Berka, Karel

Lambert's Beitrag zur Meßtheorie

Organon 9, 231-241

1973

Karel Berka (Tschechoslowakei)

LAMBERT'S BEITRAG ZUR MEßTHEORIE

Die Grundlegung der modernen Meßtheorie wird in der representativen Literatur zu dieser Problematik, sobald sie auch historisch behandelt wird, nur bis zu den Ergebnissen von H. v. Helmholtz [1] verfolgt. Es ist das Ziel unseres Aufsatzes zu zeigen, daß man die Ansätze einer systematischen Erörterung der fundamentalen Problematik der Meßtheorie bereits im 18. Jahrhundert bei J. H. Lambert finden kann. Dieser vielseitige Zeitgenosse Kants befaßte sich eingehend mit diesen Problemen im vierten Teil seiner *Anlage zur Architectonic* [2], der dem Grundbegriff der allgemeinen Mathesis, bzw. dem *organon quantorum* — der Größe gewidmet ist.

Die Untersuchung der Begriffsbildung und der Problematik der Meßkunst, die als ein Bindeglied zwischen Mathematik und Philosophie zu betrachten ist, hat nach Lamberts Auffassung eine große Bedeutung besonders für den Philosophen, dem sie in methodischer Hinsicht dienlich sein kann, um seine Theorie „zu bereichern und auszubessern" (§ 684). [3] Um diese Aufgabe zu erfüllen, muß die Meßkunst selbst, besonders ihre theoretische Grundlage und Methodologie, begrifflich so klar wie möglich dargestellt werden. Einwandfrei festzustellen, „was man eigentlich suchet, wenn man Größen zu bestimmen und auszumessen suchet oder vergiebt" (§ 708), ist an und für sich wichtig, da die Frage, „wie man die Größe einer Sache finden, berechnen, und ihre Ausmessung auf Regeln bringen soll" (§ 708) öfter verworren behandelt worden.

---

[1] Vergl. H. v. Helmholtz, *Zahlen und Messen erkenntnis-theoretisch betrachtet,* [in:] *Philosophische Aufsätze Eduard Zeller gewidmet,* Leipzig, 1887, S. 17–52, (Abgedruckt in: *Gesammelte Abhandlungen* 3, 1895, S. 356–391 und *Schriften zur Erkenntnistheorie,* hersg. P. Hertz-M. Schlick, Berlin, 1921, S. 70–108.

[2] J. H. Lambert, *Anlage zur Architectonic oder Theorie des Einfachen und des Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis,* Riga, 1771, Bd 1–2; Bd 2, §§ 679–923, S. 301–560.

[3] Soweit keine andere Literaturhinweise angeführt werden, beziehen sich alle Angaben auf die *Architectonic.*

Von dem, was Lambert in seinem Werke in einer etwas zu umständlichen Weise anführt, wollen wir nun in einer zusammenfassenden Darstellung, die nicht immer der ursprünglichen Reihenfolge der besprochenen Probleme entspricht, die wichtigsten Ergebnisse anführen, die auch vom heutigen Standpunkt von Interesse sind.

Das Messen, oder die Ausmessung in Lamberts Terminologie, wird ganz allgemein als das Vergleichen von Größen mit Hilfe eines Maßstabes aufgefaßt, wobei man feststellen soll, ob sie gleich oder ungleich sind, und wenn sie ungleich sind, wie viel die eine Größe größer ist als die andere (§ 775). Diese Feststellung stützt sich auf einfache Gesetze, die allein oder kombiniert für die Ausmessung notwendig sind (§ 749), oder auf allgemeine Regeln (§ 799), welche grundsätzlich als empirische Operationen aufgefaßt werden. So wird z.B. beim Messen von Längen die Operation des Auflegens oder des „Aneinander-legens" angewendet, die jedoch für die Zeitmessung nicht anwendbar ist. In diesem und anderen Fällen müssen wir dann „andere Mittel zu ihrer Vergleichung, und daher andere Arten von Maßstäben gebrauchen und aufsuchen" (§ 774). Zu den Mitteln des Vergleichens, von welchen die angewandten Maßstäbe primär abhängen, rechnet Lambert auch die Anwendung von Meßgeräten und Instrumenten, wie z.B. den Barometer oder die Luftpumpe (§ 777), die uns zum Auffinden von Größen helfen, die man sonst nicht erkannt hätte.

Die Kenntnis der Bedingungen, die zu der Feststellung der Gleichheit oder Ungleichheit von Größen erforderlich ist (§ 768), ermöglicht uns eine Größenanordnung zu bilden, bei der man sagen kann, daß sie "stufenweise größer order kleiner werden kann" (§ 767). Eine bloße ordinale Skalierung einer Größe ist jedoch nur ein Anzeichen dessen, daß „Ausmessung und Maßstäbe dabey möglich sind" (§ 767). Ebenfalls ist es nicht ausreichend, festzustellen „dass zwey, drey, vier Grade, zwey, drey, viermal grösser sey als einer" (§ 767), da dies nur eine triviale Tatsache der Arithmetik zum Ausdruck bringt, jedoch nicht der Zielsetzung der Ausmessung entspricht; nämlich die Grade in der Sache selbst anzugeben und kenntlich zu machen.

Das Messen beruht demnach auf einer objektiven, ontologischen Grundlage: auf der Erkundigung der Grade in der Sache selbst (vergl. §§ 767, 775). Es erfordert deswegen, erstens, eine sachliche Basis, ein Etwas, „*woran* die Grade unterschieden und kennbar gemacht werden können", d.h. die Sache selbst. Zweitens, muß dabei ein Etwas angegeben werden, *wodurch* dies erreicht werden kann, nämlich ein Maßstab, oder das, „was man zur Erkenntnis, Schätzung, Bestimmung usw. der Grade gebrauchet oder gebrauchen kann". Die dritte Forderung des Messens ist die Metrizierung einer Größenanordnung. Es genügt nicht zu wissen, daß ein Grad größer als ein anderer ist, sondern *wievielmal* er größer ist (§ 767). Aus diesen Anforderungen ergibt sich, daß man mit

Recht die Frage stellen kann, was eigentlich „einer Ausmessung fähig ist". Lambert ist sich bewußt, daß es gewisse objektive Grenzen des Ausmeßbaren geben muß, und zweifelt nicht daran, „daß weder alles Kennbare, noch alles Gedenkbare ohne alle Einschränkungen eine Ausmessung zuläßt" (§ 785).

Ein für Lambert wesentliches Problem, mit dem er sich in diesem Zusammenhang an mehreren Stellen seiner Erörterungen befaßt, ist die Beziehung zwischen der Gleichartigkeit und der Ungleichartigkeit von Objekten und die Möglichkeit ihre Ausmessung zu verwirklichen. Er vertritt zuerst die Ansicht, daß man ohne weiters nur gleichartige, homogene Objekte messen kann und daß ungleichartige Objekte höchstens gezählt werden können. Dieser Standpunkt ist jedoch zu strikt und widerspricht der Meßpraxis. Man kann auch ungleichartige Dinge vergleichen, und da das Vergleichen von Größen untereinander oder in bezug auf einen Maßstab dem Wesen des Ausmessens entspricht, lassen sich auch ungleichartige Objekte messen. Sie werden jedoch „nicht an sich, sondern in Absicht auf etwas denselben gemeinsames betrachtet, welches sodann der eigentliche Gegenstand der Ausmessung ist" (§ 785). Auf jeden Fall muß die Gleichartigkeit, die theoretisch gesehen eine *conditio sine qua non* des Messens ist, erreicht werden, da gleichartige Dinge gerade nur die Dinge sein können, „die sich durch die Größe unterscheiden lassen" (§ 811; vergl. auch § 141). Wenn die zu messenden Objekte nicht als solche gleichartig sind, müssen sie wenigstens mit Hilfe mathematischer Mittel, die es ermöglichen sie durch andere Objekte zu bestimmen, auf gleichartige Objekte zurückgeführt werden.

Aus dieser Charakteristik des Messens und den Bedingungen der Meßbarkeit ergibt sich die Notwendigkeit eine präziseren Klärung der mit dem Messen verbundenen Begriffsbildung, besonders der Begriffe der Größe und des Maßstabes, und einer Erläuterung der Beziehung zwischen dem Messen und dem Zählen und Rechnen.

Den Begriff der Größe betrachtet Lambert als einen Grundbegriff: entweder unmittelbar (§ 46), oder in Verbindung mit dem Begriff der Einheit (§ 56).[4] Schon aus diesem Grunde, der sich seit Aristoteles auf die Methodologie der deduktiven Wissenschaften stützt, ist der Begriff der Größe „keiner Definition fähig" (§ 908). Um seinen Standpunkt zu bekräftigen, führt Lambert weitere Argumente an, so z. B. die Behauptung, daß die Nichtdefinierbarkeit des Größenbegriffs durch die Tatsache beeinflüßt ist, daß jede Größe eine absolute Homogenität voraussetzt (§ 908). Den unmittelbaren Ausgangspunkt seiner Konzeption bildet jedoch die folgende Definition von Leibniz: „Eine Grösse sey der innere Unterschied ähnlicher Dinge, und sie könne zwar *gegeben*, oder *vor-*

[4] Vergl. auch J. H. Lambert, *Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrtum und Schein*, Leipzig, 1764, Bd II: *Alethiologie*, §§ 36, 68.

gezeigt, aber nicht mit Worten deutlich erkläret oder ohne Zuziehung eines dritten deutlich gemacht werden" (§ 907), die Lambert nur unter gewissen Bedingungen als passend annehmen will. Sie ist zutreffend nur für solche Größenarten, „die keine bestimmte Einheit haben", wie z. B. der Raum (§ 79) oder die Zeit (§ 83), d. h. für unendliche Größen, „die von 0 bis ins Unendliche fortgehen" (§ 907), nicht aber für Größen, die eine bestimmte oder absolute Einheit haben, d. h. für endliche Größen. Nur eine unendliche Größe ist „eine Größe schlechthin oder *per eminentiam*" (§ 908).

Diese etwas unklare Auffassung wird verständlicher, wenn wir seine Untersuchungen über die Beziehungen zwischen „Größe", „Zahl" und „Verhältnis" („Proportion"), die eng mit dem Unterscheiden von Ausmeßbarkeit und Abzählbarkeit (§§ 785, 797), oder von Ausmessung und Abzählung einerseits, Berechnen und Zusammenrechnen anderseits (§§ 798, 803, 811), verbunden sind, in Erwägung ziehen.

Lambert ist sich bewußt, daß man den Begriff der Größe von dem verwandten Begriff der Zahl aus verschiedenen Gründen streng unterscheiden muß (§ 56). Der erste Unterschied besteht darin, daß eine Größe stets durch eine benannte Zahl derselben Einheit repräsentiert wird, oder sich auf solche Zahlen reduzieren lassen muß (§ 798). Es genügt also nicht nur den betreffenden nummerischen Wert anzugeben, man muß auch ihre Art bestimmen, die durch die qualitativen Aspekte jeder einzelnen Größe determiniert ist. Außer der ihr zugrunde liegenden Einheit unterscheidet sich jede Größe von einer Zahl durch die ihr entsprechende Dimension (§ 726) und durch die Angabe eines einheitlichen Maßstabes, der ihre Ausmessung ermöglicht (§ 798). Während eine Zahl diskret ist, ist eine Größe kontinuierlich, eine Continuität (§ 798). Daher ist eigentlich *ex definitione* nur eine unendliche Größe eine Größe im wahren Sinne des Wortes. Diese wesentlichste Differenz zwischen Zahlen und Größen widerspiegelt sich in den nummerischen Werten, mit welchen sie dargestellt werden können, und charakterisiert zugleich das Spezifische der Ausmessung.

Beim Abzählen werden die Mengen und ihre Verhältnisse durch ganze Zahlen repräsentiert, aber bei der Ausmessung können die Verhältnisse zwischen den Teilen der Größen nicht ganzzahlig dargestellt werden (§ 803). Diese Differenz zwischen dem Zählen und Messen darf nicht die Anwendbarkeit der Arithmetik der ganzen Zahlen für die Ausmessung (vergl. § 820) in Frage stellen. Das ergibt sich bereits durch die Möglichkeit einer verschiedenen Ausmessung ausgedehnter, extensiver Größen (§ 761). Diese Größen, die wegen ihres additiven Charakters von den Intensitäten, den intensiven Größen, unterschieden werden, können, wie folgt, gemessen werden: entweder „der Zahl nach", sobald man „nur die Theile als einzelne Ganze vorzählt", oder „den Graden nach", sobald sie „eine Continuität haben" (§ 761). Die Ausmessung „der Zahl nach" ist nur in solchen Fällen annehmbar, in welchen die resultierenden, nummerische Werte zu weiteren Rechnungen — für das Zusammenrechnen — gebraucht werden, nicht jedoch in Fällen, wo das ganze Verfahren „bey den Zählen bleibt" (§ 764). Für das Zusammenrechnen, das Lambert — wie es scheint — als ein Bindeglied zwischen der Abzählung und der Ausmessung betrachtet, wird notwendigerweise die Gleichartigkeit gefordert (§ 798), bei der die qualitativen Aspekte der Größen — die Einheit und die Dimension respektiert werden müssen. Unter dieser Voraussetzung können auch Größen als Zahlen behandelt werden, ohne ihren grundsätzlichen Unterschied zu ignorieren. Es muß dabei natürlich berücksichtigt werden, daß der Zahlenbegriff nicht auf ganze Zahlen beschränkt ist, sondern auch „gebrochene Zahlen und Dezimalreihen" beinhaltet (§ 817). Diese Erweiterung des Bereiches der resultierenden, nummerischen Werte, durch welche die Größen dargestellt werden können, ergibt sich aus der Annahme, daß Größen im eigentlichen Sinne Continuitäten sind.

Die Möglichkeit Größen als Zahlen zu betrachten und als solche zu behandeln wird zu einer Notwendigkeit bei der Ausmessung von ungleichartigen Größen, die sonst nicht direkt und unmittelbar vergleichbar sind. In diesem Falle müssen sie auf Verhältnisse gebracht werden, die sich dann ohne weiters wie „Zahlen zu Zahlen" verhalten (§ 817). Die Einführung von Verhältnissen, die von den eigentlichen Größen unterschiedlich sind (§ 812), überbrückt die grundsätzliche Differenz zwischen gleichartigen Größen. Die Anwendung mathematischer Mittel ermöglicht hier ein indirektes Verfahren, bei dem „nicht die Größen, sondern die Verhältnisse miteinander" verglichen werden (§ 817). Bei diesem Verfahren (vergl. § 812 ff) wird eine Einheit angenommen, welche als Maßeinheit für alle in einer Gleichung vorkommenden Größenvariablen gilt, und welche durch die Zahleneinheit dargestellt ist. Es sind dabei drei Fälle möglich: [5]

1) Wenn keine von den zu der Rechnung angenommenen Größen dieser Einheit gleich ist, so wird jede nur durch einen Buchstaben angezeigt;

2) Ist eine dieser Größen der Einheit gleich, so gebraucht man keinen Buchstaben dafür;

3) Ist die mittels der Gleichung zu suchende Größe der Einheit gleich, reduziert sich dieser Fall auf den zweiten.

Ist nun eine Einheit angenommen, dann erhält jeder Buchstabe in der Gleichung, dh. jede Größenvariable, eine doppelte Bedeutung: er repräsentiert eine wirkliche Größe und zugleich stellt er eine Zahl dar, „nämlich die Anzahl von Einheiten [...] denen, die dadurch angezeigte

---

[5] Mit K. Krienelke (*J. H. Lamberts Philosophie der Mathematik*, Halle a.S. 1909, S. 68 f) verallgemeinern wir den ursprünglichen Ausdruck „Länge" auf „Größe", was durch Lamberts Erläuterungen im § 813 bekräftigt wird.

größe gleich ist [...] und demnach stellet jeder Buchstabe zugleich auch die Verhältnisse der dadurch angedeuteten Größe[6] zur Einheit [...] vor" (§ 813). Von den oben angeführten Möglichkeiten, die sich eigentlich auf zwei Fälle reduzieren lassen, ist der erste, in welchem die Größenvariablen in der Gleichung ungleichartig sind, gerade jener, der das Vergleichen von Größen mit unterschiedlichen Einheiten ermöglicht. So ist es z. B. in der Gleichung

$$s = ct,$$

wo der Buchstabe s den „durchgelaufenen Raum", c die Geschwindigkeit und t die Zeit bezeichnen. Um diese Größenarten als Zahlen zu betrachten und behandeln zu können, genügt es, daß ihre Einheiten durch die Benennung der Buchstaben s, c und t festgelegt werden. Dann kann man mit ihnen eine Rechnung durchführen, z. B. die Werte der Variablen c und t multiplizieren. Durch diese arithmetische Operation ändern sich weder die Einheiten selbst noch ihr Verhältnis zu den betreffenden Größen. Sie werden „nur in Vergleichung gebracht" (§ 815) und das genügt völlig, um das geforderte Ziel, das Vergleichen von ungleichartigen Größen, zu erreichen.

Der Unterschied zwischen dem Begriff der Größe selbst und dem Zahlenbegriff ist noch — wie bereits schon angedeutet wurde — mit anderen spezifischen Aspekten verbunden: einerseits mit dem Begriff der Einheit und der Dimension, anderseits mit dem Begriff der Grade, oder Stufen.

Für die Einheit einer Größe sind folgende Merkmale charakteristisch: sie kommt in der Größe selbst vor, ist von derselben Art und entspricht ihr auch in bezug auf die Anzahl der Dimensionen (§ 759). Ob man die Einheit einer Größe im absoluten Sinne oder als Ausdruck einer Konvention betrachten soll, wird von Lambert nicht eindeutig entschieden. Es scheint jedoch, daß er eher die Auffassung vertritt, daß ihre Festlegung eine willkürliche Angelegenheit ist (§ 814). Der Begriff der Dimension wird ursprünglich in seiner rein geometrischen Auffassung betrachtet und mit den geometrischen Begriffen der Länge, der Fläche und des körperlichen Raumes in Zusammenhang gebraucht (§ 727). Diese zu enge Konzeption wird aber, auf Grund der Problematik der Ausmessung von ungleichartigen Größen auf alle Größenarten, erweitert. In diesem weiteren Sinne kommen Dimensionen überall dort vor, „wo Einheiten von verschiedener Art verbunden sind und wo folglich auch die Zahlen der einen mit den Zahlen der anderen verbunden werden müssen" (§ 728), was durch ihre Multiplikation geschieht. Eine Größe kann verschiedene Dimensionen haben, sobald sie selbst aus verschiedenen einfachen Größen zusammengesetzt ist. Diese zusammengesetzte Dimension besteht dann aus „Hauptdimensionen" (§ 729), die Lambert jedoch nicht

[6] Im ursprünglichen Text findet man anstatt „Größe" in beiden Fallen den Ausdruck „Länge".

detailliert aufzählt. So wird z. B. dem „durchgelaufenen Raum" s auf Grund der Gleichung $s = ct$ eine Dimension zugeordnet, die man durch die Multiplikation der Dimensionen, der Geschwindigkeit und der Zeit erhält. Die Dimension ist für jede Größe festgelegt und ist auch für ihre Einheit charakteristisch. Sie setzt zugleich auch objektive Schranken den Anwendungsmöglichkeiten der arithmetischen Operation des Addierens und des Subtrahierens. Größen verschiedener Dimension, z. B. Linien und Flächen, oder Geschwindigkeit und Kraft lassen sich demnach weder addieren noch substrahieren (§ 785). Die Anwendung dieser Operationen setzt notwendigerweise eine Gleichartigkeit von Dimensionen voraus, die nicht nur auf Hauptdimensionen der einfachen Größen beschränkt ist, sondern auch die zusammensetzten Dimensionen von Größenarten komplizierterer Gattung umfaßt.

Entsprechend seinen Bemühungen die Meßtheorie auf einer ontologischen Grundlage aufzubauen, fundiert Lambert in ähnlicher Weise auch die Existenz von Größen — zum Unterschied von Qualitäten — auf die Existenz von Graden oder Stufen von Eigenschaften, die unabhängig von jeder Messung für sich objectiv als bestehend angenommen werden. Von diesem Standpunkt aus gesehen ist eigentlich der wahre Gegenstand der Ausmessung das Erfahren der Grade selbst; das nummerische Bestimmen der meßbaren Größen erfüllt dann nur eine Vermittlungsfunktion. Aus diesem Grunde kann man als eine Größe nur das betrachten, was real einer Eigenschaft mit Graden oder Stufen entspricht. Die Existenz von Graden, oder Stufen, ist offensichtlich nur eine notwendige Bedingung der Meßbarkeit, aber nicht eine hinreichende, da die Meßbarkeit einer Größe in bezug auf die entsprechende Graden noch durch methodologische und mathematische Mittel, die ihre Verwirklichung ermöglichen, bedingt ist. Die Möglichkeit die Grade, oder Stufen einer Eigenschaft klar zu erfassen, wird auch als Grundlage des Unterschiedes zwischen additiven und nichtadditiven Größen, oder zwischen extensiven Größen und Intensitäten aufgefaßt. So macht das Unterscheiden und das Erfassen der Grade keine Schwierigkeiten, „wo die Theile auseinander sind, oder voneinander getrennt und gleichsam vorgezählet werden können" (§ 775), wie z. B. im Falle des Raumes, der Zeit oder der Bewegung, also überall dort, wo man unmittelbar gleichartige Größen, die additiv sind, einer Ausmessung unterwirft. Dagegen „wo die Theile theilweise unsichtbar, theilweise ineinander aufgeführt sind" (§ 775), wie bei den Graden der Intensität, z. B. bei der Ausmessung der Dichtigkeit flüssiger Stoffe von ungleicher Schwere oder der Temperatur einer Mischung von ungleich warmen Stoffen, also im Falle von nichtadditiven Größen, stößt man auf große Schwierigkeiten.

Nach dieser Erläuterung der Abhängigkeit der Größen von ihrer objektiven Grundlage wollen wir nun Lamberts Auffassungen über den Maßstab und seine Beziehungen zu den Größenarten behandeln.

Lambert betrachtet zwar die Ausdrücke „Maßstab", „Meßleiter", „Scala" und „Metron" (vergl. § 759 n) als verschieden, bespricht aber nicht, wodurch sie sich unterscheiden. Unter einem Maßstab versteht er ganz allgemein etwas, „wodurch eine Größe ausgemessen, und jeder Grad de Veränderung in derselben angezeigt werden kann", wobei es von „gleich vielen oder von wenigeren Dimensionen ist" (§ 759). Der Maßstab, den man auch durch die Umschreibung als das Etwas, was „zum Maße des anderen diene" (§ 760), charakterisieren kann, gehört nicht zu der Sache. Er unterscheidet sich von der Einheit dadurch, daß die Einheit in der Größe selbst vorkommt. Die Einheiten, die ein Maßstab enthält, sind nicht dieselben, die wirklich in den Dingen vorkommen, und sie müssen auch nicht gleich groß sein (§ 759). Zum Unterschied von der Größe, die mit der Einheit inherent verknüpft ist, gibt es keine notwendige Beziehung zwischen der Einheit und dem Maßstab. Dasselbe gilt auch in bezug auf die Dimension. Die Bedingung, daß die Einheit mit der Größe „von gleich vielen Dimensionen ist", ist im Falle des Maßstabes auch erfüllt, da man auch mit einem nur linear angenommenen Maßstabe mehrdimensionale Größen ausmessen kann (§ 759).

Unter einem Maßstabe wird anfänglich eine materielle Skala, eine Skala eines Meßinstrumentes oder Meßgerätes verstanden. Dies geht aus der Spezifikation verschiedener Maßstäbe hervor, wie z. B. des Visierstabes oder des Kaliberstabes, und aus den Erörterungen über die materielle Konstruktion eines Maßstabes, die berücksichtigt, wie man den Maßstab „am bequemstem zu der Ausmessung gebrauchen kann" (§ 759). Man kann sogar materielle Maßstäbe herstellen, die es ermöglichen nur indirekt, ableitbar meßbare Größen direkt, fundamental zu messen (§ 783). Solche Maßstäbe stützen sich konzeptuell auf Skalenwerte, die als eine Funktion von Skalen mehrerer Dimensionen aufgefaßt werden. Der Vorteil dieser Maßstäbe besteht darin, daß sie ein weiteres Rechnen ersparen oder daß man die Ausmessung einer oder mehrerer weiteren Größen nicht durchführen muß. Als Beispiel für die Anwendung eines solchen Maßstabes führt Lambert (§ 783) das Ausmessen des Gewichtes von Kugeln ihrem Diameter entsprechend an, wobei man Kaliberstäbe konstruiert, an welchen zu jedem Diameter einer Kugel zugleich ihr Gewicht angegeben wird. Dagegen muß aber auch betont werden, daß Lambert den Maßstab ebenfalls im Sinne einer konzeptuellen Skala auffaßt. Diese zweite Bedeutung tritt in den Vordergrund bei seinen Untersuchungen über das Verhältnis, das zwischen dem Endlichen und Unendlichen besteht. In diesem Zusammenhang hebt er hervor, daß das Unendliche, da es mit dem Endlichen heterogen ist, „mit einem endlichen Maßstabe nicht ausgemessen werden muß, noch kann" (§ 915).

Außer diesem Unterscheiden von konzeptuellen und materiellen Skalen antizipiert Lambert auch die Differenzierung von uniformen, linearen und nichtlinearen Skalen, oder linearen und mehrdimensionalen Skalen, wenn er eingehend von der Teilung des Maßstabes in gleiche und ungleiche Teile spricht (§ 783 f). Im ersten Falle sind dann die an dem Maßstabe angeführten oder konzeptuell vorausgesetzten Zahlenwerte in demselben Verhältnis wie die gemessenen Größen, während im zweiten die Zahlenwerte des Maßstabes einer Funktion von Größen mehrerer Dimensionen entsprechen. Für die Ausmessung mehrdimensioneller Größen gibt es grundsätzlich zwei Verfahren:[7] sie werden entweder mit Hilfe einer ihnen entsprechenden Anzahl von linearen Maßstäben gemessen oder es wird ein entsprechender, mehrdimensioneller Maßstab benützt (§ 784). Das zweite Verfahren ist besonders in der Geometrie geläufig, wo lineare Maßstabe auch für das Ausmessen von Flächen und körperlichen Räumen benützt werden (§ 759), da hier jede Ausmessung mehrdimensioneller Größen leicht mit geometrischen Mitteln und Berechnungen auf die Messung von Linien reduzierbar ist.

Lambert unternimmt auch eine sehr interessante Analyse der gegenseitigen Beziehungen zwischen Maßstäben und Größen, die gewissermaßen den Unterschied zwischen fundamentalen, abgeleitetem und assoziativem Messen antizipiert. Lambert unterscheidet dabei eine Reihe von stufenweise abgeschwächten Instanzen von Messungen bezüglich der entsprechenden Maßstäbe und Größen, von denen von Interesse folgende Fälle sind (vergl. § 759 ff):

1) Der wichtigste Fall des Ausmessens, bei dem die Größen „am natürlichsten und einfachsten" mit linearen Maßstäben gemessen werden, d. h. fundamental, kommt „bey Grössen, die ausgedehnt sind" vor. Diese extensiven Größen, z. B. die Länge, werden mit gleichartigen Größen verglichen und die Größen selbst sind mit den entsprechenden Maßstäben bezüglich ihrer Art und Dimension gleichartig, so daß in dieser Instanz alle Anforderungen der mathematischen Gleichartigkeit erfüllt sind.

2) Ein weiterer Fall, der schon komplizierter ist, ergibt sich bei der Ausmessung von Größen, die selber ihr eigener Maßstab sind. Man kann sie zwar untereinander ergleichen, doch muß man gewisse Gesetze anwenden, um eine von ihnen zu vermindern. Nur auf diese Weise können sie auf die Gleichartigkeit zurückgeführt werden, wie z. B. im Falle des Gewichtes. Von solchen Größen wird also angenommen, daß sie nicht unmittelbar, fundamental meßbar sind. In einer ähnlichen Art und Weise muß man auch gewisse Gesetze anwenden, um eine Größe messen zu können, für die nur ungleichartige Maßstäbe zur Verfügung stehen, wie z. B. bei der Ausmessung der Schwere der Luft.

3) In dritter Instanz wird das assoziative Messen untersucht, das überall dort anzuwenden ist, wo die Größen nicht allein, sondern nur mit Hilfe einer verbundenen und mit ihnen zu- oder abnehmenden Größe

---

[7] Vergl. auch J. H. Lambert, *Photometrie* (*Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*, 1760) herg. deutsch von E. Anding, *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften* Nr 31–33, Leipzig 1892, §§ 855, 929.

gemessen werden können, wie z. B. bei der Ausmessung der Wärme und der Luftfeuchtigkeit (§ 764). In diesem Falle ist die aktuell meßbare Größe entweder eine Wirkung der nicht direkt und unmittelbar meßbaren Größe oder ihre Ursache, oder beide von ihnen haben eine gemeinsame Ursache.

Wenn wir unsere Aufmerksamkeit auf die Abschwächung der ganzen Reihenfolge dieser Instanzen richten, die mit den extensiven Größen anfängt und mit solchen Größen endet, bei denen es nur auf das Zählen ankommt (§ 766), und die Lambert sonst nicht als wirkliche Größenarten zuläßt, kann man diese Gliederung sogar als eine, zwar sehr verschwommene, Antizipation der Klassifikation von konzeptuellen Skalen, wie sie in der modernen Methodologie des Messens zum erstenmal von S. S. Stevens [8] vorgeschlagen wurde, auffassen. Der letzte Fall, bei dem der Bereich der nummerischen Skalenwerte nur auf ganze Zahlen beschränkt ist, entspricht dann dem „Messen" mit Hilfe von nominalen Skalen.

Zum Abschluß unserer Darlegung wollen wir noch auf einige methodologische Aspekte der Lambertschen Auffassung, die mit dem Problem der Genauigkeit des Messens verbunden sind, aufmerksam machen. Entsprechend den üblichen Konzeptionen der modernen Meßtheorie wird vorausgesetzt, daß man vom wahren Wert — von der wahren Größe einer Größe — mit Recht sprechen kann (§ 852). Für Lamberts ontologisch fundierte Betrachtungsweise ist diese Annahme völlig verständlich: der wahre Wert einer Größe entspricht dem realen Grade einer gemessenen Eigenschaft. Er ist sich jedoch dabei bewußt, daß dieser Wert in der Praxis kaum oder nur sehr schwierig zu erreichen ist, da die gemessenen Werte von dem wahren Wert mehr oder weniger abweichen. Die Diskrepanz zwischen den wahren und denen durch Ausmessung erhaltenen Werten kann nur durch „Annäherung" (§ 861) überbrückt werden. Um den wahren Wert bestimmen zu können oder ihm wenigstens so nahe wie möglich zu kommen, müssen die Schranken, d. h. das Zahlenintervall, klar bestimmt werden, in denen die meßbaren Werte liegen können. Man muß dann durch weitere Ausmessungen versuchen sie ständig einzuschränken, denn je enger sie sind, desto mehr hat man sich dem wahren Wert einer Größe genähert (§ 852). Bei dem Verfahren der Annäherungen werden natürlich auch mathematische Mittel angewendet. Ob man dann auch nur eine Größe „aller Schärfe nach" bestimmen kann, bleibt eine offene Frage, deren Lösung für die Nützlichkeit und Anwendbarkeit der Ausmessung von fundamentaler Bedeutung ist.

Wie kann man nun die angeführten Gedanken Lamberts vom Standpunkt der heutigen Forschung bewerten? Es scheint klar zu sein, daß Lambert zwar keine ausgearbeitete Meßtheorie entwickelt hat, wohl aber

---

[8] S. S. Stevens, "On the Theory of Scales of Measurement," *Science,* Nr 103, 1946, S. 677–680.

in einer sehr tiefgehenden und schöpferischen Art und Weise eine Reihe von Problemen besprochen hat, die heute im Mittelpunkt der Grundlagenforschung der Meßtheorie stehen. In wiefern seine Ansichten selbständig waren und bei welchen Konzeptionen er an andere Quellen anknüpft, ist aus seinem Werk nicht unmittelbar ersichtlich. Dieses Problem müßte durch weitere historische Untersuchung geklärt werden. Unser Aufsatz versucht nur anhand der „Architectonic" den Stand der Meßtheorie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts darzulegen. Wir hoffen zugleich, daß wir den historisch kaum interessierten Methodologen angeregt haben, die Bedeutung historischer Untersuchungen zu den diversen Problemen des Messens, das zwar heute praktisch sehr entwickelt ist, jedoch methodologisch und philosophisch noch ungenügend begründet ist, nicht zu unterschätzen.