

Paweł Kobus

Uogólnione rozkłady hiperboliczne w modelowaniu stóp zwrotu indeksu WIG20

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 9, 605-613

2008

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach dozwolonego użytku.

PAWEŁ KOBUS

UOGÓLNIONE ROZKŁADY HIPERBOLICZNE W MODELOWANIU STÓP ZWROTU INDEKSU WIG20

Wstęp

Wyróżnia się dwa rodzaje stóp zwrotu dla szeregów finansowych: proste stopy zwrotu oraz logarytmiczne stopy zwrotu. W obydwu przypadkach najczęściej przyjmuje się, że podlegają one rozkładowi normalnemu [Tsay 2005].

Pomijając możliwe niezgodności empiryczne należy zauważyć, że proste stopy zwrotu nie mogą podlegać jednocześnie rozkładowi normalnemu dla dwóch różnych długości momentów czasowych np. dziennych i tygodniowych. Wynika to z faktu, że zmienna losowa będąca iloczynem zmiennych o rozkładach normalnych nie ma rozkładu normalnego.

W przypadku logarytmicznych stóp zwrotu nie istnieje wspomniany powyżej problem, ponieważ łączna stopa zwrotu dla dwóch momentów czasowych jest sumą stóp zwrotu dla poszczególnych momentów. Jednak również w przypadku logarytmicznych stóp zwrotu, tak samo jak w przypadku prostych stóp zwrotu założenie o rozkładzie normalnym jest niezgodne z wieloma badaniami, które wskazują na leptokurtyczny charakter i możliwą asymetrię rozkładów empirycznych stóp zwrotu.

W literaturze najczęściej wymieniane są dwie rodziny rozkładów umożliwiające uwzględnienie leptokurtycznych własności rozkładu stóp zwrotu. Są to rodzina rozkładów α - stabilnych oraz rodzina uogólnionych rozkładów hiperbolicznych.

Poniższa praca jest poświęcona analizie możliwości modelowania rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu z indeksu WIG20 przy pomocy uogólnionych

rozkładów hiperbolicznych, ze szczególnym uwzględnieniem precyzji oszacowań wartości zagrożonej VaR i CVaR.

Uogólnione rozkłady hiperboliczne

Rodzina uogólnionych rozkładów hiperbolicznych została zaproponowana w 1977 przez Ole Barndorff-Nielsen [Barndorff-Nielsen 1977]. Jest to bardzo szeroka klasa rozkładów obejmująca jako szczególne przypadki np. rozkłady: Studenta, Laplace, hiperboliczny, normalny odwrotny gaussowski, wariancji gamma.

Uogólniony rozkład hiperboliczny jest rozkładem ciągłym zdefiniowanym jako mieszanina rozkładów normalnych, przy czym jako rozkład mieszający użyty jest uogólniony odwrotny rozkład.

Funkcja gęstości uogólnionego rozkładu hiperbolicznego GH została przedstawiona poniżej, jest to jedna z kilku możliwych parametryzacji.

$$f_x(x) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2} K_{\lambda-1/2}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \exp(\beta(x - \mu))}{\sqrt{2\pi} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) (\sqrt{\delta^2 - (x - \mu)^2})^{1/2-\lambda}}$$

gdzie K_λ oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela trzeciego rodzaju rzędu λ oraz

$$\delta \geq 0, |\beta| < \alpha \quad \text{if } \lambda > 0$$

$$\delta > 0, |\beta| < \alpha \quad \text{if } \lambda = 0$$

$$\delta > 0, |\beta| \leq \alpha \quad \text{if } \lambda < 0.$$

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej X podlegającej rozkładowi GH wynoszą [Bandorf-Nielsen i Stelzer 2004]:

$$E(X) = \mu + \frac{\beta \delta}{\gamma} \frac{K_{\lambda+1}(\delta \gamma)}{K_\lambda(\delta \gamma)}$$

$$\text{Var}(X) = \delta^2 \left(\frac{K_{\lambda+1}(\delta \gamma)}{\delta \gamma K_\lambda(\delta \gamma)} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} \left(\frac{K_{\lambda+2}(\delta \gamma)}{K_\lambda(\delta \gamma)} - \left(\frac{K_{\lambda+1}(\delta \gamma)}{K_\lambda(\delta \gamma)} \right)^2 \right) \right).$$

Jak już wspomniano rodzina rozkładów GH jest bardzo pojemna i tak np. ustalając $\lambda = -\frac{1}{2}$ uzyskujemy normalny odwrotny rozkład gaussowski NIG z funkcją gęstości [Andersson 2001]:

$$f_x(x) = \frac{\delta \alpha \exp\left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) \exp(\beta(x - \mu))}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}},$$

gdzie $\delta > 0$ i $0 < |\beta| < \alpha$.

Co ciekawe jako rozkłady graniczne można uzyskać również rozkłady z poza rodziny GH np. dla $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\beta = 0$ i $\alpha \rightarrow 0$ uzyskujemy rozkład Cauchego, zaś dla $\beta = 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ i $\sigma^2 = \frac{\delta}{2}$ rozkład NIG zbiega do rozkładu normalnego o parametrach μ i σ^2 .

Badanie rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG20

Stopy zwrotu zostały obliczone na podstawie kursów zamknięcia: dla indeksu WIG20 z dni od 1994-04-14 do 2008-02-26, co w sumie dało 3436 obserwacji logarytmicznych stóp zwrotu

$$r_t = \ln\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right).$$

Dla tak uzyskanego zbioru danych zostały obliczone podstawowe statystyki opisowe:

- średnia 0.000322
- mediana 0.000120
- wariancja 0.000404
- kurtoza 4.686765
- wsp. skośności -0.133102

Obliczona kurtoza o 1.69 przekracza kurtozę rozkładu normalnego. Świadczy to wyraźnie o leptokurtycznym charakterze rozkładu stóp zwrotu.

W tabeli 1 przedstawiono dopasowanie najważniejszych rozkładów z rodziny GH.

Zgodnie z wartością funkcji wiarygodności (*llf*) najlepsze dopasowanie wykazują rozkłady NIG przy czym dopasowanie rozkładu asymetrycznego ($\gamma \neq 0$) jest w niewielkim stopniu lepsze od dopasowania symetrycznego NIG. Jednak biorąc pod uwagę kryterium Akaike (*AIC*) najlepszym rozkładem jest symetryczny rozkład NIG.

Dodatkowo do sprawdzenia istotności asymetrii rozkładu można posłużyć się testem bazującym na ilorazie funkcji wiarygodności LRT (Likelihood Ratio Test)

$$LRT = 2(LLF_1 - LLF_0)$$

W przypadku, gdy hipoteza jest prawdziwa LRT ma asymptotycznie rozkład $\chi^2_{(p_1 - p_0)}$, gdzie p_1 i p_0 oznaczają liczby parametrów odpowiednich modeli.

Zastosowanie tego testu do porównania dwóch modeli, z których jeden zawiera parametr odpowiedzialny za modelowanie efektu dźwigni, zaś drugi nie, powinno dać odpowiedź co do występowania asymetrii.

Tabela 1. Wyniki dopasowania dla analizowanych modeli

model	AIC	llh	λ	α	μ	δ	γ
NIG	-17602.46	8804.23	-0.50000	0.72815	0.000236	0.02005	0.000000
NIG	-17600.64	8804.32	-0.50000	0.72866	0.000055	0.02005	0.000266
ghyp	-17600.56	8804.28	-0.66184	0.71305	0.000244	0.02008	0.000000
ghyp	-17598.72	8804.36	-0.64117	0.71483	0.000074	0.02008	0.000248
t	-17594.71	8800.35	-1.79928	0.00000	0.000292	0.02091	0.000000
t	-17592.73	8800.37	-1.80014	0.00000	0.000234	0.02090	0.000086
hyp	-17589.84	8797.92	1.00000	0.40082	0.000215	0.01969	0.000000
hyp	-17588.19	8798.09	1.00000	0.40036	-0.000049	0.01969	0.000371
VG	-17582.96	8794.48	1.24385	0.00000	0.000209	0.01969	0.000000
VG	-17581.33	8794.67	1.24028	0.00000	-0.000026	0.01970	0.000349

Źródło: opracowania własne.

Jeżeli porównamy model NIG z parametrem asymetrii $\gamma \neq 0$ z modelem NIG, który nie zawiera parametru γ ($\gamma = 0$), to uzyskamy wartość statystyki testowej 0.188, podczas gdy wartość krytyczna na poziomie istotności 0,05 wynosi 3,84. Świadczy to braku efektu asymetrii w rozkładzie logarytmicznych stóp zwrotu WIG20.

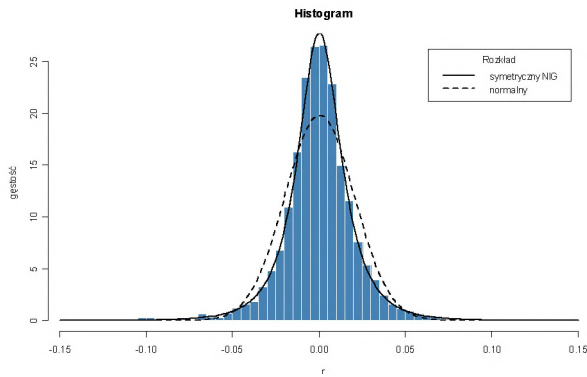
Ocena jakości dopasowania rozkładu NIG

Ocena jakości dopasowania w przypadku rozkładów z rodziny GH jest z konieczności przeprowadzana przy użyciu metod graficznych. Typowe testy stosowane do badania zgodności z rozkładem nie posiadają wersji umożliwiają-

¹ Porównywany model 0 powinien zawierać się w modelu 1.

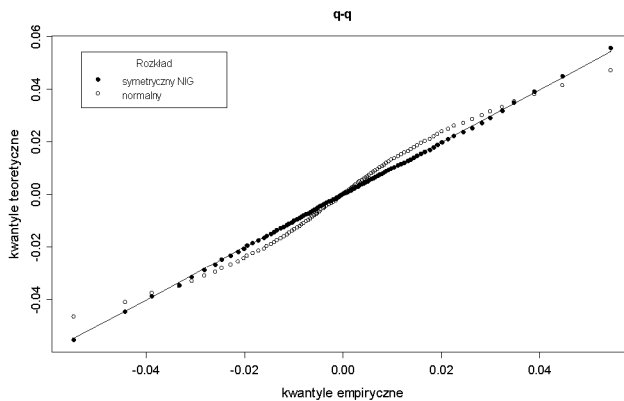
cych ich stosowanie w przypadku gdy hipotetycznym rozkładem jest rozkład z rodziny GH.

Na rys. 1 przedstawiono dopasowanie funkcji gęstości symetrycznego rozkładu NIG (linia ciągła) oraz dla porównania dopasowanie funkcji gęstości rozkładu normalnego (linia przerywana). Rysunek wskazuje na lepsze dopasowanie rozkładu NIG co jest szczególnie wyraźne w środkowej części wykresu. Aby dokładniej przyjrzeć się dopasowaniu w skrajnych częściach wykonany został wykres Q-Q. Przy czym zarówno kwantyle empiryczne jak i teoretyczne, z uwagi na bardzo dużą liczbę obserwacji, są kwantylami rzędów: 0.01, 0.02, ..., 0.99.



Rys. 1. Histogram z funkcją gęstości oszacowanego rozkładu NIG.

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wykres Q-Q dla oszacowanego rozkładu NIG.

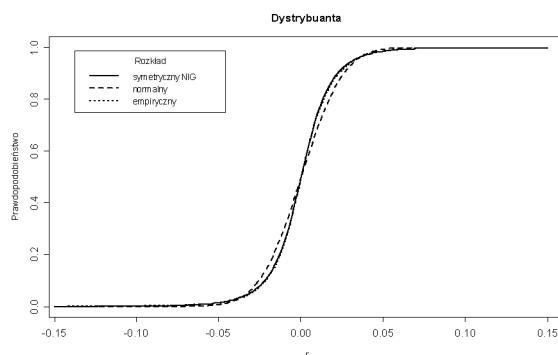
Źródło: opracowanie własne.

W przypadku idealnego dopasowania punkty powinny ułożyć się dokładnie wzdłuż prostej $y = x$, jednak oczywiście w praktyce jest to nieosiągalne. Niemniej jednak sporządzony wykres pozwala zauważyć zdecydowanie lepsze dopasowanie rozkładu NIG również w przypadku skrajnych kwantyli. Zgodność kwantyli empirycznych i teoretycznych jest szczególnie ważna dla precyzji oszacowań VaR i CvaR. Z punktu widzenia statystyki VaR jest przecież specyficznym zinterpretowanym kwantylem a CVaR warunkową wartością oczekiwaną.

Przedstawiono na rys. 3 i 4 dopasowanie dystrybuanty do danych empirycznych wskazuje, że analizowany symetryczny rozkład NIG wykazuje bardzo dobre dopasowanie i jego stosowanie jest uzasadnione.

Wpływ rozkładu prawdopodobieństwa na ocenę VaR i CVaR

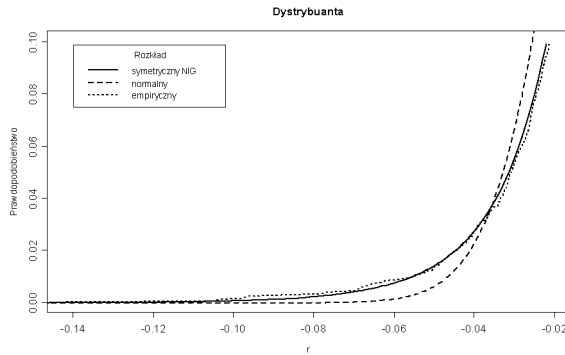
Wybór rozkładu prawdopodobieństwa dla modelowania zachowania logarytmicznych stóp zwrotu ma bardzo praktyczne znaczenie dla oszacowania wartości takich miar ryzyka jak VaR i CVaR. Błędny wybór modelu może prowadzić do bardzo dużych różnic w wartościach tych miar. Dla zilustrowania skali tych różnic w tabeli 2 zostały przedstawione wartości VaR i CVaR dla indeksu WIG20.



Rys. 3. Wykres całej dystrybuanty dla oszacowanego rozkładu NIG.

Źródło: opracowanie własne.

Wartości empiryczne VaR i obliczone na podstawie dopasowanego rozkładu symetrycznego NIG są bardzo podobne, natomiast wartości VaR uzyskane na podstawie rozkładu normalnego są dla niskich wartości prawdopodobieństwa zaniżane a dla wyższych począwszy od około 0.05 zawyżane. Tylko dla prawdopodobieństwa równego około 0.05 są zgodne z danymi empirycznymi.



Rys. 4. Wykres lewej (1/10) części dystrybuanty dla oszacowanego rozkładu NIG.
Źródło: opracowanie własne.

W przypadku CVaR obserwujemy podobną prawidłowość. Jednak w tym przypadku krytyczne prawdopodobieństwo jest równe około 0.1.

Wnioski

Rozpatrywana rodzina uogólnionych rozkładów hiperbolicznych może być stosowana do modelowania rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG20 ze znacznie lepszymi wynikami niż rozkład normalny.

Tabela 2. Wartości VaR i CVaR dla indeksu WIG20

p	empiryczne		Symetryczny NIG		Normalny	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
0.001	-0.1035	-0.1135	-0.0945	-0.1130	-0.0618	-0.0672
0.005	-0.0688	-0.0904	-0.0666	-0.0840	-0.0515	-0.0573
0.010	-0.0546	-0.0768	-0.0554	-0.0722	-0.0465	-0.0529
0.020	-0.0443	-0.0629	-0.0446	-0.0608	-0.0410	-0.0482
0.050	-0.0306	-0.0469	-0.0313	-0.0464	-0.0328	-0.0413
0.100	-0.0212	-0.0362	-0.0219	-0.0362	-0.0255	-0.0351
0.200	-0.0126	-0.0263	-0.0129	-0.0265	-0.0166	-0.0280

Źródło: opracowania własne.

Spośród rozpatrywanych modeli najlepszym dopasowaniem wykazał się asymetryczny normalny odwrotny rozkład gaussowski NIG. Jednak ocena parametru γ odpowiedzialnego za asymetrię nie okazała się istotnie różna od zera, wskazuje to, że w przypadku indeksu WIG20 efekt asymetrii można pominąć podczas modelowania.

Graficzna analiza jakości dopasowania symetrycznego rozkładu NIG wskazuje na wysoką zgodność kwantyli teoretycznych i empirycznych. Jest to szczególnie istotna własność w przypadku wykorzystania oszacowanego rozkładu do określania wartości zagrożonej VaR lub warunkowej wartości oczekiwanej straty CVaR w przypadku przekroczenia wartości progowej.

Literatura

1. Andersson J., *On the normal inverse Gaussian stochastic volatility model*. Journal of Business and Economic Statistics, 19:44–54, 2001.
2. Barndorff-Nielsen O., *Hyperbolic Distribution and Distribution on Hyperbolae*. Scand. J. Statist. 5: 151-157, 1977
3. Barndorff-Nielsen O. E., Stelzer R., *Absolute moments of generalized hyperbolic distributions and approximate scaling of normal inverse gaussian Lévy processes*. Scandinavian Journal of Statistics, vol. 32, issue 4, pages 617-637, 2005.
4. Tsay R. S., *Analysis of financial time series*. John Wiley & Sons, New Jersey 2005.

STRESZCZENIE

Praca jest poświęcona analizie możliwości modelowania logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG20 notowanego na warszawskiej GPW przy pomocy rozkładów z rodziny uogólnionych rozkładów hiperbolicznych. Wśród rozpatrywanych rozkładów najlepszym dopasowaniem wykazał się asymetryczny normalny odwrotny rozkład gaussowski NIG. Jednak z powodu nieistotności efektu asymetrii do graficznej analizy jakości dopasowania wybrano symetryczny rozkład NIG. W pracy stwierdzono, że rozkład NIG wykazuje się zdecydowanie lepszym dopasowaniem do danych empirycznych niż rozkład normalny. Fakt ten pozwala na precyzyjniejszą ocenę wartości takich miar ryzyka jak VaR i CVaR.

MODELLING WIG20 RETURNS WITH GENERALISED HYPERBOLIC DISTRIBUTION

SUMMARY

The paper is dedicated to analysis of generalised hyperbolic distribution usefulness for modelling WIG20 logarithmic returns. Among examined distributions the best fit was achieved by asymmetric NIG. However, due to asymmetry lack of significance, for thorough graphical analysis and comparison with normal distribution symmetrical NIG

was chosen. The paper gives evidence that normal-inverse Gaussian distribution is much better choice for describing behaviour of WIG20 logarithmic returns than normal distribution. Hence estimation of VaR and CVaR is more accurate.

Translated by P. Kobus

Dr Paweł Kobus

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
pawel.kobus@statystyka.info