Sylwester Smolik

Związek zjawisk przyrodniczych z ekonomicznymi

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 31/1, 279-290

2013

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 31

Sylwester Smolik
Wyższa Szkoła Informatyki i Ekonomii w Olsztynie

ZWIĄZEK ZJAWISK PRZYRODNICZYCH Z EKONOMICZNYMI

Streszczenie

Roczny przebieg temperatury powietrza odciska piętno na wielu, bardzo różnych zjawiskach gospodarczych. Z tego powodu przebieg średniej miesięcznej temperatury powietrza dla Warszawy w 2009 roku i produkcję miesięczną energii elektrycznej w Polsce – z racji ich sezonowości – opisano modelem $y_t = s + \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) + \varepsilon_t$, w którym T jest okresem badanego zjawiska. Jeżeli dane punkty empiryczne (t, y_t) dla $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, są kompletne, oraz liczba punktów empirycznych jest wielokrotnością okresu badanego zjawiska, czyli $n = kT$, to oszacowanie parametrów modelu jest następujące:

$$\hat{s} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t;\ \hat{\theta} = \mathrm{arctg}\left[\sum_{t=1}^{n} y_t \cos wt \Big/ \sum_{t=1}^{n} y_t \sin wt\right];$$

$$\widehat{\mathrm{A}} = \frac{2}{n}\left[\cos\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{1n} y_t \sin wt + \sin\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{12} y_t \cos wt\right],\ \text{gdzie}\ w = 2\pi/T.$$

Przebieg średniej temperatury miesięcznej w Warszawie w 2009 roku ma postać:

$$\widehat{T}(t) = 8{,}83 - 10{,}62\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1{,}028\right)\ \text{w}\ {}^{\circ}\mathrm{C};\ \widehat{R^2} = 0{,}969;\ s_e = 1{,}56\ {}^{\circ}\mathrm{C}.$$

Produkcja miesięczna energii elektrycznej w Polsce w 2009 roku:

$$\widehat{E}(t) = 12{,}642 + 1{,}529\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1{,}489\right)\ \text{w TWh};\ \widehat{R^2} = 0{,}867;\ s_e = 0{,}489\ \text{TWh}.$$

Zmienne losowe E i T są wysoce istotnie skorelowane ujemnie, dlatego znajdujemy regresję liniową między nimi:

$$\widehat{E}(T) = -0{,}1288 \cdot T + 13{,}777 \text{ w TWh}; \quad \widehat{R^2} = 0{,}731; \quad s_e = 0{,}659 \text{ GWh}; \quad v = 5{,}2\% .$$

Opisując produkcję energii elektrycznej w dłuższym przedziale czasowym, należy oczekiwać rosnącego trendu i sezonowości opisanej harmoniką.

Słowa kluczowe: harmonika, produkcja energii elektrycznej, średnia temperatura.

Wprowadzenie

Zdajemy sobie sprawę z tego, że produkowana energia elektryczna ma zaspokajać potrzeby rozwijającego się przemysłu i coraz większe zapotrzebowanie komunalne. Z tego powodu powinna być zmienna w poszczególnych porach roku, ale nie znamy tych związków ilościowych. Teoretycznie lato jest okresem, gdy powinno spadać zapotrzebowanie na energię elektryczną – wyłącza się ogrzewanie. Wraz ze wzrostem temperatury powietrza rośnie jednak zapotrzebowanie na energię elektryczną bierną – niezbędną do funkcjonowania wszelkiego rodzaju klimatyzatorów. Popyt na energię elektryczną wynika z korzyści ekonomicznych, jakie daje jej stosowanie, oraz zapewnienia komfortu jej użytkownikom. Przebieg termiczny danego roku w wybranej miejscowości można charakteryzować za pomocą średnich temperatur miesięcznych podanych w publikatorach. Uwzględniając zwiększone potrzeby zimowe na energię i kłopoty z jej przesyłaniem, w każdym momencie roku można oczekiwać awarii tego systemu. W artykule podjęto próbę wykazania, że przebieg termiczny roku wymusza produkcję odpowiedniej ilości energii elektrycznej w Polsce.

1. Przebieg średniej temperatury miesięcznej w Warszawie w 2009 roku

Przeciętny rok termiczny dla Polski utożsamimy z przebiegiem średniej temperatury miesięcznej w Warszawie. Jest to miasto centralnie położone w kraju i dobrze opracowane hydrologicznie. Kształtowanie się średniej temperatury miesięcznej T w Warszawie w 2009 roku przedstawiono w tabeli 1 [1, s. 61].

Tabela 1. Kształtowanie się średniej temperatury miesięcznej T
w Warszawie w 2009 roku

Miesiąc t	1	2	3	4	5	6
T_t (°C)	–2,7	–0,6	2,7	11,3	13,6	16,2
$\hat{T}_t$ z (3)	–1,79	–0,47	3,34	8,63	13,96	17,92
Miesiąc t	7	8	9	10	11	12
T_t (°C)	19,9	18,6	15,5	6,9	5,6	–1,0
$\hat{T}_t$ z (3)	19,45	18,13	14,32	9,03	3,70	–0,26

Źródło: opracowanie własne na podstawie [1, s. 61].

Zmienności tej nadamy ciągły przebieg (wyrównujemy) w postaci harmoniki:

$$T_t = s + \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \theta\right) + \varepsilon_t\,, \tag{1}$$

gdzie $T_0 = 12,\ \ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ 12$.

Ciągłość zmiennej losowej T oznacza, że każdy element czasowy roku t, może teraz być końcem pewnego miesiąca w sensie średniej temperatury miesięcznej. Założenia konieczne są spełnione (liczebność próby jest wielokrotnością okresu zjawiska), dlatego oszacowanie parametrów wprowadzonej krzywej regresji (1) ma postać zgodnie z wzorem wyprowadzonym w pracy [12]:

$$\begin{aligned}
&\hat{s} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} T_t = 106/12 \approx 8{,}83, \qquad 2\pi/T_0 = 2\pi/12 = \pi/6\\
&\hat{\theta} = arctg\left[\sum_{t=1}^{12} T_t \cos\frac{\pi}{6}t \Big/ \sum_{t=1}^{12} T_t \sin\frac{\pi}{6}t\right] = arctg\left[(-54{,}5758) \,/\, (-32{,}9172)\right] =\\
&= arctg\,1{,}65797 \approx 1{,}028\\
&\hat{\mathrm{A}} = \frac{2}{n}\left[\cos\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{12} T_t \sin\frac{\pi}{6}t + \sin\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{12} T_t \cos\frac{\pi}{6}t\right] \approx -10{,}62.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ostatecznie przyjmujemy:

$$\hat{T}(t) = 8{,}83 - 10{,}62\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1{,}028\right);\quad \widehat{R^2} = 0{,}969;\quad s_e = 1{,}56\ ^{\circ}\mathrm{C} \tag{3}$$

Interesuje nas, czy wyznaczony model dobrze pasuje do danych empirycznych, jak tłumaczy zmienność T? W tym celu obliczamy ocenę współczynnika determinacji z próby $\widehat{R^2} = 1-\varphi^2$, w którym $\varphi^2 = \sum_{t=1}^{n}\left(T_t - \hat{T}_t\right)^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n}\left(T_t - \bar{T}\right)^2 = 21,9818/715,88667 \approx 0,0307 \to \widehat{R^2} = 0,969$ (dane z tabeli 1). Interpretujemy go następująco: model (3) tłumaczy 96,9% zmienności temperatury średniej miesięcznej T, jest więc dobrym modelem. Interesuje nas też, jaki jest średni błąd s_e oszacowania z wykorzystaniem funkcji (3) (odchylenie standardowe składnika resztowego). W tym celu obliczamy $s_e^2 = \sum_{t=1}^{n}(T_t - \hat{T}_t)^2 \Big/ (n-k) = 21,9918/(12-3) \approx 2,4424 \to s_e \approx 1,56\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Wyznaczymy ekstrema funkcji (3):

$$\hat{T}' = 0 \to \cos\left(\frac{\pi}{6}t + 1,028\right) = 0 \to \left(\frac{\pi}{6}t + 1,028 = \pi/2 \ \text{ lub } \ \frac{\pi}{6}t + 1,028 = 1,5\pi\right)$$

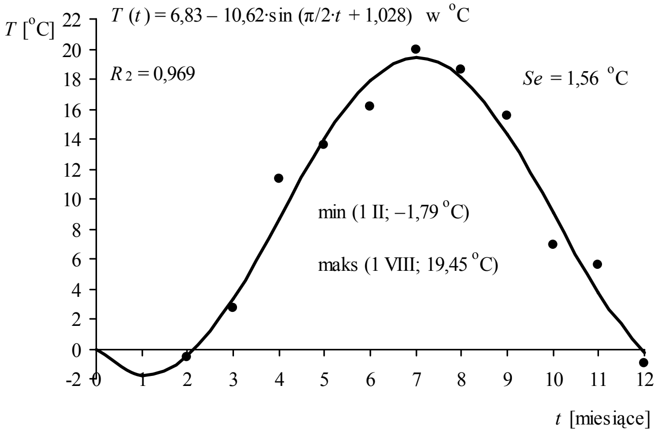
$$\to (t_1 \approx 1,037 \ \text{ lub } \ t_2 \approx 7,037) \to \hat{T}(t_1) = -1,79\,^{\circ}\mathrm{C} \ \text{ oraz } \ \hat{T}(t_2) = 19,45\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Uwzględniając skalę, otrzymujemy:

$$T_{\min} = (1\mathrm{II};\ -1,79\,^{\circ}\mathrm{C}) \quad \text{oraz} \quad T_{\text{maks}} = (1\mathrm{VIII};\ 19,45\,^{\circ}\mathrm{C}).$$

Na rysunku 1 przedstawiono przebieg średniej temperatury miesięcznej w Warszawie w 2009 roku.

Rysunek 1. Przebieg średniej temperatury miesięcznej w Warszawie w 2009 roku



Źródło: opracowanie własne.

2. Przebieg miesięcznej produkcji energii elektrycznej w Polsce w 2009 roku

Produkcja energii elektrycznej jest jednym z najszybciej rosnących działów gospodarki współczesnego świata. Od niej głównie zależy rozwój przemysłu oraz w dużej mierze rolnictwa i transportu. Miesięczną produkcję energii elektrycznej w Polsce w 2009 roku E (TWh) [1, s. 166] przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Miesięczna produkcja energii elektrycznej w Polsce w 2009 roku E (TWh)

Miesiąc t	1	2	3	4	5	6
E_t (TWh)	14,41	12,75	13,56	11,62	11,24	11,07
$\widehat{E}_t$ z (6)	14,024	13,512	12,767	11,988	11,385	11,118
Miesiąc t	7	8	9	10	11	12
E_t (TWh)	11,66	11,59	12,42	13,59	13,37	14,42
$\widehat{E}_t$ z (6)	11,260	11,772	12,517	13,296	13,899	14,166

Źródło: opracowanie własne na podstawie [1, s. 166].

Zmienności miesięcznej produkcji energii elektrycznej nadamy ciągłość i opiszemy harmoniką, ponieważ zjawisko jest sezonowe:

$$E_t = s + \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) + \varepsilon_t \tag{4}$$

gdzie $T = 12, \quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ 12$.

Liczebność obserwacji $n = 12$ jest całkowitą wielokrotnością okresu tego zjawiska; $T = 12$, dlatego konieczne założenia metody są spełnione i możemy szacować parametry modelu (4) [12].

$$\begin{gathered}
\hat{s} = \sum_{t=1}^{n} E_t / n = 151{,}7/12 \approx 12{,}642 \quad \text{(na podstawie tabeli 2)} \\
\hat{\theta} = \operatorname{arctg}\left[\sum_{t=1}^{n} E_t \cos\frac{\pi}{6}t \Big/ \sum_{t=1}^{n} E_t \sin\frac{\pi}{6}t\right] = \operatorname{arctg}(9{,}141204/0{,}748519) \approx 1{,}489 \\
\widehat{\mathrm{A}} = \frac{2}{n}\left[\cos\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{n} E_t \sin\frac{\pi}{6}t + \sin\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{n} E_t \cos\frac{\pi}{6}t\right] \approx 1{,}529
\end{gathered} \tag{5}$$

Ostatecznie przyjmujemy:

$$\widehat{E}(t) = 12,642 + 1,529\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1,489\right) \text{ w TWh; } \widehat{R^2} = 0,867$$
$$s_e = 0,489 \text{ TWh; } v = 3,9\% \tag{6}$$

Jednocześnie staramy się sprawdzić, jak dobry jest ten model? Współczynnik zbieżności

$$\varphi^2 = \sum_{t=1}^{n}\left(E_t - \widehat{E}_t\right)^2 \Big/ \sum_{t=1}^{n}\left(E_t - \overline{E}\right)^2 = 2,150568/16,1718 = 0,13298$$
$$\to \widehat{R^2} = 0,867 \text{ (dane z tabeli 2).}$$

Średni błąd oszacowania w przypadku wykorzystania funkcji (6) $s_e^2 = \sum_{t=1}^{n}(E_t - \widehat{E}_t)^2 \Big/ (n-k) = 2,150568/(12-3) = 0,238952 \;\to s_e = 0,489$ TWh.

Współczynnik zmienności losowej $v = 100 s_e / \overline{E} \approx 3,9\%$. Ostatecznie możemy ocenić, że model (6) jest dostateczny. Wyznaczymy jeszcze ekstrema funkcji (6):

$$\widehat{E}' = 0 \to \cos\left(\frac{\pi}{6}t + 1,489\right) = 0 \to \left(\frac{\pi}{6}t + 1,489 = \pi/2 \text{ lub } \frac{\pi}{6}t + 1,489 = 1,5\pi\right)$$

$$\to (t_1 \approx 1,156 \text{ lub } t_2 \approx 6,156) \to \widehat{E}(t_1) = 14,171 \text{ TWh oraz } \widehat{E}(t_2) = 11,113 \text{ TWh}.$$

Uwzględniając skalę i drugą pochodną (6):

$$\widehat{E}_{\text{maks}} = (5\,\text{I; } 14,171 \text{ TWh}), \quad \widehat{E}_{\text{min}} = (5\,\text{VII; } 11,113 \text{ TWh}).$$

Na rysunku 2 przedstawiono przebieg produkcji miesięcznej energii elektrycznej w Polsce w 2009 roku.

3. Wpływ średniej temperatury miesięcznej na produkcję miesięczną energii elektrycznej

Stwierdziliśmy w zależnościach (3) i (6), że przebieg roczny średniej temperatury miesięcznej T i miesięczna produkcja energii elektrycznej E dają się opisać harmoniką. Jakie są tego dalsze konsekwencje? Jeżeli w innym roku

$E(t) = s_1 + \mathrm{A}_1 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \theta_1\right)$ i $T(t) = s_2 + \mathrm{A}_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \theta_2\right)$, to przy równych fazach początkowych $\theta_1 = \theta_2$ zachodzi:

$$\frac{E - s_1}{\mathrm{A}_1} = \frac{T - s_2}{\mathrm{A}_2} \rightarrow E = \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_2} T + (s_1 \mathrm{A}_2 - s_2 \mathrm{A}_1) / \mathrm{A}_2 \tag{7}$$

Wynika z tego, że miesięczna produkcja energii elektrycznej zależy liniowo od średniej temperatury miesięcznej. We wzorach (3) i (6) fazy początkowe są różne, nie może więc być funkcyjnego związku liniowego między *E* i *T*, ale może będzie zachodził liniowy związek stochastyczny? Najpierw należy więc sprawdzić skorelowanie zmiennych losowych *E* i *T*.

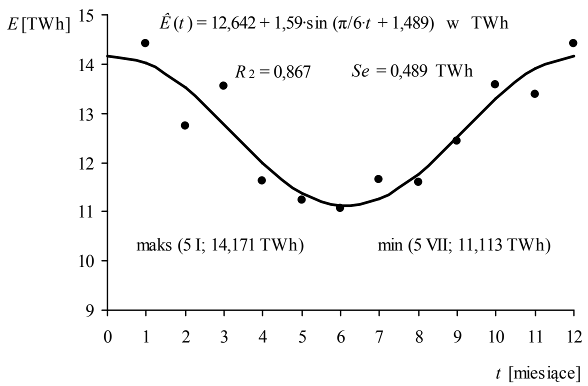
W tym celu zbierzemy je w tabeli 3.

Tabela 3. Wartości zmiennych losowych *E* i *T*

E_t	14,41	12,75	13,56	11,62	11,24	11,07
T_t	–2,7	–0,6	2,7	11,3	13,6	16,2
$\widehat{E}_t$ (11)	14,024	13,512	12,767	11,988	11,385	11,118
E_t	11,66	11,59	12,42	13,59	13,37	14,42
T_t	19,9	18,6	15,5	6,9	5,6	–1,0
$\widehat{E}_t$ (11)	11,260	11,772	12,517	13,296	13,899	14,166

Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Przebieg miesięcznej produkcji energii elektrycznej w Polsce w 2009 roku



Źródło: opracowanie własne.

Niech

$$\operatorname{cov}(T,E)=\sum_{t=1}^{n}(T_t-\overline{T})(E_t-\overline{E})=\sum_{t=1}^{n}T_tE_t-\overline{T}\cdot\sum_{t=1}^{n}E_t=$$
$$=1245{,}9074-105{,}82\cdot 151{,}7/12=-91{,}8338;$$

$$\operatorname{var}(T)=\sum_{t=1}^{n}(T_t-\overline{T})^2=\sum_{t=1}^{n}T_t^2-\overline{T}\cdot\sum_{t=1}^{n}T_t=1646{,}4204-(105{,}82)^2/12=$$
$$=713{,}26437;$$

$$\operatorname{var}(E)=\sum_{t=1}^{n}(E_t-\overline{E})^2=\sum_{t=1}^{n}E_t^2-\overline{E}\cdot\sum_{t=1}^{n}E_t=1933{,}9126-(151{,}7)^2/12= \tag{8}$$
$$=16{,}17177$$

Wtedy współczynnik korelacji z próby

$$r=\frac{\operatorname{cov}(T,E)}{\sqrt{\operatorname{var}(T)\cdot\operatorname{var}(E)}}=\frac{-91{,}8338}{\sqrt{713{,}26437\cdot 16{,}17177}}=-0{,}855 \tag{9}$$

Dowodzi się, że w regresji liniowej współczynnik determinacji z próby jest równy kwadratowi współczynnika korelacji z próby, czyli $\widehat{R^2}=r^2=0{,}731$. Model ten tłumaczy 73,1% zmienności E – mało! Sprawdzamy istotność współczynnika korelacji: $\mathrm{H}_0:\rho=0$ wobec alternatywy $\mathrm{H}_1:\rho\neq 0$ przy $\alpha=0{,}001$:

$$t_{\mathrm{emp}}=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}=\frac{-0{,}855}{\sqrt{1-(0{,}855)^2}}\sqrt{12-2}=-5{,}2133\,.$$

Ponieważ $\left|t_{\mathrm{emp}}\right|=5{,}2133>4{,}5869=t_{0,001;10}$, więc hipotezę H_0 należy odrzucić na korzyść jej alternatywy H_1. Stwierdziliśmy tym samym, że zmienne losowe T i E są wysoce istotnie skorelowane ujemnie – łączy je zależność liniowa. Wyznaczymy tę prostą regresji:

$$E_t=b_0+b_1\cdot T_t+\varepsilon_t \tag{10}$$

Z teorii regresji wiemy, że oszacowanie parametrów modelu (10) ma postać:

$$\hat{b}_1=\frac{\operatorname{cov}(T,E)}{\operatorname{var}(T)}=\frac{-91{,}8338}{713{,}26437}=-0{,}12875\,,$$

$$\hat{b}_0=\overline{E}-\hat{b}_1\cdot\overline{T}=12{,}6417+0{,}12875\cdot 8{,}8183=13{,}777056\,.$$

Przyjmujemy ostatecznie model:

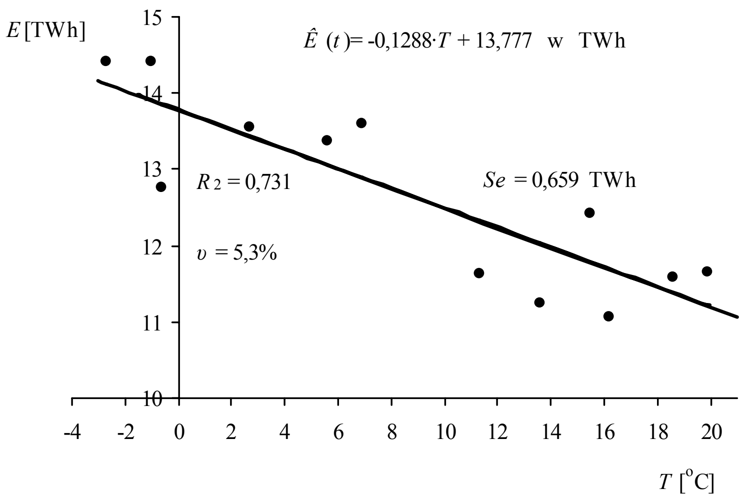
$$\widehat{E}(T) = -0{,}1288 \cdot T + 13{,}777 \text{ w TWh}; \quad \widehat{R^2} = 0{,}731; \quad s_e = 0{,}659; \quad v = 5{,}3\% \quad (11)$$

Wyznaczymy średni błąd szacunku dla funkcji (11):

$$s_e^2 = \sum_{t=1}^{n} (E_t - \widehat{E}_t)^2 \Big/ (n-k) = \frac{\mathrm{var}(E) - \hat{b}_1 \cdot \mathrm{cov}(T,E)}{n-k} =$$

$$= \frac{16{,}17177 - 0{,}1288 \cdot 91{,}8338}{12-2} = 0{,}434357 \to s_e = 0{,}659 \text{ TWh.}$$

Rysunek 3. Rok termiczny dyktuje potrzeby energetyczne



Źródło: opracowanie własne.

Współczynnik zmienności losowej (resztowej) $v = 100\ s_e / \overline{E} = 65{,}9/12{,}6417 \approx 5{,}212 = 5{,}3\%$. Uzyskany związek liniowy (11) obowiązuje w badanym 2009 roku. Sądzimy na podstawie zależności (7), że w innych latach związek między E i T też będzie liniowy, ale czy koniecznie z takimi samymi współczynnikami? Pamiętamy o tym, że energię elektryczną zużywa rozwijający się przemysł, transport i inne działy gospodarki. Można sądzić, że w dłuższym okresie,

w prognozie tego zjawiska da się wyróżnić trend i wahania sezonowe opisane harmoniką.
Korzystając ze związku (7) oraz zależności (3) i (6), otrzymujemy:

$$E = \frac{1{,}529}{-10{,}62} \cdot T + \left[12{,}642 \cdot (-10{,}62) - 8{,}83 \cdot 1{,}529\right] / (-10{,}62) \rightarrow$$
$$\rightarrow E = -0{,}1440 \cdot T + 13{,}913 \quad \text{w TWh} \tag{11}$$

W przedziale zmienności T różni się on niewiele od uzyskanego metodą najmniejszych kwadratów (11). Na rysunku 3 przedstawiono wpływ średniej temperatury miesięcznej powietrza w Warszawie na miesięczną produkcję energii elektrycznej w Polsce w 2009 roku.

Podsumowanie

Produkcja energii elektrycznej to jeden z najważniejszych wskaźników obrazujących stopień rozwoju gospodarczego poszczególnych krajów. Powszechnie uznanym wskaźnikiem zagospodarowania kraju jest zużycie energii elektrycznej na jednego mieszkańca. O poziomie życia jego obywateli świadczy natomiast zużycie energii elektrycznej przez gospodarstwa domowe.

W ostatnich latach zwraca się uwagę nie tylko na ilościową produkcję energii, ale i na sposoby jej pozyskiwania i związane z tym koszty. Wiąże się to z tak zwaną czystą i odnawialną technologią, wykorzystującą promieniowanie słoneczne, energię wody i wiatru. Hydrologia ma w tym zagadnieniu bardzo dużo do zrobienia. Należy przygotować skondensowany (opracowany) materiał empiryczny parametrów klimatu do wykorzystania przez energetyków w modelowaniu lub zrobić to za nich, wskazać najlepsze, naszym zdaniem, miejsca lokalizacji przedsiębiorstw energetycznych, wiatrowych, słonecznych i wodnych, oraz podać szacunki interesujących parametrów. Wówczas produkcja energii elektrycznej nadal będzie jednym z najszybciej rosnących działów gospodarki współczesnego świata.

Literatura

1. „Biuletyn Statystyczny" 2010, nr 6.
2. Hozer J., *Mikroekonometria. Analizy, diagnozy, prognozy*, PWE, Warszawa 1993.
3. Smolik S., *Opis przypowierzchniowych zmian temperatury gruntu*, „Wiadomości Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej" 1997, z. 4.
4. Smolik S., *Opis sezonowości produkcji elektrycznej w Polsce*, Prace Naukowe nr 1022, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Lanego we Wrocławiu, Wrocław 2004.
5. Smolik S., *Opis standardowego roku termicznego dla wybranej miejscowości*, „Przegląd Naukowy Wydziału Melioracji i Inżynierii Środowiska SGGW" 1996, z. 10.
6. Smolik S., *Oszczędne modele dla okresowych szeregów czasowych*, w: *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, red. A. Zeliaś, Akademia Ekonomiczna w Krakowie, Kraków 1998.
7. Smolik S., *Propozycja statystycznego opracowania wiatru*, XXXIII Seminarium Zastosowań Matematyki, Katedry Matematyki AR we Wrocławiu, Wyd. Poligraf, Wrocław 2003.
8. Smolik S., *Przydatność opracowań statystycznych klimatu dla rolnictwa*, „Wiadomości Instytutu Meteorologii Gospodarki Wodnej" 1999, z. 2.
9. Smolik S., *Standardowy rok opadowy i termiczny Krakowa i Olsztyna*, „Wiadomości Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej" 1996, z. 4.
10. Smolik S., *Statystyczne związki usłonecznienia z temperaturami powietrza i gruntu*, „Wiadomości Instytutu Meteorologii Gospodarki Wodnej" 1999, z. 1.
11. Smolik S., *Statystyczny opis usłonecznienia wybranej miejscowości*, „Przegląd Naukowy Wydziału Melioracji i Inżynierii Środowiska SGGW" 1997, z. 13.
12. Smolik S., *Uproszczona procedura estymacji modelu wahań okresowych*, „Przegląd Statystyczny" 1995, z. 3–4.
13. Smolik S., *Użyteczność w technice rolniczej statystycznych opracowań temperatury gleby*, „Inżynieria Rolnicza" 2000, nr 4.
14. Smolik S., *Wpływ usłonecznienia na oscylacje temperatury gruntu*, „Przegląd Naukowy Wydziału Melioracji i Inżynierii Środowiska SGGW" 1997, z. 13.
15. Zeliaś A., *Teoria prognozy*, Wyd. III zm., PWE, Warszawa 1997.
16. Zieliński Z., *Ekonometryczne metody wahań sezonowych*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej" nr 112, Szczecin 1969.

RELATIONSHIP BETWEEN NATURAL AND ECONOMICAL PHENOMENA

Summary

The yearly cycle of air temperature presses out its signs on many various economical phenomena. Thus, the courses of average monthly air temperature for Warsaw in 2009 and the monthly generation of electricity in Poland have been identified by means of the following model $y_t = s + \mathrm{A}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) + \varepsilon_t$, where T expresses the period of the phenomenon under investigation. If the proposed empirical points (t, y_t) for $t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ are complete and the number of the empirical points is a multiplicity of the period of the phenomenon under investigation, i.e. $n = kT$, the estimation of the model parameters is as follows:

$$\hat{s} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t;\ \hat{\theta} = \operatorname{arctg}\left[\sum_{t=1}^{n} y_t \cos wt \Big/ \sum_{t=1}^{n} y_t \sin wt\right];$$

$$\hat{\mathrm{A}} = \frac{2}{n}\left[\cos\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{1n} y_t \sin wt + \sin\hat{\theta}\cdot\sum_{t=1}^{12} y_t \cos wt\right],\ \text{where } w = 2\pi/T.$$

Thus, the course of average monthly air temperature for Warsaw in 2009 becomes:

$$\hat{T}(t) = 8{,}83 - 10{,}62\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1{,}028\right) \text{ in Celsius degrees, } \widehat{R^2} = 0{,}969;\ s_e = 1{,}56\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

and the monthly generation of electricity in Poland in 2009 becomes:

$$\hat{E}(t) = 12{,}642 + 1{,}529\sin\left(\frac{\pi}{6}t + 1{,}489\right) \text{ in TWh; } \widehat{R^2} = 0{,}867;\ s_e = 0{,}489\ \text{TWh}.$$

The random variables E and T are essentially negatively correlated to a high degree and therefore we can find the following linear regression between them:

$$\hat{E}(T) = -0{,}1288\cdot T + 13{,}777 \text{ in TWh; } \widehat{R^2} = 0{,}731;\ s_e = 0{,}659\ \text{GWh};\ v = 5{,}2\%$$

In situations where the generation of electricity is to be identified for a longer time duration, a rising trend and seasonality identified by a harmonic component are to be expected.

Keywords: harmonics, the production of electricity, the average temperature.

Translated by Józef Smolik