Ferdynand Reiss

Podstawowe elementy teorii optymalizacji: wybrane praktyczne modele wymiany pojazdów samochodowych w przedsiębiorstwach transportowych

Problemy Zarządzania, Finansów i Marketingu 19, 227-237

2011

ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO

NR 666 PROBLEMY ZARZĄDZANIA, FINANSÓW I MARKETINGU NR 19 2011

FERDYNAND REISS
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach

PODSTAWOWE ELEMENTY TEORII OPTYMALIZACJI. WYBRANE PRAKTYCZNE MODELE WYMIANY POJAZDÓW SAMOCHODOWYCH W PRZEDSIĘBIORSTWACH TRANSPORTOWYCH

Wprowadzenie

Jednym z głównych zadań kadry zarządzającej w przedsiębiorstwach transportowych jest takie zaprojektowanie procesu wymiany pojazdów, aby stan techniczny floty zapewniał sprawną realizację potrzeb zgłaszanych przez klientów. Dlatego coraz częściej decyzje taborowe podejmuje się na podstawie rozwiązania odpowiednio sformułowanego i zapisanego w sposób sformalizowany zadania. Tym problemom jest poświęcona gałąź wiedzy zwana teorią projektowania. W ramach tej teorii wyboru rozwiązania dokonuje się, korzystając z teorii i metod postępowania zwanych optymalizacją[1].

1. Podstawowe elementy teorii optymalizacji

Jest oczywiste, że u podstaw formułowania zagadnień dotyczących podejmowania decyzji powinno leżeć pojęcie decyzji najlepszej, czyli optymalnej. Przy takim podejściu bierze się pod uwagę pojedynczą wielkość, izoluje się ją i optymalizuje (to znaczy minimalizuje lub maksymalizuje w zależności od sytuacji) przez właściwy wybór jednej z osiągalnych możliwości. Powstała w ten sposób decyzja optymalna jest traktowana jak rozwiązanie problemu podjęcia

[1] J. Stadnicki, *Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji*, WNT, Warszawa 2006, s. 13.

decyzji. Takie podejście do omawianych zagadnień posiada wiele zalet, jak prostota, precyzja i w wielu przypadkach możliwość matematycznego ujęcia. Ma ono również pewne ograniczenia polegające na konieczności wyboru kryterium, przy pomocy którego mają być mierzone wyniki. Optymalizacja wykazała jednak swoją użyteczność jako pewien sposób analizy i jest mocno ugruntowana na polu podejmowania decyzji[2].

Jeżeli efekt, jaki ma być uzyskany dzięki projektowi, da się wyrazić ilościowo (zdefiniować funkcję celu – kryterium oceny), a przy tym będzie on zależeć od wartości pewnej liczby wielkości (zmiennych decyzyjnych), które mogą przyjmować wartości w granicach wyznaczających zbiór możliwych rozwiązań (zbiór dopuszczalny), to zadanie polega na znalezieniu takich wartości zmiennych decyzyjnych, dla których funkcja celu osiąga minimum lub maksimum w zbiorze dopuszczalnym. Zadanie sformułowane w taki sposób jest zadaniem optymalizacji gotowym do rozwiązywania. Rozwiązanie można potraktować jako optymalny wariant projektu[3].

Istnieje wiele rodzajów zadań optymalizacji. Zależnie od tego, którą z cech danego zadania przyjmuje się za odróżniającą je od innych, można podać różne sposoby klasyfikowania zadań:

a) występowanie ograniczeń w zadaniu:
   - zadanie z ograniczeniami, w którym zmienne decyzyjne muszą przyjmować wartości należące do zbioru dopuszczalnego,
   - zadanie bez ograniczeń, w którym zmienne decyzyjne mogą przyjmować dowolne wartości;

b) charakter zmiennych decyzyjnych w zadaniu:
   - zadanie statyczne (parametryczne), polegające na wyznaczeniu wartości zmiennych decyzyjnych, dla których funkcja celu osiąga ekstremum,
   - zadanie dynamiczne, w którym zmienne decyzyjne zadania są funkcjami jednej i tej samej zmiennej (na przykład przebiegu, wieku pojazdu), zatem poszukuje się ekstremum pewnego funkcjonału;

c) typ funkcji celu oraz ograniczeń w zadaniu:
   - zadanie programowania liniowego (optymalizacji liniowej), w którym zarówno funkcja celu, jak i ograniczenia są liniowymi kombinacjami zmiennych decyzyjnych,

[2] D.G. Luenberger, *Teoria optymalizacji*, PWN, Warszawa 1974, s. 15.

[3] J. Stadnicki, *op.cit.*, s. 13.

– zadanie programowania nieliniowego (optymalizacji nieliniowej), w którym przynajmniej jedna spośród funkcji występujących w zadaniu (ograniczenia, funkcja celu) jest nieliniowa względem zmiennych decyzyjnych. Wśród zadań programowania nieliniowego wyróżnia się także zadania, które można potraktować jako szczególne przypadki zadania nieliniowego, bowiem nieliniowa funkcja celu jest określonego typu (na przykład zadanie programowania kwadratowego, zadanie programowania geometrycznego);

d) dopuszczalne wartości, jakie mogą przyjmować zmienne decyzyjne zadania:
   – programowanie w zbiorach ciągłych, kiedy to zmienne decyzyjne mogą przyjmować dowolne wartości należące do zbioru dopuszczalnego (na przykład zbioru liczb rzeczywistych),
   – programowanie w zbiorach dyskretnych, kiedy to zmienne decyzyjne muszą przyjmować wyłącznie określone wartości (muszą należeć do zbioru dyskretnego);

e) deterministyczny bądź stochastyczny charakter zmiennych decyzyjnych w zadaniu:
   – zadanie deterministyczne, w którym zmienne decyzyjne nie mają charakteru losowego (są zdeterminowane),
   – zadanie stochastyczne, w którym przynajmniej jedna ze zmiennych ma charakter losowy, czyli jest określona za pomocą funkcji losowej o nieznanym rozkładzie prawdopodobieństwa (niedeterministyczna) lub o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa (probabilistyczna);

f) liczba funkcji celu w zadaniu:
   – programowanie jednokryterialne, w którym optymalizacja przebiega względem jednej funkcji celu (kryterium),
   – programowanie wielokryterialne, w którym występuje wiele funkcji celu (kryteriów), a optymalizacja przebiega z uwzględnieniem ich wszystkich jednocześnie.

Różnice między rodzajami zadań optymalizacji powodują, że nie ma jednej efektywnej metody rozwiązywania ich wszystkich. Poszczególne typy zadań rozwiązuje się za pomocą wyspecjalizowanych odpowiednich metod (algorytmów). Dlatego tak ważne jest poznanie różnych algorytmów, aby odpowiedni z nich zastosować do typu konkretnego zadania[4].

---

[4] *Ibidem*, s. 14–16.

Rozpatrując dowolny problem, decydent dąży właściwie do jednego – wskazania, co należy zrobić, jakie podjąć działania, aby osiągnąć stan pożądany. Dotyczy to również kadry zarządzającej w przedsiębiorstwach transportowych, także w sytuacjach konieczności podjęcia właściwej decyzji taborowej. Podjęcie optymalnej decyzji dotyczącej wymiany części lub całości floty to nic innego, jak osiągnięcie pożądanego – zarówno w sensie technicznym, jak i rodzajowym (technologicznym) – stanu floty. Jednocześnie należy zauważyć, że następstwem występujących zmian gospodarczych jest zwiększająca się złożoność działań wspomagających podjęcie decyzji optymalnej. Wynikiem poszukiwania metod wspomagania procesu decyzyjnego jest powstanie interdyscyplinarnej dziedziny wiedzy, jaką są badania operacyjne.

Badania operacyjne można zdefiniować jako zespół modeli i metod poszukiwania optymalnych rozwiązań w danych warunkach ekonomicznych. Przedmiotem zainteresowania tej dziedziny wiedzy jest proces decyzyjny. W celu dokonania jego analizy, badania operacyjne posługują się modelami i metodami matematycznymi (analitycznymi), heurystycznymi oraz symulacją komputerową. Pozostają one w bliskim związku z ekonomią matematyczną i ekonometrią. Ustalenia tych nauk wykorzystywane są do podejmowania optymalnych decyzji.

Problemy decyzyjne (optymalizacyjne) można podzielić ze względu na wiele kryteriów. W artykule tym zostanie zaprezentowany jeden z nich. Jest to podział ze względu na liczbę kryteriów oceny. Problemy te dzielimy wówczas na problemy optymalizacji jednokryterialnej oraz problemy optymalizacji wielokryterialnej.

Problemy optymalizacji jednokryterialnej opisują sytuację, w której decydent przy podejmowaniu decyzji kieruje się jednym kryterium. Są to sytuacje typowe dla działań rutynowych. W przypadku decyzji strategicznych, słabo strukturalizowanych, trzeba wykorzystać problemy optymalizacji wielokryterialnej[5].

Zaprezentowanie właśnie tego podziału pozwoliło pokazać, że podejmowanie decyzji dotyczących zmian elementów floty pojazdów w przedsiębiorstwie transportu samochodowego jest zagadnieniem złożonym i trudnym. Wymagają one przeanalizowania każdorazowo wielu czynników z zakresu wiedzy technicznej i ekonomicznej. Na podjęcie optymalnej decyzji będą przecież wpływały zarówno czynniki rynkowe, jak i te wynikające z eksploatacji posiadanych przez przedsiębiorstwa pojazdów.

[5] *Badania operacyjne*, W. Sikora (red.), PWE, Warszawa 2008, s. 9–12.

Istnieją różne strategie stosowania rachunku ekonomicznego, a tym samym priorytetów determinujących proces podejmowania decyzji dotyczących wymiany pojazdów w poszczególnych przedsiębiorstwach. Literatura przedmiotu nazywa te strategie:

- polityką stałą w czasie,
- polityką zmienną w czasie.

W przypadku pierwszej metody można wyliczyć wiele zasad postępowania. Tu jednak zostaną przedstawione te najczęściej stosowane w praktyce:

1. Środki trwałe wymienia się na nowe wtedy gdy upłynie ekonomicznie lub technicznie uzasadniony czas L od momentu ich zainstalowania. Cała trudność takiej metody polega na odpowiednim doborze liczby L. Wydaje się, że ten sposób postępowania byłby słuszny w przypadkach, gdy mielibyśmy do czynienia ze zbiorowością takich urządzeń, gdzie okres L powinien być ustalony jako czas upływający od momentu zainstalowania do momentu poprzedzającego pierwszą awarię. Taka polityka może być również korzystna w przypadku, gdy zbiorowa wymiana środków trwałych na nowe środki trwałe jest dużo bardziej opłacalna niż wymiana indywidualna.
2. Środek trwały wymienia się na nowy po pierwszej większej awarii lub po upływie maksymalnego czasu T. Stosowanie tej zasady będzie słuszne wtedy gdy będziemy mieli do czynienia ze środkami trwałymi, które po awarii prawie całkowicie stracą swoją wartość, a koszt naprawy przekroczy koszt nowego środka trwałego. Przykładem może być samochód z pękniętą wielokrotnie ramą.
3. Środek trwały remontuje się po awarii pierwszej, ale wymienia się go na nowy przy awarii drugiej lub przy osiągnięciu ustalonego wieku T.
4. Środek trwały remontuje się aż do p *-1* awarii, natomiast po p-tej awarii lub po osiągnięciu wieku T wymienia się go na nowy; w tym przypadku liczby p i T należałoby określić z góry. Niewątpliwie do tej kategorii środków trwałych, którym odpowiadałaby tego rodzaju metoda, należą samochody (nie biorąc oczywiście pod uwagę awarii powodujących całkowite zniszczenie).
5. Środek trwały remontuje się aż do p *-1* awarii, a wymienia się na nowy przy p-tej awarii lub przy całkowitym zniszczeniu lub po osiągnięciu wieku T. Taka zasada postępowania jest odmianą poprzedniego sposobu uwzględniającą konieczność wymiany środka trwałego wtedy gdy został on całkowicie zniszczony.

6. Środki trwałe remontuje się dopóty, dopóki koszt wszystkich remontów nie przekroczy określonej sumy (na przykład ceny nowego środka trwałego). Decyzja taka wymaga dokładnego oceniania kosztów przeprowadzanych remontów.
7. Środki trwałe remontuje się dopóty, dopóki nie zużyją się one całkowicie, czyli do momentu, gdy nie ma już możliwości dalszego remontowania.

Wybór właściwej metody postępowania jest problemem, którego rozwiązanie będzie zadaniem kadry zarządzającej konkretnej firmy.

Druga z wymienionych metod (polityka zmienna w czasie) daje możliwość wybrania w każdym czasie takiej zasady postępowania, która byłaby najodpowiedniejsza dla danej sytuacji w przedsiębiorstwie.

2. Wybrane praktyczne modele wymiany pojazdów w przedsiębiorstwach transportowych

Analizując dokładnie literaturę omawiającą zagadnienia optymalizacji wymiany pojazdów samochodowych, można zauważyć, że najmniej skomplikowany sposób wymiany to tak zwana odnowa prewencyjna. Zakłada się w niej, że wymiany pojazdu dokonuje się, nie biorąc pod uwagę jego stanu technicznego, lecz jego wiek lub określony przebieg.

Istnieje wiele modeli matematycznych służących do wyznaczenia optymalnego okresu użytkowania obiektów technicznych, a zatem także pojazdów samochodowych. Cechą odróżniającą te modele jest kryterium przyjęte w nich za podstawę optymalizacji. I tak, na przykład A. Kaufmann twierdzi, że pojazd należy wymienić bez względu na stan techniczny w tak zwanym wieku krytycznym. Jest to taki wiek, przy którym średni koszt dotychczasowej eksploatacji przypadający na jednostkę czasu jest najmniejszy. W tym celu należy zbadać minimum funkcji:

$$\gamma(t) = \frac{1}{t}\left[C - C\varphi(t) + \psi(t)\right] \tag{1}$$

gdzie:

C – cena zakupu nowego pojazdu,
$C\varphi(t)$ – cena uzyskana z odsprzedaży wymienianego pojazdu w chwili t,
$\psi(t)$ – suma wydana na naprawy do chwili t.

H. Bierman, L. Fouraker i R. Jaedicke uznają zasadę odnawiania w wybranym wieku, podobną do modelu Kaufmanna, tyle że biorą oni pod uwagę dyskonto sum już wydatkowanych.

Kolejnym modelem, w którym parametr wieku pojazdu odgrywa istotną rolę, jest model Houldena. Służy on do wyznaczania optymalnego wieku środków trwałych, takich jak pojazdy lub inne maszyny i urządzenia. Koszt eksploatacji traktowany jest tutaj jako suma kosztu stałego niezależnego od wieku urządzenia i kosztu zmiennego, który – jak założono – jest ciągłą, niemalejącą funkcją czasu. Celem metody jest wyznaczenie optymalnego wieku T, po osiągnięciu którego pojazd powinien być wycofany z eksploatacji niezależnie od stanu technicznego, w jakim się wówczas znajduje. Wartość T można znaleźć minimalizując całkowity koszt eksploatacji pojazdu samochodowego w ciągu okresu $(0, t)$ przypadający na jednostkę czasu. Całkowite koszty $K(t)$ poniesione na eksploatację pojazdu w czasie $(0, t)$ wynoszą:

$$K(t) = tc + \int_0^t f(x)\, d(x) \tag{2}$$

gdzie:

c – koszt stały przypadający na jednostkę czasu,

t – czas.

Koszty $L(t)$ przypadające na jednostkę czasu w tym okresie wynoszą

$$L(t) = c + \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\, d(x) \tag{3}$$

Szukaną wielkością jest taka wartość $t = T$, aby

$$L(T) = \min_t \{L(t)\} \tag{4}$$

W tym celu dwukrotnie różniczkujemy funkcję $L(t)$.

$$L'(t) = -\frac{1}{t^2}\int_0^t f(x)\,d(x) + \frac{1}{t}\,f(t) \tag{5}$$

gdzie *f*(*t*) – koszt zmienny jako funkcja ciągła czasu.

$$L'(t) = 0, \text{ gdy } \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,d(x) = f(t) \tag{6}$$

lub

$$c + \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,d(x) = c + f(t) \tag{7}$$

$$\begin{gathered} L''(t) = \frac{2}{t^3}\int_0^t f(x)\,d(x) - \frac{2}{t^2}\,f(t) + \frac{1}{t}\,f'(t) = \\ = -\frac{2}{t}\left[-\frac{1}{t^2}\int_0^t f(x)\,d(x) + \frac{1}{t}\,f(t)\right] + \frac{1}{t}\,f'(t) = -\frac{2}{t}\,L'(t) + \frac{1}{t}\,f'(t) \end{gathered} \tag{8}$$

czyli

$$L''(t) = -\frac{2}{t}\,L'(t) + \frac{1}{t}\,f'(t) \tag{9}$$

Jeżeli $L'(t) = 0$, to $L''(t) \geq 0$, gdyż $f(t)$ jest funkcją niemalejącą.

A więc, jeśli wartość *t*, dla której $L'(t) = 0$ jest punktem ekstremalnym, jest to minimum. Szukana wartość $t = T$ jest więc rozwiązaniem równania

$$c + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,d(x) = c + f(T) \tag{10}$$

czyli

$$L(T) = c + f(T) \tag{11}$$

Powyższe równanie ma następującą interpretację: oczekiwany średni koszt eksploatacji urządzenia w okresie (0, *T*) jest minimalny, jeśli urządzenie wycofane jest w momencie *T*, w którym bieżące koszty eksploatacji równe są przeciętnym kosztom eksploatacji za cały okres (0, *T*)[6].

Następnym godnym przedstawienia modelem jest służący do wyznaczania optymalnego wieku urządzeń, w tym pojazdów samochodowych, model Jardine'a. W modelu tym rozróżnia się następujące koszty:

- *f*(*t*) – koszt eksploatacji urządzenia w wieku *t*,
- *α* – koszt odnowy urządzenia; przyjmuje się, że koszt odnowienia jest niezależny od wieku urządzenia wycofanego z eksploatacji (byłby zależny, gdyby odnowieniem był remont kapitalny),
- *C*(*t*) – łączny koszt eksploatacji i odnowy urządzenia użytkowanego przez okres (0, *t*), przypadający na jednostkę czasu w tym okresie;

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[\int_0^t f(x)\,d(x) + \alpha\right] \tag{12}$$

Optymalny wiek urządzenia *t* = *T* znajdujemy minimalizując funkcję *C*(*t*) jednostkowego kosztu w okresie (0, *t*). Autor modelu minimalizował funkcję *C*(*t*) zdefiniowaną wzorem (12).

Model może być uogólniony dla dowolnej rosnącej ciągłej i różniczkowalnej funkcji *f*(*t*) określonej dla $t \geq 0$. Wtedy:

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[\int_0^t f(x)\,d(x) + \alpha\right] \tag{13}$$

$$C'(t) = \frac{1}{t^2}\left[f\ (t) - \int_0^t f(x)\,d(x) - \alpha\right] \tag{14}$$

Aby $C'(t)=0$, musi zachodzić:

$$\frac{1}{t}\left[\int_0^t f(x)\,d(x) + \alpha\right] = f(t) \tag{15}$$

[6] I. Koźniewska, M. Włodarczyk, *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1978, s. 59–61.

Liczba T jest optymalnym wiekiem urządzenia, gdy jest pierwiastkiem równania:

$$\frac{1}{T}\left[\int_0^T f(x)\,d(x)+\alpha\right]=f(T) \tag{16}$$

które można inaczej zapisać w postaci

$$C(T)=f(T) \tag{17}$$

W punkcie $t = T$ funkcja $C(t)$ osiągnęła minimum, ponieważ

$$C''(T)=\frac{1}{T}\,f'(T) \tag{18}$$

a przy założeniu rosnącej funkcji $f(t)$ jest $C''(T) > 0$[7].

Porównując uogólniony model Jardine'a z modelem Houldena, można wyciągnąć wniosek, że jeśli koszt eksploatacji jest dowolną rosnącą i ciągłą funkcją czasu, to urządzenie należy odnawiać w momencie, w którym bieżący koszt eksploatacji zrównuje się ze średnim kosztem eksploatacji za cały dotychczasowy okres. Metoda Houldena i uogólniona metoda Jardine'a różnią się, po pierwsze, ujęciem kosztów eksploatacji (Houlden dzieli te koszty na stałe i zmienne, Jardine bierze je łącznie) i po drugie, kryterium optymalizacyjnym (Houlden minimalizuje koszt eksploatacji przypadający na jednostkę czasu, Jardine minimalizuje koszt eksploatacji i odnowienia urządzenia przypadający na jednostkę czasu). Wnioski wynikające z obu modeli są jednakowe: urządzenia należy odnawiać w momencie, w którym koszt przyjęty za podstawę minimalizacji jest równy przeciętnemu kosztowi eksploatacji[8].

---

[7] A.K.S. Jardine, *Operational Research in Maintenance*, Manchester University Press 1970.

[8] I. Koźmińska, W. Włodarczyk, *op.cit.*, s. 64.

Podsumowanie

Przedstawione w tym artykule modele nie są oczywiście wszystkimi, jakie zna teoria optymalizacji. Można jednak na ich podstawie zrozumieć istotę zagadnień dotyczących wycofywania z eksploatacji pojazdów samochodowych i zastępowania ich pojazdami nowymi.

Niektórzy badacze zauważają, że kryterium stosowane w większości modeli optymalizacyjnych można ogólnie sformułować jako minimalizację oczekiwanego łącznego kosztu eksploatacji i odnowienia, przypadającego na jednostkę czasu użytkowania obiektu. Warto dodać w tym miejscu, że w analizie procesu zużycia środków transportu celowe jest odnoszenie kosztów nie do czasu użytkowania, lecz liczby przebytych kilometrów, gdyż faktycznym miernikiem wykonanej przez nie pracy jest nie czas ich życia, lecz przejechana droga.

BASIC ELEMENTS OF THEE OPTIMISATION THEORY. A SELECTION OF PRACTICAL MODELS OF VECHICLES REPLACEMENT IN TRANSPORT ENTERPRISES

Summary

The article presents issues concerning basic elements of the optimisation theory in relation to the problem of vehicle replacement in transport enterprises. Next, a selection of practical models of vehicles replacement in the transport enterprises is presented.

Translated by Tomasz Chojnacki