Dąmbska, Izydora

"An Essay on the Foundations of Geometry" de B. Russell et la critique de ce livre en France dans les années 1898-1900

Organon 10, 245-253

1974

Izydora Dąmbska (Pologne)

AN ESSAY ON THE FOUNDATIONS OF GEOMETRY DE B. RUSSELL ET LA CRITIQUE DE CE LIVRE EN FRANCE DANS LES ANNÉES 1898–1900

Deux événements dans l'histoire des mathématiques au XIX^{e} siècle: la création des systèmes non-euclidiens de la géométrie par Lobatcheffski, Bolyai, Riemann, Beltrami et autres et l'élaboration des fondements de la théorie des ensembles par Cantor — constituent un point de départ de nombreux travaux et de vives discussions méta-théoriques d'une grande portée pour l'histoire de la logique et de la méthodologie des sciences déductives. Je me propose dans cette étude d'analyser certains détails d'un des débats sur les fondements de la géométrie; il s'agit des idées méta-mathématiques de B. Russell, qu'il développa dans une dissertainon, rarement aujourd'hui citée, sur les fondements de géométrie, et de la discussion que ce livre suscita en France immédiatement après sa publication. A ce débat ont pris part entre autres: Henri Poincaré et Louis Couturat; et autant que l'on peut juger — d'après quelques remarques de l'autobiographie de Russell — cette polémique ne fut pas sans influencer le développement de ses recherches postérieures dans le domaine de la logique et de la philosophie des mathématiques.

Le livre en question, intitulé *An Essay on the Foundations of Geometry* fut présenté par le jeune Russell en 1895 à l'examen d'Agrégation de Trinity College à l'Université de Cambridge («Fellowship Examination») et publié en 1897. C'est — selon l'aveu de l'auteur — son premier livre philosophique (le livre qu'il a publié en 1896 n'étant pas une oeuvre philosophique, mais une étude sociologique sur le socialisme allemand). Dans l'*Essay* Russell a résumé la matière de ses cours lus à l'Université Johns Hopkins de Baltimore et à Bryn Mawr College, Pennsylvania. On trouve à propos de ce livre d'intéressantes remarques de l'auteur dans son Autobiographie. La première concerne le rapport entre l'écrivain et son premier ouvrage théorique. Russell finissait son livre pendant un séjour en Italie, et c'est alors — dit-il — qu'il a fait ses premières expériences du savant. C'étaient des jours «de l'espoir alternant avec les jours du désespoir», mais enfin quand la dissertation eut été écrite, il crut y avoir résolu tous les problèmes philosophiques des fondements de la géométrie. «Je ne savais pas encore — ajoute-t-il — que l'espoir et le désespoir, inséparables du labeur de la création, sont tous les deux trompeurs, et que nulle oeuvre n'est ni autant mauvaise, que cela nous parait aux mauvais moments, ni autant bonne, que cela nous parait aux bons» [1].

Dans *My Philosophical Development* (ch. 4) il caractérisait son livre comme un peu naïf et jugeait que l'idée de possibilité de géométrie à condition que l'espace soit euclidien ou — en cas de géométries non--euclidiennes — qu'il soit doté de la propriété de garder une «mesure constante de curbure», fut abolie par l'oeuvre d'Einstein, puisque celui--ci a introduit avec succès dans la théorie générale de relativité la notion de l'espace envisagée par Russell comme impossible a priori. Il trouve aussi son livre «de beaucoup trop kantien». Mais l'ayant constaté il ajoute avec son habituelle ironie: «cependant ce fut heureux pour ma réputation que ma première oeuvre philosophique n'a pas offensé l'ortodoxie de ces temps» [2]. On peut se demander si vraiment le kantisme dominait a cette époque encore la philosophie de la géometrie, vu les adhérents de l'empirisme géométrique representé par Mill, et l'actualité du conventionalisme géométrique d'Henri Poincaré, et si vraiment un retour à Kant correspondait à ce qui se passait alors dans les recherches et discussions concernant les fondements de la géométrie. Et il se passait bien de choses interessantes et neuves. Les nouvelles geométries mentionnées plus haut ont suscité encore au XIX[e] siècle des travaux philosophiques méta-géométriques de Helmholtz, Erdmann, Delboeuf, Lechalas et autres, et les nouvelles théories mathématiques, developpeés par Sophus Lie et Felix Klein, furent un point de depart d'une nouvelle philosophie des fondements de la géométrie, celle de Poincaré, étrangère à l'empirisme, mais différente aussi — malgré certaines affinités avec le kantisme —de la thèse de Kant, attribuant aux axiomes géométriques le caractère de jugements synthétiques *a priori*. Rien d'étonnant alors que le livre de Russell évoqua une vive réaction surtout dans le milieu de savants français.

De l'intérêt dont il jouissait en France témoigne aussi ce fait qu'il fut bientôt (1901) publié dans une traduction française de A. Cadenat, dans l'édition corrigée par l'auteur et avec des annotation de Louis Couturat. Il parait étonnant que malgré sa discussion avec Henri Poincaré, qui a suivi la parution du livre en anglais. Russell n'en a pas ici tenu compte, ce qu'il constate dans sa préface en écrivant: «Les précieuses critiques

[1] B. Russell, *The Autobiography*, Vol. I, 1872-1914, London 1967, p. 225.

[2] «I (...) cam to think, this book much too Kantian, but it was fortunate for my reputation that my first philosophical work did not challenge the ortodoxy of the time» (*The Autobiography* I p. 130).

de M. Poincaré me sont malheureusement parvenues trop tard, pour que j'en puisse tenir compte dans cette revision», tandis qu'il y donne la réplique aux objections de Couturat et de Lechalas, publiées en même temps que les articles de Poincaré. L'attitude de Russell envers le conventionalisme géométrique de Poincaré fut alors (et resta toujours) négative, ce qu'il confirme entre autres dans sa préface au livre de Jean Nicod: *La géométrie et le monde sensible* (Paris 1923) qui développait, quant à la construction du concept de l'espace, autant certaines idées de Russell que de Poincaré.

On peut distinguer dans la dissertation de Russell deux parties. La première — critique — trace dans son premier chapitre l'histoire de la méta-géométrie de Gauss à Sophus Lie, et dans le second soumet à l'analyse critique certaines théories philosophiques de la géométrie. La seconde partie de la dissertation contient dans son premier chapitre un exposé de la méta-géométrie proposée par Russell qui se concentre sur l'analyse du caractère logique des axiomes de la géométrie projective et de la géométrie métrique et sur la déduction du concept de la forme d'extériorité (form of externality) qu'il envisage comme une condition apriorique de l'expérience. Dans le deuxième chapitre de cette partie Russell expose les conséquences philosophiques de sa méta-géométrie, essentielles pour résoudre les questions: de quelle manière la forme d'extériorité constitue une condition de l'expérience de l'espace, et comment peut-on éviter les antinomies de certaines notions géométriques telles que point, contenu etc.

Les principaux fondements épistémologiques de la théorie de Russell sont les suivants:

La connaissance scientifique contient nécessairement des éléments formels et matériels: l'élément formel comprend ce qui est défini par les postulats et ce qui constitue une condition nécessaire de toute connaissance, et tout ce qui peut être déduit de ces postulats. L'élément matériel comprend tout ce qui rempli la forme définie par les postulats formels. L'élément matériel est contingent et dépend de l'expérience; il peut changer sans rendre la connaissance impossible. L'élément formel est selon Russell apriorique et l'élément matériel—empirique. Il partage l'opinion de Kant que les éléments aprioriques sont une condition nécessaire de la possibilité de l'expérience, mais — contre Kant — il neveut pas identifier l'a *priori* avec le subjectif, afin de ne pas mêler les problèmes de logique avec ceux de la psychologie de la connaissance. En analysant le concept de ce qui est nécessaire Russell démontre que ce concept se constitue chez Kant de deux manières. La première consiste à prendre pour point de départ l'existence de la science comme u n f a i t et analyser les raisonnements de cette science, afin de découvrir les postulats fondamentaux qui déterminent sa p o s s i b i l i t é logique. Dans ce cas ces postulats et leurs conséquences logiques formelles sont *a priori*. La seconde manière consiste à supposer comme accordée l'existence de l'o b j e t de la science, et à déduire de la définition de la nature essentielle de cet objet tous les principes de cette science. Il ne s'agit pas dans ce cas-là de toute la nature empirique de cet objet, que l'on découvre au cours de la recherche scientifique, car le cas échéant toute la science aurait un caractère *a priori*, ce qui n'est pas vrai. Il ne s'agit que de cet élément de la structure de l'objet qui rend p o s s i b l e le champs de l'expérience propre à la science en question. Et le mot «expérience» — ajoute Russell — est pris ici dans une signification très large de connaissance immédiate intuitive (dans le sens accepté par Bradley). Ces deux principes de nécessité acceptés par Kant, en effet coïncident. L e s m é t h o d e s de recherches sont différentes, mais leurs résultats sont les mêmes. Dans le premier cas on découvre par l'analyse logique de la structure de la science, les seuls postulats sur lesquels elle peut fonder ses raisonnements. Or, si un certain postulat est indispensable pour le raisonnement propre à cette science, il faut — affirme Russell — qu'il soit essentiel à l'expérience de son objet. Et sur cette voie nous retrouvons le second principe kantien de nécessité. Russell adopte dans sa dissertation les deux méthodes. Il cherchera autant des postulats nécessaires par l'analyse logique des raisonnements de la géométrie euclidienne et des géométries non-euclidiennes, que des fondements indispensables obtenus par l'analyse de l'élément essentiel de l'objet de la géométrie.

En acceptant la partition de la géométrie en géométrie projective, dont les théorèmes sont valables pour chaque espace caractérisée de manière qualitative, et en géométrie métrique, qui introduit la notion des grandeurs spatiales mesurables, Russell soutient que tous les théorèmes de la première sont aprioriques puisqu'ils sont formellement déductibles des axiomes déterminant les conditions nécessaires de la forme fondamentale de chaque expérience spatiale, à savoir de la forme de l'extériorité. La relation: «extérieur à» ne se réduit pas à la relation: «moi et ce qui est en dehors de moi», mais à l'extériorité réciproque des objets de l'expérience sensible. Il est possible de construire — indépendamment de l'intuition de la relation d'extériorité — une idée purement conceptuelle de la forme de l'extériorité. C'est un concept théorique de mathématique, et les thèses qui en peuvent être déduites, concernant le caractère purement relationnel et l'homogénéité de cette forme, constituent les fondements d'une théorie hypothétique de l'extension. Cette théorie montre que, s'il y a une expérience de l'extériorité mutuelle des objets, il faut qu'une forme apriorique d'extériorité, ainsi caractérisée, existe nécessairement. Le passage de la géométrie projective, conçue en tant qu'un système hypothétique déductif, à la géométrie en tant qu'un système déductif apodictique, présente certaines difficultés. L'idée de Russell se résume dans cette thèse, que la raison de l'acceptation du caractère apriorique de la forme d'extériorité est de nature transcendantale, c'est-à-dire qu'elle est fondée par les conditions de la possibilité de l'expérience. Cette forme est une condition nécessaire *a priori* de la perception sensible de chaque grandeur corrélative, ce qui permet, selon Russell, d'envisager les axiomes de géométrie projective comme jugements aprioriques nécessairement vrais.

Les axiomes de géométrie projective déduits du concept de la forme d'extériorité et, plus généralement, de la possibilité de l'expérience sensible, sont repartis en trois groupes:

(1) On peut distinguer différentes parties de l'espace, mais toutes ces parties sont qualitativement semblables, et ne se distinguent que par le fait immédiat, qu'elles sont situées les unes en dehors des autres.

(2) L'espace est continu et divisible à l'infini; le résultat de cette division infinie, le zero d'étendu, s'appelle point.

(3) «Deux points quelconques déterminent une figure unique appelée ligne droite; trois points quelconques, en général [3], déterminent une figure unique, le plan. Quatre points quelconques déterminent une figure correspondante de trois dimensions, et il n'y a aucune raison pour que la même chose ne soit pas vraie d'un nombre quelconque de points» [4]. Russell ajoute que pour que la géométrie devienne possible il faut que ce processus prenne fin «tôt ou tard, avec un certains nombre de points qui déterminent la totalité de l'espace» [5].

La géométrie projective, théorie apriorique, dont les axiomes ont un caractère de nécessité logique, ne suffit pas, selon Russell, pour fonder une science complète de l'espace car elle ne permet pas de distinguer parmi d'autres espaces l'espace euclidien, ses principes ne déterminant pas le concept de grandeur spatiale ni de distance mesurable. La géométrie projective doit donc être nécessairemant restreinte par la géometrie métrique. Celle-ci n'est pas un système indépendant, et suppose les principes de la géométrie projective. Elle en differt par l'introduction du concept de grandeur. Par conséquent la forme mathématique des axiomes de la géométrie métrique diffère sous certain rapport de celle des axiomes correspondants de la géométrie projective. Ainsi l'axiome de l'uniformité de l'espace prend dans la géométrie hétrique la forme de l'axiome de congruence — Russell l'appelle l'axiome de libre mobilité (free mobility) et l'exprime de la manière suivante: «Les grandeurs spatiales peuvent être déplacées sans déformation» ou «Les formes ne dépendent en aucune manière de la position absolue dans l'espace [6]». L'axiome de la ligne droite est remplacé par l'axiome de la distance qui dit,

---

[3] Ce: «en général», dicté par l'idée d'une géométrie sphérique, a été attaqué dans le compte-rendu de Couturat. De même Poincaré attire l'attention sur l'imprécision des axiomes de géométrie projective formulés par Russell; Russell dans sa réplique leur donna une expression généralisée et symbolique.

[4] Je cite d'après l'édition française, p. 169 sq.

[5] *Loc. cit.*, p. 170.

[6] *Loc. cit.*, p. 150.

que deux points déterminent d'une manière univoque la distance. Enfin le troisième axiome de la géométrie métrique constate que la position de chaque point dans l'espace à n-dimensions est déterminé par n variables indépendantes (coordonnées). Ces trois axiomes de la géométrie sont dans une double signification a priori, car: premièrement, ils déterminent les propriétés essentielles de la forme de l'exteriorité, et deuxièmement ils contiennent les conditions de la possibilité de toute connaissance de l'espace. Ces trois axiomes sont propres à la géométrie euclidienne et aux géométries non-euclidiennes. Ce qui distingue l'une des autres ce sont les propriétés de l'espace empirique. Les axiomes qui déterminent l'espace euclidien, en l'opposant à tous les autres espaces, sont les suivants:

1. l'espace euclidien a trois dimensions;
2. Par deux points donnés on peut conduire une seule droite;
3. Par un point donné passe une seule droite paralèle à une autre droite donnée.

Ces trois axiomes ont d'après Russell un caractère empirique, cependant seuleument le premier est fondé par l'expérience d'une manière exacte et certaine; les deux autres ne sont qu'approchés, les grandeurs continues qu'ils concernent, ne pouvant pas être mesurées d'une manière précise.

En effet on peut résumer l'idée principale méta-scientifique du livre comme l'a fait Couturat — en deux thèses: les axiomes communs de la géométrie euclidienne et des géométries non-euclidiennes sont *a priori;* les axiomes specifiques de la géométrie euclidienne sont *a posteriori.*

Comme j'ai remarqué plus haut le livre de Russell fut l'occasion d'une vive polémique méta-scientifique dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* au cours des années 1898-1900. Couturat, qui avec un grand enthousiasme s'est prononcé sur le livre et sur son auteur [7], et qui participa à la publication de la traduction française de l'ouvrage en 1901, s'est opposé à la thèse sur le caractère empirique des axiomes spécifiques de la géométrie euclidienne. Cette thèse — selon lui — n'a pas été prouvée et ne parait pas être vraie. Pour la prouver il ne suffit pas — comme l'admet Russell — de démontrer que nous disposons uniquement de la preuve que les axiomes communs (c'est-à-dire ceux qui proviennent de la geométrie projective) soient *a priori*; il faudrait encore montrer que les axiomes dits *a posteriori* peuvent être vérifiés empiriquement. Contrairement aux idées de Russell la conformité des lois physiques avec

[7] Dans son compte-rendu int. «Essai sur les fondements de la géométrie» par B. Russell (*Rev. d. Mét. et d. Mor.*, VI 1898, p. 354sq.) il écrivait e.a. «L'ouvrage de M. Russell contient (...) toute une philosophie de la géométrie mise au point par un philosophe versé dans les plus récentes théories mathématiques et en même temps initié à la grande tradition criticiste» (p. 355). «C'est merveille de voir avec quelle aisance souveraine, avec quelle impeccable sûreté il se reconnaît au milieu des subtilités et des équivoques, se joue des paradoxes des mathématiciens et des paralogismes des philosophes, réfute des erreurs, dissipe les confusions d'idées et dégage la vérité des nuages et des ténèbres amoncelées» (p. 368).

l'expérience et le fait, que ces lois supposent par l'hypothèse le caractère euclidien de l'espace, ne peuvent pas être envisagés comme une vérification indirecte de ces axiomes. On pourrait admettre cette hypothèse, même dans le cas où certaines lois de la physique seraient falsifiées; et Klein a même démontré qu'aucune forme topologique de l'espace n'est contradictoire par rapport à l'expérience. L'axiome premier que l'espace a trois dimensions est pour Couturat, de même que pour Russell, intuitivement certain — mais non en tant qu'une loi empirique; son caractère intuitif est fondé selon Couturat par la nature même de la sensibilité du sujet de la connaissance; comme tel cet axiome est une vérité nécessaire, ce qui ne saurait être affirmer par rapport à aucun jugement empirique. En répondant à ces objections Russell dans un article intitulé «Les axiomes propres à Euclide sont-ils empiriques?» [8] avoue que ses arguments, qui devaient démontrer le caractère empirique des axiomes propres de la géométrie euclidienne, ne sont pas décisifs. Mais il trouve que le raisonnement de Couturat, démontrant la nécessité de l'axiome des trois dimensions, n'est pas probant; en soulignant la différence entre le subjectif et l'apriorique il ne veut pas admettre des critères psychologiques mais uniquement des critères logiques de la nécessité des axiomes. Mais — selon Russell — nous ne disposons pas d'un criterium universel de nécessité. Je perçois qu'un jugement est nécessaire, comme je perçois que le ciel est bleu, mais cette perception ne démontre pas cette nécessité. Parfois nous sommes en état de prouver la nécessité d'une proposition; quand une proposition est une conséquence logique ou une condition nécessaire d'une autre proposition nécessaire elle même est aussi nécessaire. A cette catégorie appartient la nécessité de la thèse sur l'existence d'une intuition apriorique. Certains théorèmes mathématiques tels p.ex. «si $A=B$, alors $B=A$,», «Si $A>B$ alors $B<A$», les axiomes d'ordre etc. semblent nécessaires et en même temps synthétiques. Si ces théorèmes sont vrais, la possibilité de la pluralité d'individus est nécessaire et par conséquent la forme d'extériorité est aussi nécessaire. Et cette possibilité nous est donnée dans une intuition apriorique. Mais elle ne nous donne rien sauf cette possibilité. Chaque transgression ad esse perd ce caractère de nécessité. Nous ne disposons pas troujours d'une preuve de nécessité. Dans maints cas la nécessité reste intuitive. Par conséquent une preuve qu'un théorème n'est pas nécessaire *a priori* est uniquement négative, et par cela peu satisfaisante. Une telle preuve consiste à montrer qu'un théorème ne nous apparait pas comme nécessaire et qu'il n'est ni une conséquence ni une condition nécessaire d'une proposition nécessaire. Tels sont selon Russell les axiomes propres de la géométrie euclidienne, et c'est pour cela qu'il les a caractérisé comme propositions empiriques.

---

[8] *Revue de Métaphysique et de Morale* VI (1898) p. 759 sq.

En accord avec Couturat - mais partant d'autres principes - Henri Poincaré attaqua dans deux articles la thèse de Russell sur le caractère empirique de l'axiome euclidien [9]. Dans ces deux études Poincaré expose et défend sa thèse sur le caractère conventionnel des axiomes autant de géométrie projective que de géométrie métrique. Le concept de distance n'est pas en géométrie — comme le soutient Russell — empiriquement fondé, mais il est un concept purement métrique, relatif par rapport aux conventions de mesure. «Il est impossible — ecrit Poincaré — de découvrir à l'empirisme géométrique un sens raisonnable» [10]. Et pour double raison. Premièrement chaque fait physique qu'on peut expliquer en admettant la géométrie euclidienne, peut être aussi expliqué, si l'on admet d'autres systèmes de géométrie métrique, puisque chaque théorème de géométrie euclidienne est traduisible dans un sysème non-euclidien. «Soutenir que certains phénomènes possibles dans l'espace euclidien seraient impossibles dans l'espace non-euclidien a juste autant de sens que dire qu'il y a des longueurs mesurables en centimètres et en mètres et dont la grandeur ne saurait être exprimer en pouces et en pieds» [11]. Deuxièmement les expériences physiques ont pour l'objet uniquement les propriétés relatives des corps et leurs relations; elles ne concernent nullement les relations entre les corps et l'espace, ni les relations entre différentes parties de l'espace. Leurs résultats ne peuvent donc ni infirmer ni confirmer les théorèmes de la géométrie. La réponse de Russell [12] que la pluralité de mesures effectuées permet de vérifer d'une manière approchée les axiomes particuliers de la géométrie d'Euclide qui, comme les lois de physique, sont une idéalisation de généralisations empiriques, «ne soutient pas — affirme Poincaré — une minute d'examen». Les plus nombreuses et les plus exactes mesures de la hauteur de grand mât ne permettent pas «de calculer l'âge du capitaine» du vaisseau. De même toutes les mesures et toutes les expériences quelque nombreuses qu'elles soient portant sur les rapports des corps ne «révéleront rien sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace» [13].

L'axiome des trois dimensions n'est pas un jugement intuitif synthétique *a priori* — ainsi que suivant Kant soutenait Couturat — il n'est non plus une vérité *a posteriori* — comme pensent les empiristes — mais il est une convention, résultat d'une décision concernant la manière d'interpréter certains symboles de géométrie, décision d'envisager le point comme élément de l'espace. Cette décision n'est point du tout

---

[9] Cf. H. Poincaré, «Des fondements de la géometrie à propos d'un livre de M. Russell» (*Revue d. Met. et d. Mor.* VII 1899) et «Sur les principes de la géométrie. Réponse à M. Russell» (*ibid.* VIII 1900).

[10] «Des fondements...», p. 269.

[11] Cf. *loc. cit.*, p. 266.

[12] B. Russell, «Sur les axiomes de la géometrie», *Revue de Métaphysique et de Morale* VII (1899) p. 684 sq.

[13] Cf. H. Poincaré, «Sur les principes...», p. 79.

arbitraire et possède un fondement pragmatique. Ce fondement consiste selon Poincaré en ce que la géométrie euclidienne décrit un groupe de transformations mathématiquement plus simple que les groupes non-euclidiens. Elle est aussi métriquement utile, puisque les solides dont se composent nos instrument de mesures, et particulièrement les organes de notre corps, ont une structure analogique à celle de la transformation du groupe euclidien.

Dans ses articles Poincaré a soulevé encore plusieurs autres objections sous l'adresse du livre de Russell. Après la réponse de Russell au premier de ces articles il écrivit: «Dans la réponse de M.Russell, j'ai admiré une qualité beaucoup plus rare qu'on ne pense; une parfaite loyauté scientifique. C'est ce qui m'engage à poursuivre cette discussion, qui n'aboutira sans doute pas à un accord, mais qui ne sera peut être pas absolument vaine» [14].Et il en fut ainsi. Bien que Russell n'a pas accepté en géométrie le point de vue conventionaliste néanmoins — peut-être aussi grâce à cette longue discussion — il abandonna sa conception dualiste des fondements de la géométrie, exposée dans ses «Foundations». Il réduisait ensuite — dans l'esprit de son logicisme — la géométrie théorique abstraite aux mathématiques pures et à la logique, et il lui opposait une géométrie physique conçue comme une interprétation empirique d'un système apriorique de géométrie abstraite et déductive, supposée par la physique théorique. Il expose ce point de vue dans l'introduction au livre de Jean Nicod: «La géométrie dans le monde sensible», publié en 1923 et réédité en 1962. Dans cette introduction il avoue aussi, que bien que le point de vue conventionaliste lui est toujours étranger, il ne peut nier que le conventionalisme — sous certain aspect proche de Kant — reste une méta-théorie géométrique logiquement valable.

---

[14] *Ibid.*, p. 73.