrent aisément, notamment en tenant compte du fait que les différentielles sont proportionnelles aux accroissements instantanés (*momentaneis*), c'est-à-dire infiniment petits des variables correspondantes. «Si l'on connaît — écrivait Leibniz — ce qu'on peut appeler l'a l g o r i t h m e de ce calcul, que j'appelle calcul d i f f é r e n t i e l, on peut trouver toutes les autres équations différentielles par un procédé de calcul commun, déterminer les maxima et les minima ainsi que les tangentes...» (Ex cognito hoc velut A l g o r i t h m o, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco d i f f e r e n t i a l e m, omnes aliae aequationes d i f f e r e n t i a l e s inveniri possunt per calculum communem, maximaque et minima, itemque tangentes haberi...) [5]. Remarquons, à ce propos, que le terme a l g o r i t h m e a été employé ici dans un nouveau sens plus large; il avait auparavant servi à désigner le système de l'arithmétique décimale de position qui utilise les chiffres dit arabes. Pour la première fois aussi on trouve dans une publication le terme «équation différentielle». Le reste de l'article était consacré à la solution de quelques problèmes géométriques, entre autres celle du «problème inverse des tangentes» de Debeaune, consistant à déterminer une courbe plane dont la tangente admet une propriété donnée, c'est-à-dire relevant de la solution d'une équation différentielle du premier ordre (à variables séparées). L'auteur a ainsi fait une incursion dans le calcul intégral.

Deux ans plus tard, Leibniz introduisit aussi dans un article sur «La géometrie secrète...» (De geometria recondita...) le signe d'intégration $\int$ l'intégrale étant entendue comme la somme des différentielles sous le signe $\int$; Leibniz donnait alors à l'intégrale le nom de somme (*summa*) et ce n'est que plus tard qu'il adopta celui d'intégrale, proposé vers 1690 par les frères Bernoulli. Pour la première fois il y signala publiquement le caractère inverse des opérateurs d et $\int$ et insista sur le fait qu'en écrivant des intégrales il ne convient pas de «négliger par imprudence» le signe différentiel de l'argument d'intégration [ne quis ... ipsam dx temere negligat), car «il en résulte une infinité de transformations équivalentes des figures» (Cum tamen ex hoc uno innumerabiles figurarum transfigurationes et aequipotentiae oriantur) [6]. Chez Leibniz l'intégrale apparut d'abord sous forme d'intégrale définie, somme d'une infinité de différentielles infiniment petites, en lesquelles toute quantité peut être décomposée. En pratique Leibniz et ses disciples ramenaient le calcul d'intégrales à l'opération inverse de la différentiation, c'est-à-dire au calcul d'integrales indéfinies. En 1694 apparut pour la première fois dans une publication la constante additive dans l'intégration indéfinie (quantitas constans pro arbitrio assumta) que l'on oublie parfois, comme l'a fait remarquer Leibniz, et qu'il voudrait bien rappeler, car

[5] *LMS*, B. V, p. 222.
[6] *LMS*, B. V, p. 233.

«elle est importante pour l'ensemble des solutions» (quoniam interest ad solutionum generalitatem) [7].

Le caractère algorithmique de la nouvelle analyse fut cependant corrompu par la circonstance que l'intégration des fonctions élémentaires et des équations différentielles mène á une multitude infinie de nouvelles transcendantes et n'est pas, strictement parlant, une opération algorithmique. Bien que cela ne fût démontré qu'au XIX^{e} siècle, cette difficulté a surgi dès le début. Leibniz a essayé de la surmonter et de restaurer dans un certain sens le caractère algorithmique de son calcul, en représentant la quantité cherchée sous forme d'une série infinie de puissances à coefficients indéterminés, que l'on peut ensuite calculer de proche en proche en tenant compte de la condition du problème. Leibniz a explicitement exprimé et développé en détail cette idée dans le mémoire "Sur un supplément, s'étendant aux problèmes transcendants, de la géométrie pratique au moyen d'une nouvelle méthode tout à fait générale par les séries infinies" (Supplementum geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae methodi generalissimae per series infinitas; 1693). Comparant sa méthode au procédé, qui lui était bien connu, du développement en série trouvé par N. Mercator (par division) et à celui de Newton (par extraction des racines), il écrivait: «... on y arrive [aux développements en série] d'une façon plus commode et plus générale en admettant que la série elle-même a été trouvée, de sorte que les coefficients se déterminent ensuite successivement. De cette manière non seulement lorsqu'une propriété d'une ligne est donnée par un calcul ordinaire, mais aussi lorsqu'elle l'est par une formule différentielle ou différentielle d'ordre supérieur, quelque compliquée qu'elle soit, on peut toujours obtenir une série au moyen de laquelle ce qu'on cherche peut être représenté exactement si l'on prend toute la série, ou, si l'on n'en emploie qu'une partie, avec une approximation arbitraire» (...posse ad eas perveniri commodius et universalius per suppositionem ipsius seriei quaesitae tanquam inventae, ita ut terminorum coefficientes ex successu definirentur. Atque ita data lineae proprietate non tantum in calculo communi, sed et in summatorio vel differentiali aut differentio-differentiali etc. utcunque implicato semper ad seriem veniri potest, cujus ope quaesitum, si totam seriem concipias, exacte, si partem seriei adhibeas, quantumlibet appropinquando exhibetur) [8].

Cette méthode de Leibniz, qui a été développée d'une manière un peu différente et indépendamment par Newton, a acquis une grande importance dans l'intégration des équations différentielles. En ce qui concerne les vues de Leibniz sur la possibilité de la représentation d'une

[7] *LMS*, B. V, p. 315.
[8] *LMS*, B. V, p. 285—286.

fonction quelconque par une série de puissances, que partageait aussi Euler et que Lagrange a essayé de démontrer, bien que sous certaines restrictions, elles se sont montrées aussi exagérées que son idée sur la résolubilité algorithmique de tous les problèmes. Au commencement du XIX^e^ siècle Cauchy a démontré l'existence de fonctions qui ne sauraient être représentées par des séries de puissances. La possibilité d'une telle représentation est une propriété caractéristique d'une classe étendue, pourtant bornée, de fonctions qu'on appelle fonctions analytiques. Il importe de remarquer que dans ce cas Leibniz ne se souciait guère de la convergence de la série de puissances. Mais c'est là une tout autre question.

Tels étaient les fondements de l'algorithme du calcul différentiel et intégral créés par Leibniz. Ce que nous avons dit jusqu'ici ne comprend pas tout ce qu'on doit à Leibniz dans le domaine de l'analyse mathématique et de ses applications. Je voudrais encore citer au moins quelques unes de ses découvertes: l'établissement de la formule donnant $d^m(xyz)$, la tentative bien hardie qu'il a fait pour étendre la notion de la différentielle d^ny aux indices réels n quelconques, la règle de différentiation de l'intégrale par rapport à un paramètre variable, l'intégration des fonctions rationnelles, le critère de convergence des séries alternées, différentes méthodes d'intégration de certaines classes d'équations différentielles, l'étude des enveloppes etc. Tout cela a été incorporé dans la substance fondamentale de l'analyse, bien que Leibniz, agissant en hâte, eût parfois commis des erreurs; de nombreuses idées n'ont été que signalées par lui, souvent aussi elles sont restées inachevées. Leibniz n'avait ni le temps ni la patience de mettre la dernière main à tous les détails. Il se comparait à un tigre «dont on dit que s'il n'arrive pas à capturer sa proie du premier coup, du second ou du troisième, il la laisse s'échapper» [9].

III

Nous fixerons maintenant notre attention sur les problèmes qui se rapportent aux fondements proprement dits du calcul infinitésimal. Nous trouvons ici chez Leibniz une foule d'idées, un véritable embarras de richesse dans le choix des arguments qu'il opposa aux critiques du nouveau calcul.

A la base du calcul différentiel et intégral se trouvait l'idée des infiniment petits de différents ordres et le principe en vertu duquel les termes infiniment petits d'une somme sont négligeables devant les termes finis et les infiniment petits d'ordres supérieurs le sont devant ceux d'ordres inférieurs. Dans les applications géométriques une courbe

[9] *LMS*, B, VII, p .378.

était considérée comme composée d'une infinité de petits côtés. Les disciples directs de Leibniz ont exprimé ces principes sous forme de postulats. Le cours manuscrit de calcul différentiel, rédigé par Jean Bernoulli en 1691-1692, commence par les trois postulats suivants:

«*1.* Une quantité qui est diminuée ou augmentée d'une quantité infiniment plus petite n'est ni diminuée ni augmentée.

2. Toute ligne courbe est composée d'une infinité de droites qui sont elles-mêmes infiniment petites.

3. Une figure qui est comprise entre deux ordonnées, la différence des abscisses et une portion infiniment petite d'une courbe quelconque est considérée comme un parallélogramme» [10].

Le troisième postulat, sur lequel sont fondées les applications géométriques du calcul intégral, est à proprement parler une conséquence du premier. Les postulats 1 et 2 se trouvent dans le premier cours de calcul différentiel que le marquis G. F. de l'Hospital, élève de Jean Bernoulli, a publié en 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.*

Le caractère paradoxal de ces postulats et la vague notion d'infiniment petit ne manquèrent pas d'être aussitôt remarqués par de nombreux savants et provoquèrent de violents objections. Leibniz était bien conscient du fait que de tels principes, si utiles qu'ils fussent pour les calculs, devaient donner sujet à des critiques. C'est probablement pourquoi il a défini, dans la «Nouvelle méthode...» mentionnée plus haut, la différentielle dx de l'abscisse, *resp.* de la variable indépendante, comme un segment quelconque fini, «recta aliqua pro arbitrio assumta» [11], comme nous le faisons d'après A. Cauchy, et il a introduit la différentielle dy de la fonction comme un segment également fini qui est à dx dans le même rapport que l'ordonnée à la sous-tangente. Cependant il n'est pas arrivé, de cette façon, à faire disparaître de ses raisonnements l'idée d'infiniment petit, car: *1*° la tangente y était aussi définie comme une droite «qui joint deux points de la courbe dont la distance est infiniment petite» (quae duo curvae puncta distantiam infinite parvam habentia jungat) [12], et *2*° pour le calcul des différentielles Leibniz proposait de prendre celles-ci proportionnelles aux accroissements instantanés des variables correspondantes. En général, cette définition de la différentielle n'a été utilisée en pratique ni par Leibniz ni par ses élèves. En fait, la différentielle a toujours été considérée comme un infiniment petit.

La nature des quantités infinitésimales et les opérations que l'on faisait avec elles provoquèrent une stupéfaction bien naturelle. Un in-

---

[10] J. Bernoulli, *Die Differentialrechnung*, üb. von P. Schafheitlin, Leipzig 1924, p. 10.
[11] *LMS*, B. V, p. 220.
[12] *LMS*, B. V, p. 223.

finiment petit semblait être, d'une façon mystique, en même temps égal et non égal à zéro et devenait ainsi une sorte d'amphibie qui existait en même temps qu'il n'existait pas. Dans le premier postulat, d'après lequel les quantités qui différaient d'un infiniment petit était considérées comme égales, on repérait, dans le cas où celui-ci n'était pas nul, une contradiction logique. On se demandait comment le calcul infinitésimal pouvait-il donner des résultats exacts s'il était basé sur des équations fausses, obtenues en négligeant les infiniment petits? Newton, qui opérait d'abord, comme Leibniz et ses disciples, avec des infiniment petits, quantités évanouissantes, essaya plus tard d'en débarasser l'analyse et de surmonter toutes les difficultés à l'aide d'une théorie spécifique, celle du passage à la limite. Il insistait sur le fait que «en mathématiques il n'est pas permis de négliger des erreurs, si petites qu'elles soient» (Errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi) [13]. Quand un infiniment petit était considéré comme nul, on demandait: quel sens peut-on attribuer à la division de deux quantités nulles, c'est-à-dire de «rien» par «rien»? M. Rolle, algébriste renommé et cartésianiste, avait essayé de démontrer que la différentielle de Leibniz était un zéro absolu.

Essayant de réfuter ces objections et d'autres, Leibniz avança une série d'arguments qui étaient différents en ce qui concernait leur nature aussi bien que leur importance historique. Le but principal de Leibniz étant de défendre son nouveau calcul, il en appelait pragmatiquement tantôt à l'une, tantôt à d'autres propriétés des quantités infinitésimales et des passages à la limite, propriétés que la complexité de leurs rapports mutuels rendait alors quelque peu obscures.

Ainsi, Leibniz explique en 1701 l'idée des infiniment petits de différents ordres par une analogie, d'après laquelle ceux-ci sont simplement des constantes, quelques uns d'eux étant très petits par rapport à d'autres, ce qu'il exprime ainsi: «Et quand il y a plusieurs degrés d'infini ou des infiniment petits, c'est comme le globe de la Terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes, et une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semidiamètre du globe de la Terre» [14]. Une telle interprétation ne put satisfaire même les partisans de Leibniz, par exemple P. Varignon. Pour se disculper Leibniz écrivit à Varignon qu'il s'était servi de ces arguments pour «éviter ces subtilités», et aussi «pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde» [15].

Nous trouvons encore chez Leibniz la notion d'infiniment petits entendus comme quantités infiniment petites actuellement, non-archimédiennes. «Je considère — écrivait Leibniz en 1695 — comme égales non

---

[13] Cf. Issac Newton, *Tractatus de quadratura curvarum* (1704). Introductio.
[14] *LMS*, B. V, p. 350.
[15] *LMS*, B. IV, p. 91.

seulement les quantités dont la différence est un rien absolu, mais aussi celles dont la différence est incomparablement petite ... D'accord avec Euclide (5e définition du 5e livre) je considère comme comparables des quantités de même nature dont l'une, multipliée par un nombre, peut être rendue plus grande qu'une autre» (Caeterum aequalia esso puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia est incomparabiliter parva ...Scilicet eas tantum homogeneas quantitates comparabiles esse, cum Euclide lib. 5 defin. 5 censeo, quarum una numero, sed finito multiplicata, alteram superare potest) [16]. Leibniz n'a cependant pas tenté de construire un calcul des quantités non-archimédiennes et nous savons bien aujourd'hui que l'analyse classique ne saurait être basée sur ces quantités (je laisse de côté les constructions non classiques les plus récentes, p.ex. la *Non-Standard Analysis* de A. Robinson, 1965). Leibniz ajoutait encore: «Et le résultat peut toujours être confirmé par la méthode archimédienne de réduction à l'absurde» (Et Archimedeo quidem processu res semper reductione ad absurdum confirmari potest) [17]. La méthode archimédienne, c'est-à-dire le procédé antique d'exhaustion, n'a été mis en doute par personne. Mais, pour cela, il fallait en premier lieu transformer cette méthode antique en une théorie générale des limites. L'une et l'autre ne nécessitent d'ailleurs pas l'emploi des quantités non-archimédiennes.

Dans un de ses mémoires (1702) Leibniz fit remarquer que les infiniment petits interviennent déjà dans le calcul algébrique ordinaire si l'on veut conserver les avantages que donne la généralité de ce calcul. Considérant deux triangles semblables, dont l'un avait des côtés infiniment petits, et admettant que ces derniers se sont confondus en un point, Leibniz fit appel à la conception d'après laquelle les infiniment petits étaient des «riens». Cependant ce ne sont pas des riens «absolument», mais des riens «comparativement» par rapport aux quantités finies qui, même lorsqu'ils sont devenus des points, restent dans un rapport numérique déterminé [18]. La même idée a été développée plus tard d'une manière spécifique par Euler.

Mais il y a plus. Pour apaiser les savants qui niaient la réalité des quantités infiniment grandes et infiniment petites, Leibniz consentait à ce que ces objets fussent considérés comme des «notions idéales» fécondes et même nécessaires, ou comme des «fictions» analogues aux quantités imaginaires. Dans la lettre du 2 fèvrier 1702, que nous avons déjà mentionnée, Leibniz écrivait à Varignon; «on ne sçaurait établir nostre calcul des Transcendantes sans employer les différences qui sont sur le point d'évanouir, en prenant tout d'un coup l'incomparablement petit au lieu de ce qu'on peut assigner tousjours plus petit „à l'infini". Il est

[16] *LMS,* B. V, p. 322.
[17] *Ibid.*
[18] *LMS,* B. IV, p. 102—103.

remarquable que ces fictions aient leur fondement dans les choses — fundamentum in re — et que „tout se fait dans la Géométrie, et même dans la nature, comme si c'estoient des parfaites réalités» [19]. La métaphysique du calcul infinitésimal se raccorde ici intimement aux idées philosophiques générales de Leibniz.

Cependant nous trouvons en même temps, chez Leibniz, la conception de l'infiniment petit entendu comme quantité potentielle évanouissante. C'est justement cette conception que Leibniz a appliquée pour justifier le fait que les erreurs commises dans les opérations faites sur les infiniment petits mènent finalement à un résultat dont l'erreur est moindre qu'une erreur arbitraire donnée, c'est pourquoi elle peut être réduite à zéro. Dans la même note, dans laquelle Leibniz caractérisait un infiniment petit comme une constante extrêmement petite, on trouve aussi le passage suivant: «Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer» [20].

D'autre part, dans la lettre à Varignon déjà citée, Leibniz écrivait à propos de ses quantités incomparablement petites: «qu'on peut [les] entendre comme on veut, soit des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulement, qui n'entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres. Mais il faut considerer en même temps, que ces incomparables communs mêmes n'estant nullement fixes ou determinés, et pouvant estre pris aussi petits qu'on veut dans nos raisonnemens Géometriques, font l'effect des infiniment petits rigoureux, puis qu'un adversaire voulant contredire à nostre enonciation, il s'ensuit par nostre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, estant en nostre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez petit pour cela, d'autant qu'on peut tousjours prendre une grandeur aussi petite qu'on veut» [21].

Leibniz n'a d'ailleurs donné aucune preuve de ces assertions. Au fond, il s'agissait ici de tout un programme de construction du calcul infinitésimal, programme fondé sur la notion d'infiniment petit potentiel. L. Carnot a fait en 1796 une intéressante tentative dans cette direction, mais cela n'a réussi pour la première fois que dans les 20es années du XIXe siècle à Cauchy, qui s'est appuyé sur une synthèse des idées précisées de Leibniz sur les infiniment petits et celles de Newton sur les passages à la limite.

Les énonciations de Leibniz sur les fondements des mathématiques contiennent aussi d'autres idées qui n'ont été développées à fond et

[19] *LMS*, B. IV, p. 92—93.
[20] *LMS*, B. V, p. 350.
[21] *LMS*, B. V, p. 92.

réellement appliquées que bien plus tard. Il s'agit, entre autres, de l'idée, mentionnée précédemment, du passage à la limite et de la continuité. Il est évident que les opérations effectuées sur les quantités infinitésimales sont implicitement équivalentes à certains passages à la limite et *vice-versa*. Ce n'est toutefois pas un maniement aussi implicite que j'ai ici en vue, mais les énonciations explicites de Leibniz qui sont contenues dans sa loi ou son principe de continuité: «Si parmi des cas donné, ou bien supposés, la difference de deux cas peut devenir moindre que toute quantité donnée, elle doit nécessairement devenir moindre que toute quantité aussi dans les cas cherchés, ou conséquents, qui résultent des supposés», bien «si les cas (ou les données) se rapprochent d'une manière continue en sorte que finalement les uns se confondent avec les autres, il en doit être de même pour les conséquents ou les résultats (ou cherchés) correspondants» (Cum differentia duorum casuum infra omnem quantitatem datam diminui potest in datis sive positis, necesse est, ut simul diminuatur infra omnem quantitatem in quaesitis sive consequentibus quae ex positis resultant. Vel ut loquar familiarius: Cum casus (vel data) continue sibi accedunt, ita ut tandem alter in alterum abeat, oportet in consequentiis sive eventibus (vel quaesitis) respondentibus idem fieri) [22].

Un mathématicien de l'école de Cauchy aura naturellement trouvé dans ce principe une analogie avec la définition d'une fonction continue, mais Leibniz n'eut pas l'idée de considérer les fonctions continues comme une classe à part. Il a donné de son principe quelques applications en géométrie projective et aussi en physique. Le principe de continuité est à proprement parler résulté de considérations portant sur la géométrie projective. Je ne puis m'étendre ici sur l'histoire ultérieure de ce principe en géométrie ni sur son rôle dans la philosophie et la philosophie naturelle de Leibniz.

IV

Nous avons plusieurs fois mentionné le nom de Newton à côté de celui de Leibniz. Comme nous l'avons dit, ils ont tous deux indépendamment créé le système du calcul différentiel et intégral. Les premières découvertes dans ce domaine ont été faites par Newton dans les années 1665--1666, par Leibniz dix ans plus tard. En ce qui concerne leur contenu et leurs résultats concrets, les méthodes de Newton et de Leibniz sont en principe identiques. A la différentielle infiniment petite de Leibniz correspond chez Newton le moment évanouissant ou instantané d'une quantité. La fluxion est le rapport de deux différentielles, c'est-à-dire

---

[22] *LMS*, B. VI, p. 129.

notre dérivée, la fluente correspondante est en fait la fonction primitive, l'intégrale. Dans la méthode de Newton, de même que chez Leibniz, le développement des fonctions en séries de puissances joue un rôle de premier ordre.

Les découvertes des deux créateurs de l'analyse eurent des destinées différentes. Bien que Newton eût établi ses résultats fondamentaux un peu plus tôt, c'est Leibniz qui a donné une vigoureuse impulsion à l'évolution du calcul infinitésimal et déterminé en principe la direction des nouvelles recherches. Newton, qui évitait prudemment toute discussion et publiait ses oeuvres à contre-coeur, a toujours tardé à imprimer ses écrits mathématiques. La première exposition incomplète de certains résultats de Newton, notamment quelques théorèmes généraux sur le passage à la limite, furent publiés en 1687 dans son oeuvre classique *Philosophiae naturalis principia mathematica* et un résumé très succinct des idées principales de la méthode des fluxions apparut dans un livre de J. Wallis en 1693. A cette époque, les mémoires les plus importants de Leibniz sur le calcul différentiel et intégral avaient déjà été mis au jour. Les écrits mathématiques de Newton ne furent publiés qu'au commencement du XVIII^e siècle. Les idées et les fondements de la méthode des fluxions devinrent connus un peu plus tôt, circulant sous forme manuscrite. Le cercle de ceux qui en ont fait connaissance était cependant assez restreint et se bornait principalement à l'Angleterre.

Mais ce ne furent pas seulement ces circonstances qui entrèrent ici en jeu. Le fait décisif était que, contrairement à Leibniz, Newton, n'avait pas suffisamment apprécié toute l'importance des notations. Il serait injuste de refuser à la méthode de Newton le nom de calcul, mais ce calcul présente des avantages opératifs incomparablement inférieurs à ceux du calcul différentiel et intégral. Leibniz avait déjà insisté sur ce fait en 1694, lorsqu'il écrivait que Newton «se sert d'autres caractères; mais comme la caractéristique même est, pour ainsi dire, une grande part de l'art d'inventer, je crois que les notres donnent plus d'ouverture» [23]. Les notations de Leibniz, résultat d'une soigneuse réflexion, étaient remarquablement adaptées au développement ultérieur de l'algorithme; contrairement à celles de Newton, ces notations peuvent par exemple être directement étendues aux fonctions de plusieurs variables. «Etait-ce un dieu qui écrivit ces signes?» (Goethe).

Il importe aussi de remarquer que Leibniz a exprimé les concepts fondamentaux de l'analyse sous une forme arithmétique générale en les dégageant peu à peu de leur gangue géométrique primitive, tandis que chez Newton ils ont toujours gardé leur caractère mécanique ou quasi-mécanique.

Tout cela fut justement apprécié des jeunes savants de l'époque,

[23] *LMS,* B. V, p. 307.

ravis des grandes possibilités que recélaient les nouvelles opérations de calcul. Au contraire de Newton, Leibniz était d'ailleurs infatigable à propager la nouvelle analyse et à gagner des adhérents. Par ses contacts personnels et son énorme correspondance il contribua à se créer une propre école scientifique. Dans ses lettres il faisait part de découvertes inachevées, ou même d'idées qui n'étaient pas mûres, posait de nouveaux problèmes et discutait sur les nouvelles idées et les progrès de la science. Les premiers disciples de Leibniz, Jacques et Jean Bernoulli ont déjà considérablement développé ses idées, reprises plus tard par L. Euler, A. Clairaut, J. d'Alembert et d'autres mathématiciens du continent européen. Les résultats acquis par les disciples anglais de Newton, R. Cotes, B. Taylor, C. Maclaurin, eurent une bien moindre importance.

Il va sans dire que les résultats de Newton furent, un peu plus tard, connus et appréciés sur le continent. De nombreux savants ont peut-être trouvé attrayantes les idées de la méthode des limites sur laquelle Newton avait fondé sa méthode des fluxions. Cependant, sous la forme qu'il lui avait donnée, la théorie des limites ne devint pas — et ne le put pas encore — un outil d'invention dans le développement des mathématiques. D'une part, la méthode n'avait pas été suffisamment élaborée et, au bout du compte, n'était pas plus rigoureuse que le calcul infinitésimal de Leibniz. D'autre part, les adhérents les plus persévérants de cette méthode avaient rejeté l'application directe des infiniment petits et, par là même, renoncé à tous les avantages qu'elle présentait. Comme nous l'avons mentionné, une féconde synthèse des idées de Leibniz et de Newton n'a été réalisée que par A. Cauchy.

J'ai essayé de retracer les contributions les plus importantes de Leibniz aux fondements de l'analyse mathématique. En terminant, je voudrais encore insister sur la pénétration mutuelle des générales et profondes idées méthodoloogiques et de la recherche scientifique concrète, dont le résultat a été le calcul différentiel et intégral de Leibniz. Cette création est un des exemples les plus remarquables de l'unité de l'abstrait et du concret, de la théorie et de la pratique, unité qui constitue le stimulant le plus puissant du progrès de la science.