Eugeniusz Wojciechowski

Rachunek Lambeka i ontologia elementarna

Prace Naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. Filozofia nr 5, 97-108

2008

PRACE NAUKOWE Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie
Seria: FILOZOFIA 2008, z. V

Eugeniusz Wojciechowski

Rachunek Lambeka i ontologia Elementarna*

Rachunek Lambeka jest systemem gramatyki kategorialnej dla praw redukcji typów syntaktycznych (Lambek 1958). System ten jest algebraicznym rozwinięciem koncepcji gramatyki kategorialnej zaproponowanej przez Kazimierza Ajdukiewicza (zob. Ajdukiewicz 1935), wzbogaconej o ideę notacyjnego odróżniania lewostronności i prawostronności argumentów wyrażeń funktorowych Yeshui Bar-Hillela (zob. Bar-Hillel 1953).

1. **Rachunek Lambeka**

Przedstawimy język systemu Lambeka.
Słownik. Na słownik tego języka składają się:
(1) Zmienne nazwowe, oznaczające typy syntaktyczne ($x,y,z...;X,Y,Z...$),
(2) Stała nazwowa, oznaczająca typ pusty (e),
(2) Funktory: *przepisywania* ($\subset$), *konkatenacji* ($\bullet$), *lewostronnego* ($\backslash$) i *prawostronnego* ($/$) *dzielenia*[1].
Indukcyjnie wprowadzimy pojęcia terminu (nazwy typy syntaktycznego) i formuły systemu.
Terminy.
(1) Wszystkie zmienne nazwowe są terminami.

[1] W literaturze funktor konkatenacji jest zazwyczaj opuszczany, a funktor przepisywania jest oznaczany przy pomocy strzałki ($\rightarrow$). Przyjęta tu symbolika nawiązuje do przedstawionej dalej interpretacji tego systemu w rachunku nazw. Naturalność tej interpretacji jest widoczna w jednym ze sposobów czytania formuły $x \rightarrow y$ - „wszystkie wyrażenia typu x są (również) typu y".

* Praca ta była referowana podczas Częstochowskich Warsztatów Logiczno-Filozoficznych (wrzesień 2003).

(2) Stała nazwowa e jest terminem.
(3) Jeżeli s i t są terminami, to $s \bullet t$, $s \backslash t$ i s/t są też terminami.
Formuły. Jeżeli s i t są terminami, to $s \subset t$ jest formułą systemu.

Konwencja. Dla uproszczenia zapisu przyjmiemy następującą konwencję:
(1) Omijamy stałą nazwową e.
(2) Omijamy jedno wystąpienie symbolu konkatenacji przy lewostronnej lub prawostronnej konkatenacji dowolnego terminu ze stałą nazwową; tj. dla dowolnych terminów s i t (różnych od e, z uwagi na omijanie pustej stałej nazwowej) mamy: $\bullet s = s$, $s \bullet = s$ i $s \bullet\bullet t = s \bullet t$.
(3) Dla uniknięcia wieloznaczności przyjmiemy, że ciąg funktorów $d, \bullet, \subset$ (gdzie d reprezentuje funktor lewostronnego lub prawostronnego dzielenia) oddaje stopień wiązania tych funktorów, od najsilniej do najsłabiej wiążącego.

Rachunek Lambeka (**RL**) składa się z aksjomatu[2]:

A⊂ $\quad x \subset x$

oraz reguł operowania funktorami *prawego* i *lewego dzielenia* oraz reguły *cięcia*:

A/ $$\frac{X \subset x/y \wedge Y \subset y}{X \bullet Y \subset x}$$

A\ $$\frac{X \subset y \wedge Y \subset y \backslash x}{X \bullet Y \subset x}$$

L/ $$\frac{X \bullet y \subset x}{X \subset x/y}$$

[2] Por. (Buszkowski 1989, s. 162) oraz (Kandulski 1995, s. 391 i nast.). Zob. też aksjomatykę podaną przez Kołowską-Gawiejnowicz (2000, s. 170). Funktor konkatenacji w aksjomatyce przedstawionej w ostatniej z cytowanych prac występuje jawnie wraz z prawami łączności dla niego. Lambek przyjmował w swojej pierwszej pracy (1958) aksjomatycznie prawa łączności dla funktora konkatenacji a później z nich zrezygnował (1961). Zob. również w tej sprawie pracę Lehrbergera (1974, s. 41 i nast.).

$$\text{L}\backslash \quad \frac{y \bullet X \subset x}{X \subset y\backslash x}$$

$$\text{Cut} \quad \frac{X \bullet y \bullet Z \subset x \wedge Y \subset y}{X \bullet Y \bullet Z \subset x}$$

2. System GK

Zaproponujemy rachunek gramatyki kategorialnej **GK**, zbudowany metodą założeniową. Język tego rachunku jest rozszerzeniem języka systemu **RL** o funktor epsilonowy (ε). Dla funktora epsilonowego przyjmiemy dwie reguły[3]:

$$\text{R1} \quad \frac{x \varepsilon y}{X \varepsilon x}$$

$$\text{O}\varepsilon \quad \frac{x \varepsilon y}{x \subset y}$$

Reguła wprowadzania funktora słabej inkluzji ma postać:

$$\text{I}\subset \quad \frac{z \varepsilon x \rightarrow z \varepsilon y}{x \subset y}$$

gdzie zmienna z, nie występuje w założeniach dowodu.
Przyjmiemy również reguły opuszczania/wprowadzania dla funktorów prawego i lewego dzielenia oraz regułę cięcia:

$$\text{O/} \quad \frac{x \varepsilon y/z \bullet z}{x \varepsilon y}$$

[3] Pierwsza i trzecia z przyjętych tu reguł występują w bezkwantyfikatorowym rachunku nazw Ludwika Borkowskiego (1980).

I/ $\dfrac{x\varepsilon x \wedge x \bullet z \subset y}{x\varepsilon y/z}$

O\ $\dfrac{x\varepsilon y \bullet y \backslash z}{x\varepsilon z}$

I\ $\dfrac{x\varepsilon x \wedge y \bullet x \subset z}{x\varepsilon y \backslash z}$

RC $\dfrac{x\varepsilon X \bullet Y \bullet Z \wedge Y \subset y}{x\varepsilon X \bullet y \bullet Z}$

Szczególnymi przypadkami reguły cięcia, tj. regułami wtórnymi, które to będziemy też tak samo oznaczać są:

$$\frac{x\varepsilon Y \bullet Z \wedge Y \subset y}{x\varepsilon y \bullet Z} \qquad \frac{x\varepsilon Y \bullet Z \wedge Z \subset z}{x\varepsilon Y \bullet z} \qquad \frac{x\varepsilon Y \wedge Y \subset y}{x\varepsilon y} \qquad \frac{x\varepsilon Y \bullet Z \wedge Y \subset y \wedge Z \subset z}{x\varepsilon y \bullet z}$$

Regułami wtórnymi są tu również reguła opuszczania dla funktora inkluzji (O$\subset$) i reguła przechodniości dla funktora epsilonowego (R2):

O$\subset$ $\dfrac{x \subset y}{z\varepsilon x \rightarrow z\varepsilon y}$

Der.

	$\vdash$	
(1)	$x \subset y$	[z]
(2)	$z\varepsilon x$	[z]
(3)	$z\varepsilon y$	[1,2×RC]

R2 $\dfrac{x\varepsilon y \wedge y\varepsilon z}{x\varepsilon z}$

Der.

	$\vdash$	
(1)	$x\varepsilon y$	[z]
(2)	$y\varepsilon z$	[z]
(3)	$y\subset z$	[2×Oε]
(4)	$x\varepsilon z$	[1,3×RC]

Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 1 *System* **RL** *zawiera się inferencyjnie w* **GK**.

W dowodzie tego twierdzenia wystarczy pokazać, że aksjomat A⊂ i reguły specyficzne rachunku Lambeka (A/,A\,L/,L\,Cut) są odpowiednio tezą i regułami wtórnymi systemu **GK**.

Na gruncie **GK** otrzymujemy:

T1 $x\subset x$ (=A⊂) [**KRZ**,I⊂]

A/ $\dfrac{X\subset x/y \wedge Y\subset y}{X\bullet Y\subset x}$

Der.

	$\vdash$	
(1)	$X\subset x/y$	[z]
(2)	$Y\subset y$	[z]
(3a)	$z\varepsilon X\bullet Y$	[zd1]
(3b)	$z\varepsilon x/y\bullet y$	[1,2,3a×RC]
(3c)	$z\varepsilon x$	[3b×O/]
(3)	$z\varepsilon X\bullet Y \rightarrow z\varepsilon x$	[3a → 3c]
(4)	$X\bullet Y\subset x$	[3×I⊂]

A\ $\dfrac{X\subset y \wedge Y\subset y\backslash x}{X\bullet Y\subset x}$

Der.

$\vdash$

(1)	$X \subset y$	[z]
(2)	$Y \subset y \backslash x$	[z]
(3a)	$z \varepsilon X \bullet Y$	[zd1]
(3b)	$z \varepsilon y \bullet y \backslash x$	[1,2,3a×RC]
(3c)	$z \varepsilon x$	[3b×O\]
(3)	$z \varepsilon X \bullet Y \rightarrow z \varepsilon x$	[3a → 3c]
(4)	$X \bullet Y \subset x$	[3×I⊂]

L/ $\dfrac{X \bullet y \subset x}{X \subset x/y}$

Der.

$\vdash$

(1)	$X \bullet y \subset x$	[z]
(2a)	$z \varepsilon X$	[zd1]
(2b)	$z \varepsilon z$	[2a×R1]
(2ca)	$u \varepsilon z \bullet y$	[zd2]
(2cb)	$z \subset X$	[2a×Oε]
(2cc)	$u \varepsilon X \bullet y$	[2ca,2cb×RC]
(2cd)	$u \varepsilon X \bullet y \rightarrow u \varepsilon x$	[1×O⊂]
(2ce)	$u \varepsilon x$	[2cc,2cd×MP]
(2c)	$u \varepsilon z \bullet y \rightarrow u \varepsilon x$	[2ca → 2ce]
(2d)	$z \bullet y \subset x$	[2c×I⊂]
(2e)	$z \varepsilon x/y$	[2b,2d×I/]
(2)	$z \varepsilon X \rightarrow z \varepsilon x/y$	[2a → 2e]
(3)	$X \subset x/y$	[2×I⊂]

L\ $\dfrac{y \bullet X \subset x}{X \subset y \backslash x}$

Der.

$\vdash$

(1)	$y \bullet X \subset x$	[z]
(2a)	$z \varepsilon X$	[zd1]
(2b)	$z \varepsilon z$	[2a×R1]
(2ca)	$u \varepsilon y \bullet z$	[zd2]

(2cb)	$z \subset X$	[2a×Oε]
(2cc)	$u \varepsilon y \bullet X$	[2ca,2cb×RC]
(2cd)	$u \varepsilon y \bullet X \rightarrow u \varepsilon x$	[1×O⊂]
(2ce)	$u \varepsilon x$	[2cc,2cd×MP]
(2c)	$u \varepsilon y \bullet z \rightarrow u \varepsilon x$	[2ca → 2ce]
(2d)	$y \bullet z \subset x$	[2c×I⊂]
(2e)	$z \varepsilon y \backslash x$	[2b,2d×I\]
(2)	$z \varepsilon X \rightarrow z \varepsilon y \backslash x$	[2a → 2e]
(3)	$X \subset y \backslash x$	[2×I⊂]

Cut $\dfrac{X \bullet y \bullet Z \subset x \wedge Y \subset y}{X \bullet Y \bullet Z \subset x}$

Der.

$\vdash$

(1)	$X \bullet y \bullet Z \subset x$	[z]
(2)	$Y \subset y$	[z]
(3a)	$z \varepsilon X \bullet Y \bullet Z$	[zd1]
(3b)	$z \varepsilon X \bullet y \bullet Z$	[2,3a×RC]
(3c)	$z \varepsilon X \bullet y \bullet Z \rightarrow z \varepsilon x$	[1×O⊂]
(3d)	$z \varepsilon x$	[3b,3c×MP]
(3)	$z \varepsilon X \bullet Y \bullet Z \rightarrow z \varepsilon x$	[3a → 3d]
(4)	$X \bullet Y \bullet Z \subset x$	[3×I⊂]

Dowód tego twierdzenia został zatem zakończony.

3. Interpretacja w ontologii elementarnej

Niech **RN** oznacza pewien rachunek nazw, zbudowany metodą założeniową, zawierający fragment ontologii elementarnej Leśniewskiego[4]. Funktor epsilonowy scharakteryzujemy następująco:

R1 $x \varepsilon y / x \varepsilon x$

R2 $x \varepsilon y \wedge y \varepsilon z / x \varepsilon z$

[4] Konstrukcja ta jest fragmentem bezkwantyfikatorowego rachunku nazw Ludwika Borkowskiego (1980 i 1993).

R3 $x\varepsilon y\wedge y\varepsilon z/y\varepsilon x$

Z kolei reguły opuszczania (jak też dołączania) funktorów istnienia, jedyności, słabej inkluzji i inkluzji cząstkowej mają tu postać:

O*ex* $ex(x)/x^{*}\varepsilon x$
I*ex* $x\varepsilon y/ex(y)$
O*sol* $sol(x)/z\varepsilon x\wedge u\varepsilon x\rightarrow z\varepsilon u$
I*sol* $z\varepsilon x\wedge u\varepsilon x\rightarrow z\varepsilon u/sol(x)$
O$\subset$ $x\subset y/z\varepsilon x\rightarrow z\varepsilon y$
I$\subset$ $z\varepsilon x\rightarrow z\varepsilon y/x\subset y$
OΔ $x\Delta y/x^{*}\varepsilon x\wedge x^{*}\varepsilon y$
IΔ $z\varepsilon x\wedge z\varepsilon y/x\Delta y$

gdzie x^{*} jest stałą nazwową, nie powtarzającą się w wierszach w przypadku zastosowania tej reguły (więcej niż jeden raz) w dowodzie. Zmienna z zaś, nie występuje w założeniach dowodu.
Stałe nazwowe *przedmiotu* (V) i *przedmiotu sprzecznego* (Λ) oraz funktory *negacji nazwowej* (n), *iloczynu nazwowego* ($\cap$) i *sumy nazwowej* ($\cup$) są wprowadzone definicyjnie:

DV $x\varepsilon \mathrm{V}\leftrightarrow x\varepsilon x$
DΛ $x\varepsilon\Lambda\leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\neg x\varepsilon x$
D*n* $x\varepsilon ny\leftrightarrow x\varepsilon x\wedge\neg x\varepsilon y$
D$\cap$ $x\varepsilon y\cap z\leftrightarrow x\varepsilon y\wedge x\varepsilon z$
D$\cup$ $x\varepsilon y\cup z\leftrightarrow x\varepsilon y\vee x\varepsilon z$

Definicyjnie wprowadzimy też funktory prawego i lewego dzielenia:

D/ $x\varepsilon y/z\leftrightarrow x\varepsilon x\wedge x\cap z\subset y$
D\ $x\varepsilon y\backslash z\leftrightarrow x\varepsilon x\wedge x\cap y\subset z$

Podobnie jak wcześniej przyjmiemy konwencję, że ciąg funktorów $d,\cap,c$ (gdzie d reprezentuje funktor lewostronnego lub prawostronnego dzielenia a c funktor epsilonowy lub funktor inkluzji) oddaje stopień wiązania tych funktorów, od najsilniej do najsłabiej wiążącego.

Pokażemy, że system **GK** ma interpretację w **RN**, co będzie zarazem dowodem jego niesprzeczności.

Niech symbole s i t reprezentują dowolne terminy języka **GK**, a Φ i Ψ są zmiennymi przebiegającymi zbiór formuł (atomowych i złożonych) tego języka.
Udowodnimy twierdzenie:

Twierdzenie 2. *System* **GK** *zawiera się inferencyjnie w* **RN** *przy następującej regule translacji* RT:

$\varphi(x\varepsilon s\bullet t)=x\varepsilon\varphi(s)\cap\varphi(t)$
$\varphi(x\varepsilon t)=x\varepsilon\varphi(t)$
$\varphi(s\subset t)=\varphi(s)\subset\varphi(t)$
$\varphi(s/t)=s/t$
$\varphi(s\backslash t)=s\backslash t$
$\varphi(s\subset t)=s\subset t$
$\varphi(e)=\mathrm{V}$
$\varphi(t)=t$
$\varphi(\neg\Phi)=\neg\varphi(\Phi)$
$\varphi(\Phi\S\Psi)=\varphi(\Phi)\ \S\varphi(\Psi)$ gdzie § jest dowolnym spójnikiem zdaniowym.

Z uwagi na to, że reguły R1 i I$\subset$ są wspólne obu konstrukcjom dowód tego twierdzenia będzie polegał na pokazaniu, że φ-odpowiedniki pozostałych reguł (Oε,O/,I/,O\,I\,RC) systemu **GK** są regułami wtórnymi systemu **RN**.
Istotnie, φ-odpowiedniki tych reguł są regułami wtórnymi **RN**:

$$\varphi\mathrm{O}\varepsilon \quad \varphi\frac{x\varepsilon y}{x\subset y}$$

Der.

	$\vdash$	
(1)	$\varphi(x\varepsilon y)$	[z]
(2)	$x\varepsilon y$	[1×RT]
(3a)	$z\varepsilon x$	[zd1]
(3b)	$z\varepsilon y$	[2,3a×R2]
(3)	$z\varepsilon x\rightarrow z\varepsilon y$	[3a → 3b]
(4)	$x\subset y$	[3×I⊂]
(5)	$\varphi(x\subset y)$	[4×RT]

$$\varphi O/ \qquad \varphi\,\frac{x\varepsilon y/z\bullet z}{x\varepsilon y}$$

Der.

$\vdash$

(1)	$\varphi(x\varepsilon y/z\bullet z)$	[z]
(2)	$x\varepsilon y/z\cap z$	[1×RT]
(3)	$x\cap z\subset y$	[2,D∩,D/]
(4)	$x\varepsilon z$	[2,D∩ι]
(5)	$x\varepsilon x$	[4×R1]
(6)	$x\varepsilon x\cap z$	[4,5,D∩]
(7)	$x\varepsilon x\cap z \rightarrow x\varepsilon y$	[3×O⊂]
(8)	$x\varepsilon y$	[6,7×MP]
(9)	$\varphi(x\varepsilon y)$	[8×RT]

$$\varphi I/ \qquad \varphi\,\frac{x\varepsilon x\wedge x\bullet z\subset y}{x\varepsilon y/z} \qquad [RT,D/]$$

$$\varphi O\backslash \qquad \varphi\,\frac{x\varepsilon y\bullet y\backslash z}{x\varepsilon z}$$

Der.

$\vdash$

(1)	$\varphi(x\varepsilon y\bullet y\backslash z)$	[z]
(2)	$x\varepsilon y\cap y\backslash z$	[1×RT]
(3)	$x\varepsilon y$	[2,D∩]
(4)	$x\varepsilon y\backslash z$	[2,D∩]
(5)	$x\cap y\subset z$	[4,D\]
(6)	$x\varepsilon x$	[3×R1]
(7)	$x\varepsilon x\cap y$	[3,6,D∩]
(8)	$x\varepsilon x\cap y \rightarrow x\varepsilon z$	[5×O⊂]
(9)	$x\varepsilon z$	[7,8×MP]
(10)	$\varphi(x\varepsilon z)$	[9×RT]

$x\varepsilon x\wedge y\bullet x\subset z$

φI\ $\quad \varphi \dfrac{}{x\varepsilon y\backslash z}$ $\quad$ [RT,O$\subset$,D$\cap$,I$\subset$,D\]

φRC $\quad \varphi \dfrac{x\varepsilon X\bullet Y\bullet Z\wedge Y\subset y}{x\varepsilon X\bullet y\bullet Z}$

Der.

$\vdash$

(1)	$\varphi(x\varepsilon X\bullet Y\bullet Z\wedge Y\subset y)$	[z]
(2)	$x\varepsilon X\cap Y\cap Z\wedge Y\subset y$	[1×RT]
(3)	$x\varepsilon X$	[2,D$\cap$]
(4)	$x\varepsilon Y$	[2,D$\cap$]
(5)	$x\varepsilon Y\to x\varepsilon y$	[2×O$\subset$]
(6)	$x\varepsilon y$	[4,5×MP]
(7)	$x\varepsilon Z$	[2,D$\cap$]
(8)	$x\varepsilon X\cap y\cap Z$	[3,6,7,D$\cap$]
(9)	$\varphi(x\varepsilon X\bullet y\bullet Z)$	[8×RT]

Literatura

1. Ajdukiewicz K. (1935), *Die syntaktische Konnexität*, w: „Studia Philosophica“ 1, s. 1–27. (Wersja polska: *O spójności syntaktycznej*, w: tenże, *Język i poznanie*, t. I, PWN, Warszawa 1960.)
2. Bar-Hillel Y. (1953), *A quasi-arithmetical notation for syntactic description*, w: “Language” 29, s. 47–58.
3. Borkowski L. (1980), *Bezkwantyfikatorowy założeniowy system rachunku nazw. Część I*, w: „Roczniki Filozoficzne” 28, z. 1, s. 133–148. (Przedruk w: tenże, *Studia logiczne. Wybór*, TNKUL, Lublin 1990.)
4. Borkowski L. (1993), *Bezkwantyfikatorowy założeniowy system rachunku nazw. Część II*, w: „Roczniki Filozoficzne” 41, z. 1, s. 11–21.
5. Buszkowski W. (1989), *Logiczne podstawy gramatyk kategorialnych Ajdukiewicza-Lambeka*, PWN, Warszawa.
6. Kandulski M. (1995) *Gramatyki kategorialne z regułami strukturalnymi*, w: Pogonowski J. (red.), *Eufonia i logos*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, s. 389–399.
7. Kołowska-Gawiejnowicz M. (2000), *Zastosowania etykietowanych systemów dedukcyjnych w dowodach pełności rachunku Lambeka*, w: Perzanowski J. i Pietruszczak A. (red.) *Logika & Filozofia logiczna*, Wydawnictwo UMK, Toruń, s. 169–182.
8. Lambek J. (1958), *The Mathematics of Sentence Structure*, w: *American Math. Monthly*, 68, s. 154–170. (Przedruk w: Buszkowski W., Marciszewski W., van Benthem J. (red.), *Categorial Grammar*, John Benjamins Publ. Co., Amsterdam 1988.
9. Lambek J. (1961), *On the calculus of syntactic types*, w: Jakobson R. (red.), *Stucture of Language and Its Mathematical Aspects*, “Amer. Math. Soc.”, Providence, I, s. 166–178.
10. Lehrberger J. (1974), *Functor Analysis of Natural Language*, Mouton, The Hague – Paris.