Joanna Grygiel

Po co matematykom (i nie tylko) tolerancje

Prace Naukowe Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie. Filozofia nr 9, 201-207

2012

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

MUZEUM HISTORII POLSKI

W przestrzeni S_3 każdy ze zbiorów $A_k = \{A \in S_3 : k \in A\}$, dla k=1, 2, 3 jest klasą tolerancji. Co więcej, łatwo zauważyć, że zbiory wyczerpują cały zbiór S_3. Okazuje się jednak, że klasą tolerancji tej relacji tolerancji jest również zbiór $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$. Taką właśnie „niepotrzebną" klasę tolerancji nazywamy klasą pasożytniczą.

Wprowadza się pojęcie bazy przestrzeni tolerancji $< A, \mathcal{R} >$, czyli minimalnej rodziny klas $\mathcal{B}$ takiej, że elementy x i y są w relacji $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w rodzinie $\mathcal{B}$ istnieje klasa zawierająca oba te elementy. Baza może więc być właściwą podrodziną rodziny wszystkich klas tolerancji. Można wykazać, że w każdej przestrzeni tolerancji istnieje baza. Przestrzeń tolerancji może więc zostać scharakteryzowana przez podanie bazy.

Do opisu tolerancji wygodnie jest również używać pojęcia pokrycia zbioru. Pokryciem zbioru A nazywamy dowolną rodzinę zbiorów, w sumie których zbiór A się zawiera. Elementy pokrycia nie muszą być rozłączne, jak to jest w przypadku podziału zbioru. Oczywiście z każdą przestrzenią tolerancji związane jest pokrycie, którego elementami są klasy tolerancji. Elementy dowolnej bazy tolerancji także tworzą pokrycie związanej z nią przestrzeni tolerancji. Z drugiej strony, jeśli $\mathcal{P}$ jest dowolnym pokryciem zbioru A, to indukuje w naturalny sposób przestrzeń tolerancji $< A, \mathcal{R} >$, gdzie elementy $a, b \in A$ są w relacji $\mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tego samego elementu pokrycia. Pokrycie nazywa się kanonicznym, gdy każdy jego element jest klasą tolerancji indukowanej przez to pokrycie.

Każda przestrzeń tolerancji $< A, \mathcal{R} >$ może być także reprezentowana przez pewien kontekst formalny, to znaczy układ $(A, \mathcal{P}, I)$, gdzie A i $\mathcal{P}$ są zbiorami, zwanymi odpowiednio zbiorem obiektów i zbiorem atrybutów, a I jest relacją dwuargumentową pomiędzy elementami zbioru A i elementami zbioru $\mathcal{P}$. W tym przypadku zbiorem obiektów jest po prostu zbiór A, zbiorem atrybutów jest pokrycie $\mathcal{P}$ zbioru A wyznaczone przez tolerancję $\mathcal{R}$, a I jest relacją należenia. Kontekst formalny związany z przestrzenią tolerancji może być interpretowany w ten sposób, że $\mathcal{P}$ jest zespołem cech przysługujących atrybutom ze zbioru A, a relację aIp rozumiemy w ten sposób, że atrybutowi a przysługuje cecha p.

Z drugiej strony, każdy kontekst formalny wyznacza pewną przestrzeń tolerancji. Jeżeli $(A, \mathcal{P}, I)$ jest kontekstem formalnym, to możemy przyjąć, że obiekty a i b są ze sobą w relacji tolerancji $\mathcal{R}$, o ile mają przynajmniej jeden wspólny atrybut, to znaczy

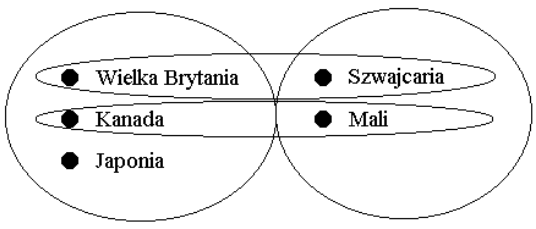
$$a \mathcal{R} b \;\Leftrightarrow\; (a, p), (b, p) \in I \text{ dla pewnego } p \in P.$$

Rozważmy kontekst formalny reprezentowany przez następującą tabelkę:

	a	b	c	d	e
Wielka Brytania	X	X			X
Szwajcaria		X	X		
Kanada	X			X	
Japonia	X				X
Mali			X	X	

gdzie:
a) ma dostęp do morza
b) leży w Europie
c) ma prezydenta
d) powierzchnia tego kraju jest większa od powierzchni Polski
e) jest krajem wyspiarskim.

Klasy relacji tolerancji wyznaczonej przez ten kontekst formalny ilustruje następujący schemat:



Z każdą relacją tolerancji w zbiorze A związane są pewne indukowane przez nią relacje równoważności, aproksymujące tę tolerancję. Taką „dolną" aproksymacją tolerancji $\mathcal{R}$ jest stowarzyszona z nią relacja $\mathcal{R}^+$ określona przez

$$x\,\mathcal{R}^+ y \Leftrightarrow \{z \in A;\ x\mathcal{R}z\} = \{z \in A;\ y\mathcal{R}z\}.$$

Inaczej mówiąc, elementy x i y są w relacji $\mathcal{R}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy należą do tych samych klas tolerancji $\mathcal{R}$.

„Górną" aproksymacją tolerancji $\mathcal{R}$ jest jej tranzytywne domknięcie $\mathcal{R}^*$. Oczywiście, jeśli $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, to $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R} = \mathcal{R}^*$. Jeśli tranzytywne domknięcie tolerancji $\mathcal{R}$ jest relacją totalną, to znaczy istnieje tylko jedna klasa abstrakcji relacji równoważności $\mathcal{R}^*$, to tolerancję $\mathcal{R}$ nazywamy sklejoną (bądź spójną). Takie tolerancje odgrywają szczególną rolę w pewnych aplikacjach algebraicznych.

Matematycy okazali się bardziej wymagający w stosunku do tolerancji – w strukturach algebraicznych relacje tolerancji nie są rozumiane jako zwykłe relacje zwrotne i symetryczne, oczekuje się ponadto, aby były one zgodne z bazowymi operacjami danej struktury. Oznacza to, że relacje tolerancji są w tym przypadku naturalnym uogólnieniem kongruencji.

I tak na przykład w strukturze kratowej $\langle A, \wedge, \vee \rangle$, zawierającej dwie operacje dwuargumentowe (identyfikowane z kresami dolnymi i górnymi w kracie jako zbiorze częściowo uporządkowanym), tolerancją jest każda relacja zwrotna i symetryczna $\mathcal{R}$ o tej własności, że o ile $a \mathcal{R} b$ i $c \mathcal{R} d$ to $(a \wedge c) \mathcal{R} (b \wedge d)$ oraz $(a \vee c) \mathcal{R} (b \vee d)$.

Można wykazać, że skutkuje to faktem, iż $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow (a \wedge b) \mathcal{R} (a \vee b)$, co oznacza, że każda relacja tolerancji w kracie jest wyznaczona przez zbiór zawartych w niej par (a, b) takich, że $a \leq b$.

Tolerancje kratowe znalazły zastosowanie między innymi do badań nad funkcjami wielomianowymi w kratach (Kindermann[11]) oraz do znajdowania podkrat wypukłych maksymalnych ze względu na pewne użyteczne własności, w tym do rozkładu krat modularnych i dystrybutywnych (Herrmann, Day[12], Wille[13]).

W przypadku tolerancji kratowych nie ma „klas pasożytniczych", tzn. zbiór wszystkich klas dowolnej tolerancji stanowi jedyną bazę przestrzeni tolerancji. Wynika to z faktu, że każda klasa tolerancji w kracie jest jej podkratą wypukłą, a ponadto same klasy dowolnej tolerancji kratowej tworzą kratę. Fakt ten został udowodniony przez Czedliego[14].

Spośród wszystkich tolerancji kratowych szczególnie interesującymi własnościami (obok kongruencji) wyróżniają się sklejone relacje tolerancji. Herrmann i Day wykazali, że w przypadku krat modularnych o skończonej wysokości klasami najmniejszej sklejonej tolerancji, tak zwanej tolerancji szkieletowej, są maksymalne przedziały komplementarne danej kraty. Dla krat dystrybutywnych oznacza to, że tolerancja szkieletowa dekomponuje kratę na jej maksymalne przedziały boole'owskie, co okazało się wygodnym narzędziem do opisu i badania takich krat.

Dla każdej kraty $\mathcal{L}$ można rozważać nie tylko kratę klas tolerancji dla ustalonej tolerancji tej kraty, ale także kratę wszystkich tolerancji tej kraty. Bandelt[15] wykazał, że krata tolerancji dowolnej kraty jest 0-modularna, algebraiczna oraz pseudokomplementarna. W szczególności krata tolerancji dowolnej kraty dystrybutywnej jest kratą dystrybutywną.

Ogólnie rzecz biorąc, można wykazać, że wszystkie tolerancje danej struktury algebraicznej, podobnie jak to jest w przypadku kongruencji tej struktury,

---

[11] M. Kindermann, *Über die Äquivalenz von Ordnungspolynomvollständigkeit und Toleranzeinfachheit endlicher Verbände*, „Contributions to General Algebra" 1979, nr 2, s. 145–149.

[12] A. Day, Ch. Herrmann, *Gluings of modular lattices*, „Order" 1988, nr 5, s. 85–101.

[13] R. Wille, *Complete tolerance relations of Concept Lattices*, „Contributions to General Algebra" 1983, nr 3, s. 397–415.

[14] G. Czedli, *Factor lattices by tolerances*, „Acta Scientificarum Mathematicarum" 1982, nr 44, s. 35–42.

[15] H.J. Bandelt, *Tolerance relations of lattices*, „Bulletin of the Australian Mathematical Society" 1981, nr 23, s. 367–381.

tworzą kratą algebraiczną. Nie zawsze jednak krata kongruencji danej struktury algebraicznej jest podkratą kraty tolerancji tej struktury. W przeciwieństwie jednak do struktury kratowej, w ogólnym przypadku nie udało się znaleźć żadnych dalszych ogólnych własności krat tolerancji. Charakteryzowanie struktur i badanie ich własności przy użyciu krat tolerancji jest obecnie szybko rozwijającym się kierunkiem. Badania w tym nurcie rozpoczęte przez Chajdę i Zelinkę[16] były prowadzone także przez Daya, Hermanna, Czedliego, Grätzera[17], Radeleczkiego[18], Grygiel[19] i wielu innych.

Relacje tolerancji (w swoim podstawowym sensie) były także szeroko wykorzystywane w lingwistyce. Wynika to z faktu, że podobieństwo jest cechą częściej występującą niż tożsamość. Przy ustalaniu bliskości znaczeniowej wyrazów lub zwrotów interesujące są nie tyle przypadki pełnej tożsamości znaczeń, ile przypadki podobieństwa znaczeń. Przez podobieństwo znaczeń rozumiemy, że zbiór pewnych wspólnych znaczeń jest dostatecznie duży.

W lingwistyce używano relacji tolerancji do opisu m.in. synonimii (co robili Fischer i Pogonowski[20]) oraz homonimii (Semeniuk).

Szczególnymi przypadkami tolerancji w strukturach lingwistycznych są hiponimia oraz podobieństwo syntagmatyczne.

Relacja hiponimii może być charakteryzowana przez zawieranie się zakresów wyrażeń lub podrzędność treści wyrażeń. Przyjmuje się, że dwa leksemy są hiponimicznie podobne, jeśli posiadają co najmniej jedną wspólną cechę semantyczną.

Relacja podobieństwa syntagmatycznego na danym poziome językowym może być scharakteryzowana w następujący sposób: dwa segmenty są w tej relacji, jeśli posiadają taki sam (z dokładnością do izomorfizmu) fragment.

Wspomniane pojęcia podobieństwa strukturalnego mogą mieć także zastosowanie pozalingwistyczne, na przykład w ontologiach sytuacji, gdy sytuacje są reprezentowane przez pewne struktury relacyjne.

---

[16] I. Chajda, B. Zelinka, *Lattices of tolerances*, „Casopis pro pestovani matematiky" 1977, nr 102, s. 10–24.

[17] G. Czédli, G. Grätzer, *Lattice tolerances and congruences*, „Algebra Universalis" 2011, nr 66, s. 5–6.

[18] S. Radeleczki, D. Schweigert, *Lattices with complemented tolerance lattices*, „Czechoslovak Mathematical Journal" 2004, nr 54 (129), s. 407–412.

[19] J. Grygiel, *The concept of gluing for lattices*, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Częstochowie, Częstochowa 2004.

[20] J. Pogonowski, *Przestrzenie tolerancji i opozycji*, [w:] *Skłonność metafizyczna. Bogusławowi Wolniewiczowi w darze*, red. M. Omyła, Warszawa 1997.

Streszczenie

Pojęcie tolerancji jest naturalnym uogólnieniem pojęcia relacji równoważności i ma na celu pewną formalizację idei podobieństwa. W pracy omawiamy pokrótce pewne ważne zastosowania relacji tolerancji, głównie związane z matematyką i lingwistyką.

Słowa kluczowe: podobieństwo, relacja tolerancji, klasa tolerancji, przestrzeń tolerancji.

Summary

What do Mathematicians (among Others) Need Tolerances for?

The notion of tolerance relation is designed to formalize the idea of similarity. In the paper we present in short how the notion is used in mathematics, especially for investigating mathematical structures. Some linguistic applications are also mentioned.

Key words: similarity, tolerance relation, tolerance class, space of a tolerance.

PRACE NAUKOWE Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie
Seria: Filozofia 2012, z. IX

Ryszard MISZCZYŃSKI

O definicjach twórczych: między poglądami Jana Łukasiewicza i Stanisława Leśniewskiego

Toczący się na początku XX wieku w Polsce spór o rolę definicji w naukach dedukcyjnych miał – jak sądzę – swój początek w polemice, jaka rozgorzała po opublikowaniu przez Dawida Hilberta w 1899 roku *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig). Aksjomatyczny system formalny przedstawiony w pracy został wyraźnie skrytykowany przez Gottloba Fregego, który nie akceptując podstawowych idei realizowanych przez autora, podjął z nim spór na szereg różnych tematów: od problemów wyrażonych w tytule książki po bardziej metodologiczne: dedukcję, formalizację oraz związaną z nią teorię definicji – definicje a aksjomaty, definicje a eksplanacje, definicje kontekstowe, niesprzeczność a istnienie, dowody niezależności, definiowanie nowych i starych terminów.

Frege fundamentalnie nie akceptował budowy systemu w oparciu o system aksjomatów, w których występują niezrozumiałe symbole. Jeśli pierwotne zdania teorii mają być prawdziwe, to – jak podkreślał – nie mogą być niezrozumiałe. Przekonanie, że one „w sposób uwikłany" określają znaczenie niejasnych terminów, było dla niego nie do zaakceptowania. Odrzucał możliwość jednoczesnego traktowania wypowiedzi jako twierdzeń i definicji: twierdzenie wzbogaca naszą wiedzę i wymaga dowodu, definicja określa znaczenie słowa, jest tylko pewnym założeniem, jak będzie ono rozumiane. W matematyce jej celem jest skrócenie rozumowań: wprowadzenie nowego znaku, który ma mieć tę samą referencję i treść jak pewien zespół wyrażeń już znanych[1]. Z tego punktu widzenia w zasadzie nie może mieć żadnego poznawczego znaczenia. Jak wyraźnie podkreślał – poznawcza wartość definicji nie jest większa niż prawa tożsamości a=a.

[1] Frege zmieniał swój pogląd na relację między definiendum a definiensem: od tożsamości treści (sensów) w: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, po identyczność zakresów w: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*.