Antoni Smoluk

O nieskończoności, liczbach i analogii

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 31/1, 291-312

2013

STUDIA I PRACE WYDZIAŁU NAUK EKONOMICZNYCH I ZARZĄDZANIA NR 31

Antoni Smoluk
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

O NIESKOŃCZONOŚCI, LICZBACH I ANALOGII

Science is a real unity based on mathematics

Streszczenie

Współczesna nauka opiera się na aksjomacie nieskończoności. Nieskończoność implikuje ciągłość. Zastosowania nauk dają empiryczny argument dla tego aksjomatu. Przypuszczenie, że istnieje nieskończony zbiór, jest zupełnie naturalne i nie generuje niespójność. Instytucje finansowe, banki i przemysł, ubezpieczenia, często postępują tak, jakby ich domeny – liczba klientów – były nieskończone. Uwzględniając wpływ czasu, mogą przyjmować coś w rodzaju aksjomatu potencjalnej nieskończoności. Prowadzi to do wybuchu kryzysu. Każdy ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz oraz różnica są liczbami względnie pierwszymi, ma nieskończony zbiór liczb pierwszych (ciąg Dirichleta). Hipoteza. Szereg odwrotności liczb pierwszych ciągu Dirichleta nie jest zbieżny.

Słowa kluczowe: liczby naturalne, nieskończoność, liczby pierwsze, ciąg Dirichleta, hipoteza Goldbacha.

Matematyka i cała nauka bada zbiory. Liczby naturalne to zbiory skończone. Czy istnieją zbiory inne niż skończone? Odpowiedź na to pytanie nie jest znana. Nie wiemy, czy istnieją zbiory nieskończone. Fundamentem nauki jest jednak aksjomat istnienia zbioru nieskończonego. Nieskończoność zdefiniował Georg Cantor około 1878 roku poprzez równoliczność. Zbiór jest nieskończony, gdy jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym. Jeśli całość jest równoważna części, to mamy do czynienia z nieskończonością. Kategoria zbiorów dzieli się więc na dwie klasy: zbiory skończone i zbiory nieskończone. Zbiór skończony nie jest równoliczny ze swym podzbiorem właściwym; skończoność oznacza, że całość jest istotnie większa od każdej swej części. Liczne i piękne zastosowania nauki potwierdzają empirycznie aksjomat nieskończoności. Twierdzenie o istnieniu zbioru nieskończonego nie kryje w sobie sprzeczności. Oprócz wspomnianej nieskończoności – nieskończoności aktualnej, istnieje pojęcie słabsze – nieskończoności potencjalnej. W świecie obserwujemy tylko zbiory skończone, ale dowolnie duże, nie ma zbioru największego. Myślę, że bankom wystarcza pojęcie nieskończoności potencjalnej – zbiór klientów jest nieograniczony. Spłaty kredytów przesuwa się wprzód na przyszłe pokolenia; czas czyni populację nieograniczoną. Twierdzenie o istnieniu zbioru liczb naturalnych zamienia nieskończoność potencjalną w nieskończoność aktualną. Potencja staje się aktem.

Zbiory skończone to liczby naturalne; zbiory nieskończone, to także liczby tylko nieco innej natury. Są to liczby kardynalne – klasy zbiorów równolicznych, które spełniają tylko niektóre własności liczb naturalnych – liczb skończonych. Wśród liczb skończonych równanie $x + x = x$ jest spełnione jedynie przez 0, natomiast każda liczba nieskończona także je spełnia. Dwa razy nieskończoność jest tą samą nieskończonością, $2x = x$. Skończone wielokrotności nie zwiększają nieskończoności. Codziennie liczymy, numerujemy, telefonujemy, adresujemy, a więc korzystamy z liczb. Posługujemy się liczbami skończonymi – naturalnymi. Nie ma problemu istnienia liczb, gdy je widzimy, gdy widzimy mnogości przedmiotów. Zbiory realnych przedmiotów – naczyń kuchennych, książek na biurku, mebli w pokoju – są modelami liczb naturalnych. Jak wielkie liczby widzimy? Jakie mnogości ogarniamy jednym rzutem wzroku bez rachowania? Jest to problem otwarty. Pewnie nie ma jednoznacznej odpowiedzi. Jest to zdolność indywidualna. Istnieją jednostki obdarzone specjalną, numeryczną percepcją, które widzą duże liczby. Przeciętny, statystyczny zjadacz chleba chwyta bezpośrednio 0, 1, 2 i pewnie 3, a liczby większe oblicza korzystając nieświadomie z partycji – z podziałów liczb na mniejsze składniki. Cztery to dwie dwójki lub jedynka i trójka. Przestrzenny układ przedmiotów może ułatwiać rachunki. Zbiory wyraźne rozdyskryminowane na części lub uporządkowane w figury geometryczne – kwadraty, prostokąty, trójkąty – rachujemy łatwo. Chaotyczna chmara gołębi na niebie jest poza zwykłą zdolnością rachunkową.

Czym jest partycja? Ciąg liczbowy o skończonej liczbie wyrazów różnych od zera nazywa się ciągiem finitnym; w ciągu finitnym prawie wszystkie wyrazy są zerami. Ciąg

$$(0, 5, 0, 3, 0, 1, 0, 0, ...)$$

mający od siódmego miejsca, czyli od wyrazu a_6 – jeśli pierwszy wyraz jest a_0 – same zera jest finitny. Rodzinę zbiorów finitnych o wyrazach naturalnych oznaczamy symbolem F. Zbiór F jest zamknięty ze względu na dodawanie ciągów. Jeśli a i b są finitne, $a, b \in F$, to ich suma jest finitna, $a + b \in F$. Rodzina F jest półgrupą ze względu na dodawanie, której elementem neutralnym jest ciąg zerowy. Ciąg monotoniczny to taki ciąg finitny, który rośnie lub maleje. Jeśli $a = (a_n)$ jest monotoniczny i rośnie, to $a_n \leq a_{n+1}$; ciąg malejący $b = (b_n)$ spełnia przeciwną nierówność: $b_{n+1} \leq b_n$. Mowa tu naturalnie o ciągach słabo monotonicznych. Ciąg (2, 1, 1, 0, 0, ...) maleje, natomiast ciąg zerowy (0, 0, ...) jest jedynym ciągiem w zbiorze F, który rośnie. Ciąg zerowy jest oczywiście ciągiem malejącym. Rodzina ciągów malejących i finitnych P jest zbiorem partycji; rodzina P jest podzbiorem F. Jeśli ciąg a jest partycją, to a jest finitny i monotoniczny – malejący. Rodzina partycji jest także półgrupą. Jeśli a jest ciągiem finitnym, $a \in F$, to istnieje suma Σa jego wyrazów $a_o + a_1 + ...$ będąca liczbą naturalną. Niech P_n oznacza zbiór partycji a takich, że $\Sigma a = n$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, $n \in N = \{0, 1, ...\}$. Zbiór P_n jest podzbiorem P oraz

$$P = P_0 + P_1 + ...,$$

co oznacza, że P jest sumą zbiorów P_n; jest to podział P na klasy rozłączne – dyskryminacja rodziny partycji P na zbiory partycji poszczególnych liczb. Partycją zera jest tylko ciąg zerowy, więc $P_0 = \{0\}$, podobnie partycją jedynki jest ciąg (1, 0, 0, ...), więc P_1 jest także zbiorem jednoelementowym; następnie mamy

$$P_2 = \{(1, 1, 0, 0, ...), (2, 0, 0, ...)\},$$

bo liczba dwa ma dwie partycje. Analogicznie będzie dla trójki

$$P_3 = \{(1, 1, 1, 0, 0, ...), (2, 1, 0, 0, ...), (3, 0, 0, ...)\},$$

ale już czwórka ma pięć partycji

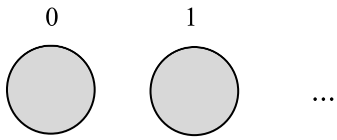
$$P_4 = \{(1, 1, 1, 1, 0, 0, ...), (2, 1, 1, 0, 0, ...), (2, 2, 0, 0, ...), (3, 1, 0, 0, ...), (4, 0, 0, ...)\}.$$

Dalej gwałtownie rośnie liczba partycji. Niech d_n oznacza liczbę partycji n; jest to dobrze określona liczba naturalna, którą można w skończonym czasie obliczyć. Algorytm nie jest jednakowoż tak prosty jak może się wydawać [1].

Porzućmy partycje i wróćmy na ziemię do zbiorów. Czy istnieją zbiory nieskończone? Powtarzamy to zasadnicze pytanie, by uświadomić jego znaczenie. Chociaż o istnieniu zbiorów nieskończonych wiemy mało, to jednak w życiu i języku potocznym operujemy namiastką nieskończoności. Mamy pojęcie perspektywy i punktu nieskończonego, posługujemy się zwrotem przenośnym *studni bez dna*, mówimy także o *studni niewyczerpanej*. Doświadczenie pokazuje, że świat jest skończony, chociaż pewnie bardzo duży. Nieskończoność oznacza coś niemożliwego, nierealnego. Barwny język codzienny posługuje się ideą zbioru nieskończonego bez większych zahamowań. Mówimy o *studni bez dna*, gdy roszczeń nie można zaspokoić. W roku 1945 jedna świnia przeszła ze Związku Radzieckiego na polską stronę i od tego czasu my im ciągle oddajemy, a oni bez końca powtarzają, że to nie ta sztuka. Jest to popularna anegdota o studni bez dna, powtarzana w czasach, gdy w polskich masarniach były puste haki – według oficjalnej teorii nie było zapotrzebowania na mięso. Jeśli zasób jest nieograniczony, obrazuje to studnia niewyczerpalna. Ktoś, kogo trzymają się zawsze pieniądze i nie krępuje się w ich wydawaniu, jest dla nas bankiem – studnią niewyczerpaną. Banki jednak bankrutują, więc ich zasoby się kończą; rujnuje je nieświadome założenie, że świat jest nieskończony i strumień nowych klientów będzie coraz obfitszy. *Kropla w morzu* jest przenośną oddającą stosunek zbioru skończonego do nieskończoności. Jest to zobrazowanie wielkiej dysproporcji, zestawienie stanów nieporównywalnych.

Żyjemy w świecie ciągłym; to właśnie ciągłość jest podstawą naszej intuicyjnej nieskończoności. Bez ciągłości nie ma poczucia nieskończoności, ale też bez nieskończoności nie ma ciągłości; z tego właśnie powodu nauka przyjmuje aksjomat o istnieniu zbioru nieskończonego. Czymże jest więc nieskończoność? Najprostsza odpowiedź mało objaśnia: zbiór, który nie jest skończony, nazywa się nieskończony, Zbiór skończony nie jest studnią niewyczerpaną. Jeśli ze zbioru liczącego 18 elementów wyjmiemy jeden, otrzymamy zbiór mający tylko 17 przedmiotów. Jeśli na parkingu jest 18 miejsc i każde miejsce zacienia drzewo, to parking jest zajęty, gdy pod każdym drzewem stoi auto. Jeśli jeden samochód odjedzie, wtedy drzew jest więcej, na parkingu jest wolne miejsce. Pojemność tego parkingu oznacza się liczbą 18. Więcej nie można zaparkować, gdy pod każdym drzewem stoi samochód. Przypuśćmy, że istnieje parking nieskończony, każde drzewo ma kolejny numer. Ile tu samochodów można zaparkować? Tyle ile jest liczb naturalnych. Nazwijmy ten parking wirtualnym, rysunek 1.

Rysunek 1. Parking wirtualny



Zdarzyło się, że nasz parking jest pełny – każde drzewo rzuca cień na swoją kolorową blachę. Jeśli w tym stanie parkingu pojawia się jeszcze chętny do parkowania, to nie ma problemu z miejscem. Wystarczy wszystkie samochody przesunąć – translować, jak mówią ludzie obyci – o tyle miejsc w prawo, ile nam potrzeba. Jeśli jedno, to każdy samochód trzeba przestawić o jedno miejsce, a gdy sto, to o sto miejsc dalej. Takiego parkingu nie ma. Istnieją poważne instytucje, które zachowują się tak, jakby istniał taki system translacji. W zbiorze skończonym nie ma translacji, są rotacje. Niektóre rzeczywiste banki pracują w reżimie parkingu wirtualnego. Ściąga się gotówkę wysokim procentem. Aby płacić te procenty, zjednuje się nowych klientów jeszcze wyższym zyskiem. Proces ten byłby racjonalny tylko w przypadku populacji nieskończonej. W realnym świecie taka praktyka kończy się zawsze klapą – jak bezpieczna kasa oszczędności: właściciel z resztką pieniędzy ucieka. Podobnie działa instytucja szybkich kredytów. Nawet ludność Chin nie jest gwarantem na łagodne wyhamowanie silnie rosnącego ryzyka finansowego. Stopniowy proces łagodzenia nieuzasadnionych kredytów przez obejmowanie coraz szerszych kręgów swymi usługami pięknie ilustruje wzburzona rzutem kamienia spokojna tafla jeziora. Amplitudy maleją, lecz koła są coraz większe. Powierzchnię wody modeluje wypukła kombinacja – zależna od czasu – funkcji:

$$f(x,y) = \exp\left(-\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

$$g(x,y) = \exp\left(-\sqrt{x^2+y^2}\right)\sin\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

gdzie $(x, y) \in R^2$.

Jezioro jest skończone, ograniczone, jego powierzchnia nie jest płaszczyzną, a ponadto działają siły lepkości, grawitacji i inne podobne zakłócenia. Model ten jest więc tylko idealizacją, jak każda zresztą teoria. Punktem startowym fali – miejscem upadku kamienia – jest początek układu współrzędnych (0, 0). Można obrazowo powiedzieć, że studnia bez dna to banki pożerające oszczędności, a studnią niewyczerpaną jest nieograniczony zasób klientów gotowych lokować swe środki w bankach. Coraz szersze kręgi wirtualnej społeczności wchodzą w zasięg cywilizacji finansowej. W przyrodzie nie ma zbiorów nieskończonych, w nauce są niezbędne: zbiór liczb naturalnych N, zbiór liczb całkowitych Z, zbiór liczb wymiernych Q, zbiór liczb rzeczywistych R, a zakończeniem tej linii jest zbiór liczb zespolonych C. Zbiory liczbowe konstruuje się na podstawie aksjomatu nieskończoności. Słabszym postulatem nieskończoności jest pojęcie potencji – założenie, że wszystkie zbiory są skończone, ale dowolnie duże. Jest to tak zwana nieskończoność potencjalna. Świat jest skończony, ale nieograniczony. Potencjalna nieskończoność dobrze pasuje do natury, ale źle do nauki. Z tego względu przyjmuje się aksjomat o istnieniu nieskończoności aktualnej, która jest zrealizowaną potencją. Aktualna nieskończoność jest wielką niewiadomą – *magnum ignotum*. Zakładać należy – jeśli jest już taka konieczność – istnienie możliwie małej nieskończoności. Najmniejsza nieskończoność to taka mnogość X, której każdy podzbiór A jest albo skończony albo równoliczny z X. Założenie o istnieniu takiej nieskończoności może nie być prawdą, lecz z tego aksjomatu wynika cała nauka, a nauka jest podstawą naszej egzystencji – ma liczne i błogosławione zastosowania. Liczbę kardynalną tego najmniejszego zbioru skończonego oznacza się symbolem $\aleph_0$. Istnieje jeszcze jedna nieskończoność, a mianowicie $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$; innych nieskończoności należy unikać, bo to jest już mnożenie zbędnych bytów.

Podstawą matematyki są liczby i pomiar. Pomiar nie tylko metrem i zegarem. Naukowy pomiar to homomorfizm. Jest to funkcja odwzorowująca strukturę matematyczną w analogiczną strukturę z zachowaniem relacji specyficznych. Piękny i ważny jest pomiar $f: C \to M$, gdzie C jest ciałem liczb zespolonych, a M – algebrą macierzy kwadratowych dwuwierszowych, utożsamiający liczby zespolone z macierzami. Jest mianowicie

$$f(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

gdzie $z = x + yi$.

Liczby zespolone to specjalne macierze. Pomiar jest także sztuką interpretacji teorii naukowych. Gotową teorię nakładamy na rzeczywistość fizyczną.

Wobec ogromu nieskończoności zawodzi intuicja. Ze zbioru nieskończonego można odrzucić dowolny, skończony podzbiór, a pierwotny stan nieskończoności nie ulegnie zmianie. Intuicja przestaje być pewnym przewodnikiem przy dodawaniu wyrazów ciągu, a więc przy operacjach nieskończonych. Również nie można zaufać intuicji w przestrzeniach wymiaru skończonego większego niż trzy. Żyjemy w świecie trójwymiarowym i tu zbieramy doświadczenie. Myślenie przez analogię w wyższych wymiarach jest zawodne. Późną jesienią 2010 roku w środowisku naukowym pojawiła się ciekawa hipoteza [5].

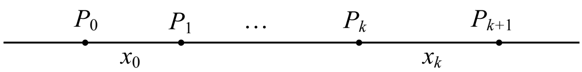
Dla dowolnych liczb naturalnych n, $k \geq 2$ oraz dla dowolnych parami różnych punktów $P_1, ..., P_k \in R^n$ zachodzi nierówność

$$(-1)^{k+1} \det(d_{ij}) > 0,$$

gdzie d_{ij} – odległość euklidesowa punktów P_i, P_j.

Poznałem ją późno – na początku grudnia 2010 roku – i zastanawiałem się nad jej rozwiązaniem. Rozpoczyna się zawsze od przypadku najprostszego $n = 1$. Po niedługim czasie powstał piękny wzór. Przytoczę za chwilę rozumowanie i jego wynik. Przypadek ten – jak wynika z innego komputerowego okólnika doktora Skoczylasa – analizowali studenci Politechniki Wrocławskiej i to niektórzy skutecznie. Nagrodą była ocena celująca z algebry. Niech $k \in N$ będzie dowolną liczbą naturalną nie wykluczając zera. Punkty $P_0, \ldots, P_{k+1}$, leżące na prostej, rysunek 2, ponumerowane są zgodnie z naturalnym porządkiem – pomiędzy P_i oraz P_{i+1} nie ma innych punktów P_j; odległości punktów sąsiednich P_i, P_{i+1} są liczbami $x_i > 0$, i = 0, ... , k.

Rysunek 2. Przypadek najprostszy



Symetryczna macierz odległości D dla punktów P_0, ..., P_{k+1} jest zdefiniowana przez układ liczb (x_0, ..., x_k). Jest bowiem

$$d_{i\ i+j+1} = \sum_{s=i}^{i+j} x_s\ ,\ \ i = 0, ..., k, \quad j = 0, ..., k-i;$$

naturalnie $d_{ii} = 0$ oraz $d_{ir} = d_{ri}$, gdzie d_{ir} jest odległością P_i od P_r.

Zadanie. *Wyznacznik z macierzy odległości D, określonej wyżej, jest liczbą*

$$\det D = (-1)^{k+1} 2^k\ x_0 \dots x_k\,(x_0 + \dots + x_k).$$

Rozwiązaniem tego zadania jest naturalnie dowód prostego twierdzenia. Dla nabrania wprawy zachęcam do rozpatrzenia kilku przypadków: dla k = 0, 1, 2 i może nawet 3. Macierz kwadratowa D ma oczywiście tyle wierszy, ile jest punktów, czyli k + 2. Operacje elementarne, najpierw na wierszach potem na kolumnach macierzy D, prowadzą do macierzy trójkątnej. Wyznacznik z macierzy trójkątnej łatwo obliczyć. Od wiersza pierwszego odejmujemy drugi, od drugiego – trzeci i tak dalej, od przedostatniego – ostatni, a następnie do wiersza ostatniego dodajemy wszystkie wiersze wyliczone wcześniej. W wyniku tych operacji powstaje macierz odpowiednio regularna; wystarczy teraz pierwszą kolumnę dodać kolejno do pozostałych, aby powstała macierz trójkątna. Główna diagonala tak przekształconej macierzy D jest wektorem

$$(-x_0, -2x_1, \dots, -2x_k, x_0 + \dots + x_k).$$

Zadanie zostało więc rozwiązane, czyli wzór na det D udowodniony.

Łatwo zauważyć, że numeracja punktów P_i nie zmienia wartości wyznacznika. Zastanawia addytywna

$$x_0 + \dots + x_k$$

i multiplikatywna

$$x_0 \dots x_k$$

symetria we wzorze na wyznacznik macierzy odległości. Jeżeli $x_0 = \ldots = x_k = 1$, to

$$\det D = (-1)^{k+1} 2^k (k+1);$$

tutaj i-ty wiersz macierzy D jest wektorem

$$v_i = (i, \ldots, 0, \ldots, k+1-i), \; i = 0, \ldots, k+1.$$

Jeżeli $k = 3$, to

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

jest to tablica odległości dla pięciu miast równomiernie rozłożonych na łączącej je drodze.

Po rozwiązaniu tego najprostszego przypadku wróciłem do hipotezy ogólnej. Za moich czasów studenckich popularne było pytanie o szelki sułtana. Dlaczego sułtan turecki nosi zielone szelki? Poprawną odpowiedź utrudniały zbędne szczegóły: turecki sułtan i zielony kolor. Każdy wie, po co się nosi szelki – aby spodnie były na swoim miejscu. Sułtan turecki nosi zielone szelki po to, aby mu nie spadły spodnie. Szczegóły bez znaczenia mogą prowadzić – i często prowadzą – na manowce. Istotą nauki, a szczególnie matematyki, jest umiejętność upraszczania i uogólniania. Zadanie ogólniejsze bywa czasem łatwiejsze z powodu swej prostoty. Nie ma maskujących prawdę szczegółów. Przypowieść sułtańska przypomniała mi się, gdy zacząłem myśleć nad hipotezą doktora Skoczylasa. Hipoteza dotyczy znaku wyznacznika specjalnej macierzy symetrycznej, takiej mianowicie, która opisuje wzajemne odległości w skończonym zbiorze punktów. Punkty są elementami nie dowolnej przestrzeni metrycznej, ale tylko R^n i to z metryką euklidesową. Przypuszczałem, że ani metryka, ani symetria, ani wymiar n przestrzeni liniowej nie są w tej hipotezie ważne. Wydawało mi się bowiem, że można ją zredukować do macierzy kwadratowych o przynajmniej dwóch wierszach z zerami na głównej przekątnej, a poza tym z wyrazami silnie dodatnimi. Pozbycie się zbędnych założeń, jak w pytaniu o zielone szelki sułtana, zadanie rozjaśnia i logicznie upraszcza. Jednak te założenia okazały się istotne. Hipoteza ogólniejsza upada. Jak sprowadzić przypadek ogólny do rozpatrzonego już szczególnego zadania przy $n = 1$? W przestrzeni R^n każdy skończony układ punktów można rzutować ortogonalnie na odpowiednio dobraną prostą, a do rzutów stosuje się przecież podane wyżej rozwiązanie. Bezpośrednio nie widać jednak, co na tej podstawie można wnosić o wyznaczniku z pierwotnej macierzy odległości w przestrzeni wielowymiarowej. Prawdopodobnie prowadzi tędy droga do celu – dowodu wyjściowej hipotezy.

Niech S_k, $k \in N$, $k \geq 1$, oznacza rodzinę macierzy kwadratowych o wyrazach rzeczywistych postaci

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k0} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

spełniających warunki: $a_{ii} = 0$, $a_{ij} > 0$, gdy $i \neq j$.

Uwaga. *Zbiór S_k jest wypukły – stożek bez wierzchołka. Jeśli A, $B \in S_k$ oraz $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, to $A + B$, $\alpha A \in S_k$.*

Lemat 1. *Jeżeli $H_k \in S_k$ jest negacją macierzy jednostkowej, to*

$$(-1)^k \det H_k > 0.$$

Negacja macierzy jednostkowej ma na głównej przekątnej zera, a poza główną przekątną jedynki. Jest to macierz odległości w przestrzeni dyskretnej. Lemat jest prawdziwy; aby się o tym przekonać, wystarczy pierwszy wiersz odjąć od pozostałych, a następnie wszystkie kolumny dodać do pierwszej. Powstanie macierz trójkątna o wyznaczniku

$$\det H_k = (-1)^k k.$$

Układ wektorów $(e_0, \dots, e_k)$ jest naturalną bazą $E = R^{k+1}$ orientującą przestrzeń dodatnio – orientacja prawa. Zbiór

$$K = \{x \in E: x \geq 0\}$$

jest stożkiem wektorów nieujemnych; jego wnętrze ma wymiar liniowy $k + 1$. Symbol E_i, $i = 0, \dots, k$, oznacza podprzestrzeń wymiaru k wektorów ortogonalnych do e_i.

Niech $F_i = K \cap E_i$; są to ściany stożka K. Wnętrze G_i ściany F_i, względem podprzestrzeni E_i, jest wymiaru k. Oczywiście zbiory F_i względem przestrzeni E mają puste wnętrza.

Lemat 2. *Jeżeli* $A \in S_k$, $k \geq 1$, *to* $\det A \neq 0$.

Dowód. Jeżeli $k = 1$ lub $k = 2$, to lemat jest prawdziwy. Przyjmijmy więc, że lemat jest prawdziwy dla $k \geq 2$; pokażemy, że jest również prawdziwy dla $k + 1$. Jeżeli $A \in S_{k+1}$ oraz $(c_0, ..., c_{k+1})$ jest układem kolumn macierzy A, to po wykreśleniu ostatniej kolumny otrzymamy – na podstawie założenia indukcyjnego – układ liniowo niezależny. Do stożka generowanego przez ten układ nie należy wektor c_{k+1}, trzeba bowiem pamiętać, że $a_{k+1k+1} = 0$ – równość

$$\sum_{i=0}^{k} x_i a_{k+1\,i} = 0\,,$$

gdzie $x_i \geq 0$, $x_0 + \ldots + x_k > 0$, jest niemożliwa. Wnętrze relatywne stożka generowanego przez wektory $c_0, ..., c_k$ ma wymiar $k + 1$, a stożka generowanego przez wektory $c_0, ..., c_{k+1}$ – wymiar $k + 2$. Oczywiście $c_i \in G_i$. Dowód został zakończony.

Twierdzenie. *Jeżeli* $A \in S_k$, to $(-1)^k \det A > 0$.

Dowód. Twierdzenie wynika z lematów 1 i 2. Należy jedynie udowodnić, że wyznaczniki z macierzy A oraz H_k mają równe znaki – kolumny tych macierzy jednakowo orientują przestrzeń E.

Funkcja I: $[0, 1] \to S_k$, określona wzorem

$$I(t) = (1 - t)A + tH_k,\ t \in [0, 1],$$

jest odcinkiem łączącym punkty A i H_k – opisuje odcinek w stożku S_k.
Położmy

$$f(t) = (-1)^k \det I(t),\ t \in [0, 1];$$

jest to funkcja ciągła, o wartościach różnych od zera. Korzysta się tu z lematu 2, mówiącego, że kolumny macierzy $I(t)$ są liniowo niezależne dla każdego $t \in [0. 1]$.
Ponieważ

$$f(1) = (-1)^k \det H_k > 0,$$

więc

$$f(0) = (-1)^k \det A > 0.$$

To kończy dowód.
Z twierdzenia tego wynika hipoteza doktora Skoczylasa.

Taką propozycję dowodu uogólnionej hipotezy przesłałem 14 grudnia 2010 roku doktorowi Skoczylasowi, a już następnego dnia otrzymałem od niego kontrprzykład [3]. Macierz symetryczna

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o wyznaczniku zerowym spełnia założenia uogólnionej hipotezy, a ponadto jest to macierz miejskich odległości pomiędzy wierzchołkami kwadratu: $A = (1, 1)$, $B = (1, 2)$, $C = (2, 2)$, $D = (2, 1)$. W hipotezie Skoczylasa ważna jest metryka, a to przecież więcej niż symetria. Tym zwyczajnym sposobem padło eleganckie uogólnienie. Do zbioru S_k należą macierze o wyznacznikach dodatnich, ujemnych i zerowych skoro tylko $k \geq 3$. Zawiódł lemat drugi; nie jest prawdą oparte na analogii z R^3 stwierdzenie, że wnętrze stożka generowanego przez wektory $c_0, ..., c_{k+1}$ jest wymiaru $k + 2$. Liniowej niezależności w przestrzeniach wymiaru wyższego niż 3 już nie widzimy bezpośrednio. W wielowymiarowych światach obowiązują inne prawa.

Jakie zastosowania mają macierze Skoczylasa $A \in S_k$? Są wśród nich macierze odległości – niezależne od metryki i przestrzeni. Ponadto reprezentują one specyficzne ekonomie – układy technologiczne, w których każda gałąź nie zużywa własnych wyrobów, ale potrzebuje produktów wszystkich innych sektorów. W realnym świecie takiego typu gospodarki pewnie nie ma, jednak analiza abstrakcyjnych modeli może być źródłem pożytecznych wniosków. Hipoteza doktora Skoczylasa okazała się prawdziwym twierdzeniem i to znanym już dawno [4], a jej uogólnienie jest złym tropem – zawiodła intuicja silnie obarczona geometrią przestrzeni, w której żyjemy. Jak scharakteryzować ten podzbiór rodziny S_k, którego elementy spełniają tezę twierdzenia? Naturalnie jest to podzbiór relatywnie otwarty w S_k; jest to także stożek bez wierzchołka. Zarówno sukces jak i niepowodzenie w pracy badawczej jest cennym doświadczeniem. Droga do dalszych studiów – głębszych i ogólniejszych – stoi zawsze otworem.

Rysunek 3. Faksymile listu doktora Zbigniewa Skoczylasa

Wrocław, 15 grudnia 2010 r.

Szanowny Panie Profesorze!

Dziękuję za zainteresowanie moją hipotezą: Pana list elektroniczny dotarł do mnie wczoraj. W dowodzie nie korzysta Pan z faktu, że wyrazy macierzy są odległościami nie pokrywających się punktów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wystarcza Panu, że macierz ma na przekątnej zera, a pozostałe jej wyrazy są dodatnie. Jednakże poniższe macierze mają na przekątnych zera, pozostałe ich wyrazy są dodatnie, a ponadto są symetryczne, ale

$$(-1)^5 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 10 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -9 < 0, \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

To oznacza, że Pana dowód lematu 2 zawiera błąd. Muszę go jeszcze dokładnie przeanalizować, aby wskazać błędne miejsce.

Z postaci drugiej macierzy wynika ponadto, że mojej hipotezy nie da się przenieść na dowolną przestrzeń unormowaną. Wyrazy tej macierzy są odległościami wierzchołków kwadratu jednostkowego w przestrzeni unormowanej $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. Macierz ta jest jednak osobliwa. Prawdopodobnie zachodzi wtedy słaba nierówność $(\geqslant)$.

Dowód hipotezy otrzymałem niemal natychmiast po ogłoszeniu konkursu. Już 29 października 2010 r. prof. Marek Bożejko z Instytutu Matematycznego UWr. przysłał swoją pracę. Z drugiej strony okazało się, że moja hipoteza jest znana (w teorii aproksymacji) i udowodniona w ogólniejszej postaci. Zauważył to 28 X 2010 dr Marian Gewert. Informację o przebiegu konkursu oraz odsyłacze do prac umieściłem na swojej stronie internetowej 31 października 2010 r. (dołączyłem ją do listu).

Z poważaniem
Zbigniew Skoczylas

Rysunek 4. Kurenda

Konkurs z nagrodą

Konkurs polega na podaniu dowodu poniższej hipotezy:

★ ★ ★

Dla dowolnych liczb naturalnych $n, k \geqslant 2$ oraz dla dowolnych parami różnych punktów $P_1, P_2, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność

$$(-1)^{k+1} \cdot \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \ldots & d_{kk} \end{bmatrix} > 0,$$

gdzie d_{ij} oznacza odległość euklidesową punktów P_i, P_j.

★ ★ ★

Osoba, która pierwsza przyśle własny dowód hipotezy, otrzyma nagrodę w wysokości 1.000 zł.* Plik PDF z dowodem i danymi autora należy przysyłać do końca roku 2010 na adres

zbigniew.skoczylas@gmail.com

Wyniki ogłoszę najpóźniej 15 stycznia 2011 r. na stronie internetowej

www.im.pwr.wroc/~skoczyla

Proszę o przekazanie informacji o konkursie znajomym matematykom.

Zbigniew Skoczylas

* W dostępnej literaturze nie znalazłem prac o tej hipotezie. Gdyby okazało się jednak, że problem jest znany, to osoba, która pierwsza wskaże publikację zawierającą dowód i przyśle jej kopię, otrzyma nagrodę w wysokości 300 zł. Z kolei osoba, która pierwsza poda kontrprzykład, otrzyma nagrodę w wysokości 700 zł. Będzie przyznana tylko jedna z powyższych nagród.

Ciągłość ułatwia życie i czyni naukę efektywniejszą. Trudne problemy dyskretne mają naturę skończoną, a ciągłość jest dzieckiem nieskończoności. Nawet w przypadku obliczalnego ciągu partycji (d_n) mamy problemy z wyliczeniem liczby podziałów. Większe trudności są z ciągiem liczb pierwszych (p_n). Nie znamy reguły dyslokacji liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych. Silnym wynikiem w tej dziedzinie jest twierdzenie Dirichleta. W dowolnym arytmetycznym ciągu liczb naturalnych, którego wyraz początkowy i różnica są liczbami względnie pierwszymi – ich wspólnym dzielnikiem jest tylko 1, jest nieskończona mnogość liczb pierwszych; ciąg taki upodabnia się do ciągu liczb naturalnych i także do ciągu liczb losowych. Jeżeli $a_0 = 1$ i różnica $r = 2$, to w ciągu arytmetycznym (1, 3, 5, ...) są naturalnie wszystkie nieparzyste liczby pierwsze. Jeśli natomiast $a_0 = 15$ i $r = 4$, to w ciągu (15, 19, 21, ...) jest – zgodnie z twierdzeniem Dirichleta – nieskończona mnogość liczb pierwszych. Ciąg arytmetyczny liczb naturalnych nazywa się ciągiem Dirichleta, gdy największy wspólny dzielnik wyrazów tego ciągu jest jedynką. Ciąg jest ciągiem Dirichleta wtedy i tylko wtedy, gdy pierwszy wyraz i różnica są względnie pierwsze. Jeżeli w ciągu Dirichleta jest jedna liczba pierwsza, to jest ich nieskończenie wiele. Ogólne twierdzenie Dirichleta jest prostym wnioskiem z tego lematu. Liczby pierwsze są rozłożone tak nieregularnie w zbiorze liczb naturalnych, że mogą tworzyć – i tworzą – jeden z systemów kodowania.

Numero impari Deus gaudet; liczby pierwsze to dużo więcej niż nieparzyste. Zbiór liczb pierwszych

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...\}$$

jest okryty największą tajemnicą, jest nieskończony, więc dlatego ciemny; nie znamy reguły pojawiania się kolejnych liczb pierwszych. Wiemy, jak tworzyć kwadraty liczb naturalnych, ale wzoru na liczby pierwsze nie ma. Z użyciem komputerów ustalono wielkie liczby pierwsze, jednak zawsze jest to skończony podzbiór nieskończoności. Jeśli p_n oznacza n-tą liczbę pierwszą, to: $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 11$, $p_5 = 13$, $p_6 = 17$ i tak dalej, i tak dalej, lecz znajomość p_n i wcześniejszych nie pomaga w odgadnięciu p_{n+1}. Rozmieszczenie liczb pierwszych w zbiorze liczb naturalnych nie jest oczywiście przypadkowe. *Die ganzen Zahlen hat der Liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.* Ta piękna pochwała liczb całkowitych pochodzi od Leopolda Kroneckera. Ośmielę się – jak to się często robi z trafnymi sądami – transponować ją na liczby pierwsze. Jednością jest Bóg, który stworzył liczby pierwsze. Tak może się zaczynać dekalog naukowy. Srinivasa Ramanujan – zmarły w wieku Jezusa matematyk indyjski – był niewątpliwie wybrańcem Boga, skoro liczby pierwsze miał za swych przyjaciół. O lokalizacji liczb pierwszych w ciągu liczb naturalnych wiemy mało, bardzo mało. Najważniejszym wynikiem jest wspomniane odkrycie Dirichleta. W ciągu arytmetycznym liczb naturalnych, którego wyraz pierwszy i różnica są względnie pierwsze, jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. Oczywiście, arytmetyczny podciąg ciągu Dirichleta jest znów ciągiem Dirichleta, jeśli tylko wyraz początkowy i różnica postępu są względnie pierwsze. Regularność zadziwiająca, a jej istotą jest tajemnica – boska tajemnica. W każdym przedziale $[n + 1, 2n]$, $n \geq 1$, liczb naturalnych, jest przynajmniej jedna liczba pierwsza. Jest to hipoteza Bertranda udowodniona w 1852 roku przez Czebyszewa. Liczby pierwsze pojawiają się z dodatnią częstotliwością w ciągu liczb naturalnych. Szereg $\left(\frac{1}{p_n}\right)$ nie jest sumowalny podobnie jak szereg harmoniczny. Liczby pierwsze leżą dużo gęściej niż kwadraty liczb naturalnych.

Fundamentalny lemat o nieskończoności. *Ciąg Dirichleta ma przynajmniej jeden wyraz będący liczbą pierwszą.*

Z istnienia zbioru jednoelementowego wnosimy o istnieniu nieskończoności.

Hipoteza. *Jeśli a jest ciągiem Dirichleta i $b = (b_n)$ podciągiem ciągu a wszystkich wyrazów, które są liczbami pierwszymi, to ciąg odwrotności $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ nie jest sumowalny.*

Nie istnieje ciąg Dirichleta, dla którego szereg odwrotności liczb pierwszych występujących w tym ciągu jest sumowalny. Twierdzenie Dirichleta można interpretować jako piękną klasyfikację ciągów arytmetycznych liczb naturalnych. Jeśli w ciągu arytmetycznym są dwie liczby pierwsze, to jest ich nieskończenie wiele. Tutaj z istnienia skończoności wnioskuje się o istnieniu nieskończoności; podobnie jak w przypadku liniowej niezależności. Zbiór wektorów jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny. Rodzina ciągów arytmetycznych A o wyrazach naturalnych dyskryminuje się na trzy podrodziny: A_0 – zbiór ciągów bez liczb pierwszych, A_1 – zbiór ciągów z dokładnie jedną liczbą pierwszą, i A_∞ – zbiór ciągów mający nieskończoną mnogość liczb pierwszych. Jest więc

$$A = A_0 + A_1 + A_\infty.$$

Jeżeli $a \in A_\infty$, to a jest ciągiem Dirichleta. Jeśli w ciągu a jest liczbą pierwszą różną od wyrazu początkowego, to w ciągu tym jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. Jeśli $a \in A_1$, to wyraz pierwszy tego ciągu jest liczbą pierwszą, a pozostałe liczbami złożonymi. Jeśli w ciągu arytmetycznym są dwie liczby pierwsze, to jest ich dowolnie dużo. Ze stanu skończonego wnioskuje się o nieskończoności. Jeżeli a: $N \to N$ jest ciągiem arytmetycznym, to równanie (a, P) jest niesprzeczne [6] – zbiór rozwiązań nie jest pusty, $a^{-1}(P) \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy a jest ciągiem Dirichleta lub $a_0 \in P$.

Partycją Goldbacha liczby naturalnej n jest uporządkowana trójka (q_0, q_1, q_2), gdzie $q_i \in P_0 = P + \{0\}$, $i = 0, 1, 2$, $q_0 \leq q_1 \leq q_2$, a ponadto oczywiście $n = q_0 + q_1 + q_2$. Partycją zera jest trójka (0, 0, 0), jedność nie ma partycji Goldbacha, partycją dwójki jest układ (0, 0, 2), trójki – układ (0, 0, 3), czwórki (0, 2, 2) i dalej podobnie. Liczba pięć ma dwie partycje Goldbacha: (0, 2, 3) oraz (0, 0, 5). W roku 1742 Goldbach zapytał listownie Eulera, czy każda liczba naturalna, z wyjątkiem jedynki, ma partycje w powyższym rozumieniu. Jeśli posłużymy się pojęciem zbioru zaindeksowanego liczb pierwszych, wtedy przypuszczenie Goldbacha ma ładne sformułowanie. Pomijając jedynkę, każda inna liczba naturalna jest sumą zbioru co najwyżej trójelementowego zaindeksowanych liczb pierwszych. Zero jest sumą zbioru pustego, dwójka – zbioru jednoelementowego, trójka także zbioru jednoelementowego, czwórka zbioru dwuelementowego $\{2_1, 2_2\}$. Po to właśnie potrzebne są indeksy, bo zbiór {2, 2} jest jednoelementowy. Pod wpływem Eulera powstała silna hipoteza Goldbacha. Każda liczba parzysta jest sumą co najwyżej dwóch liczb pierwszych; oczywiście mowa tu o liczbach zaindeksowanych. Słaba hipoteza Godlbacha jest konsekwencja silnej. Partycje Goldbacha dla liczb parzystych to te partycje w których $q_0 = 0$. Tak więc chociaż trójka (2, 2, 2) jest partycja Goldbacha 6, to jednak w dalszym ciągu tego typu partycje będziemy pomijać; partycję (0, 3, 3) ściągamy do pary (3, 3). Czy każda liczba parzysta jest sumą dwóch składników pierwszych? Ograniczamy się do liczb parzystych ze zbioru

$$H = \{6, 8, 10, \ldots\},$$

czyli poczynając od 6. Dla 0, 2 i 4 wszystko jest jasne. Zbiór liczb parzystych

$$G = \{p_i + p_j\colon i, j \in N,\ 1 \leq i \leq j\}$$

nazywa się zbiorem Goldbacha, a jego elementy – liczbami Goldbacha. Silna hipoteza Goldbacha jest pytaniem o identyczność zbiorów G oraz H. Oczywiście, G jest podzbiorem H. Liczby Goldbacha tworzą nieskończoną symetryczną macierz $A = (p_i + p_j)$, gdzie wyraz $p_i + p_j$ stoi w i-tym wierszu, $i = 1, 2, ...$ oraz j-ej kolumnie, $j = 1, 2, ...$; jest więc

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 16 & 18 & 20 & 24 & 26 & \dots \\ 14 & 16 & 18 & 22 & 24 & \dots \\ 10 & 12 & 14 & 18 & 20 & \dots \\ 8 & 10 & 12 & 16 & 18 & \dots \\ 6 & 8 & 10 & 14 & 16 & \dots \end{pmatrix}.$$

Czy dowolna liczba naturalna postaci $2n + 6$ jest wyrazem macierzy Goldbacha A? Jest to kolejne przeformułowanie silnej hipotezy Goldbacha. Macierz A jest sumą Kroneckera ciągów a i b, gdzie $a = b$ jest ciągiem nieparzystych liczb pierwszych (3, 5, 7, 11, 13, ...); dodając w sensie Kroneckera ciąg nieparzystych liczb pierwszych do siebie – ciąg obliczalny – otrzymuje się macierz równie tajemniczą jak liczby pierwsze.

Hipoteza Goldbacha łączy się z liczbami bliźniaczymi. Para kolejnych liczb pierwszych (p, q) nazywa się parą bliźniaczą, gdy $q = p + 2$. Nie wiemy, ile jest takich par. Podamy tu wszystkie pary bliźniacze w zakresie pierwszej setki liczb naturalnych; są to kolejno: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73). Boski plan budowy liczb naturalnych sugeruje mnogość nieskończoną par bliźniaczych. Jeżeli liczba Goldbacha $2n$ ma partycję (p, q), $p \le q$, to oczywiście $n \le q$. Liczba następna $2n + 2$ ma partycję Goldbacha $(2, p, q)$, ale może nie być liczbą Goldbacha: jest sumą $2 + p + q$ trzech liczb pierwszych, ale niekoniecznie dwóch. Liczbę Goldbacha $2n \in G$ nazywamy dobrą, gdy istnieje reprezentacja (p, q), $p \le q$, taka że przynajmniej jedna z par $(p, p + 2)$, $(q, q + 2)$ jest parą bliźniaczą, w przeciwnym wypadku mówimy, że liczba ta jest zła. Liczba 10 jest dobra, bo $10 = 3 + 7$ oraz para (3, 5) jest bliźniacza, chociaż druga para (7, 9) nie jest bliźniacza. Liczba 38 jest zła, bo ma dwie reprezentacje $38 = 7 + 31$ oraz $38 = 19 + 19$, ale żadna z par (7, 9), (31, 33), (19, 21) nie jest bliźniacza. Jeśli hipoteza Goldbacha jest fałszywa, to istnieje najmniejsza liczba parzysta $2n + 2$, która nie jest sumą dwóch liczb pierwszych. Liczba wcześniejsza $2n$ jest Goldbacha, więc $2n = p + q$, gdzie

$3 \le p \le q$; wynika stąd, że $2n + 2 = 2 + p + q$. Jeśli liczba $2n$ jest dobra, to liczba $2n + 2$ musi być liczbą Goldbacha. Tak więc jeśli $2n + 2$ nie jest liczbą Goldbacha, to koniecznie $2n$ jest liczbą złą, a ponadto $n + 1$ nie jest liczba pierwszą. Tyle tylko, jak dotąd, wynika z negacji przypuszczenia Goldbacha. Warunek konieczny – liczba $2n$ jest zła, nie jest dostateczny, by liczba $2n + 2$ nie była liczbą Goldbacha. Wszystkie przykłady pokazują, że jest liczbą Goldbacha. Być może – w co szczerze wątpię – kiedyś się zdarzy taki casus niezwykły, że $2n + 2$ nie będzie liczbą Goldbacha.

Problem Goldbacha jest równaniem diofantycznym $x + y = 2n$; szuka się rozwiązań w zbiorze P_0 dla dowolnej liczby naturalnej n, gdzie P_0 oznacza zbiór liczb pierwszych powiększony o zero. Równania diofantyczne, partycje i bliźniaki mają wspólne fundamenty; są najtrudniejszymi działami nauki o liczbach i to mimo wielkiej prostoty wysłowienia – problemy są zrozumiałe już dla uczniów gimnazjalnych. O zadaniu Goldbacha można mówić w języku koincydencji. Niech M będzie macierzą o wyrazach naturalnych; kolumnę, której wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi, nazywa się koincydencją M. Silna hipoteza Goldbacha jest pytaniem, czy w każdej macierzy postaci

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 2n \\ 2n & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $n \ge 2$, jest koincydencja? Oczywiście:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i dalej podobnie. Jeśli $n = 6$, to w macierzy

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

są dwie koincydencje: (5, 7) oraz (7, 5). Jest to ogólna reguła – liczba koincydencji jest parzysta, chyba że n jest liczbą pierwszą. Wynika to ze swoistej symetrii macierzy M_n względem kolumny środkowej (n, n). Dla liczb pierwszych n zawsze istnieją koincydencje w macierzach M_n, bo ich liczba jest nieparzysta.

Macierz

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ma trzy koincydencje: (3, 7), (5, 5) i (7, 3).

Kluczem do rozwiązania zadania Goldbacha jest przypuszczalnie teoria kongruencji i nieliczbowych ciał Z_p tak silnie związanych z podzielnością liczb naturalnych i grupą podziału koła

$$T_n = \{ z \in C : |z| = 1, z^n = 1 \}.$$

Rysunek 5. Deranżacja aranżacji

Czesław Biesiadecki

Wrocław

Dowód hipotezy Goldbacha

$\forall (p,q)$ $p \le q$

Lemat 1. Niech /p,q/, $p \underset{=}{<} q$ będzie dowolną parą liczb pierwszych o tej samej parzystości.

Pokażemy, że każdą taką parę można przedstawić w postaci $\exists n \; \exists l$

p=n-l, q=n+l $n \underset{=}{>} 2$, $l \underset{=}{>} 0$ całkowite /1/

Oznaczmy $n = \dfrac{p+q}{2}$ $l = \dfrac{q-p}{2}$

Dowód: $pq = n^2 - l^2$ = /n-l//n+l/, skąd p = n - l, q = n+l cbdo.

Wniosek: Dla każdego n, dla którego nie istnieje przedstawienie /1/ nieprawdziwa jest hipoteza Goldbacha.

Dowód: Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy, że 2n = p+q, wtedy na podstawie lematu 1 dla tego n istnieje przedstawienie /1/ wbrew przypuszczeniu.

Lemat 2. Pokażemy, że /1/ jest prawdziwe dla każdego $n \underset{=}{>} 2$.

Dowód: Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech n*, n będą kolejnymi liczbami naturalnymi przy czym dla n* istnieje przedstawienie /1/, a dla n nie istnieje. Wtedy p*=n*-l*, q*=n*+l*, skąd 2n*=p*+q*, a stąd 2/n-1/=p*+q*, czyli

2n= p*+q*+2 /2/

Udowodniliśmy, że z przypuszczenia o nieistnieniu przedstawienia /1/ dla n jwynika nieprawdziwości hipotezy Goldbacha dla tej liczby. Z równości /2/ wynika, że zajdzie to wtedy, gdy p* i q* nie będą jednocześnie mniejszymi liczbami z par liczb pierwszych bliźniaczych. Najmniejszą liczbą, która da się przedstawić w postaci sumy liczb pierwszych, z których żadna nie jest mniejszą z par liczb pierwszych bliźniaczych jest 38=2*19. Są dwie takie pary, /7,31/ i /19,19/. Na podstawie przeprowadzonego rozumowania liczba 40=2*20 nie powinna dać się przedstawić w postaci sumy dóch liczb pierwszych, a sprawdzenie pokazuje, że pary /17,23/, /11,29/ i /3,37/ dają takie przedstawienie. Otrzymana sprzeczność dowodzi fałszywości przypuszczenia, należy je odrzucić, czyli /1/ jest prawdziwe dla każdego $n \underset{=}{>} 2$ fałsz?

Dowód hipotezy Goldbacha: p+q=n-l+n+l=2n, cbdo.

Z powodu próby dowodu hipotezy Goldbacha przedłożonej przez pana Czesława Biesiadeckiego [2] i mojej – opartej na analogii – propozycji uogólnienia hipotezy Zbigniewa Skoczylasa przypomniał mi się wybitny matematyk niemiecki Edmund Landau. Słynął z niezwykłej ścisłości, logiki i piękna wykładu – był rzadkim okazem doskonałości naukowej. Na początku XX wieku modne stało się wielkie twierdzenie Fermata, bo za jego dowód obiecano sporą nagrodę. Gorączka Fermata ogarnęła szerokie kręgi społeczne. Kto tylko potrafił zliczyć do dziesięciu, już brał się za dowód hipotezy Fermata. Jeżeli $n \geq 3$, to nie istnieją różne od zera liczby naturalne x, y, z spełniające równość

$$x^n + y^n = z^n.$$

Uniwersytet w Getyndze – miejsce pracy Landaua – był zasypywany amatorskimi dowodami. Z napływającym spamem coś trzeba było zrobić i Landau polecił wydrukować specjalne formularze, które miały uprościć korespondencję. Wypełniony blankiet – wpisywano tylko datę i nazwisko matematyka weryfikującego – odsyłano osobie zainteresowanej. W formularzu tym było charakterystyczne zdanie: Docent X wskaże panu błąd w dowodzie. Ładny przykład niemieckiej organizacji pracy. Nawiasem mówiąc, dowodu twierdzenia Fermata nie ma do dziś i to mimo przyznania w 1998 roku specjalnej nagrody sir Andrew Wilesowi za jego długą pracę – ponad 20 lat – nad wielkim twierdzeniem Fermata. Czyż tę elukubrację można nazwać dowodem? Przypuszczalnie sam autor tego materiału nie obejmuje. Jest to pięćset stron trudnego, matematycznego tekstu. Któż może ogarnąć te – w najwyższym stopniu *sophisticated* – myśli? Hipoteza Fermata robi jednak wrażenie prostego twierdzenia w porównaniu z hipotezą Goldbacha. W swoim czasie za dowód hipotezy Goldbacha oferowano milion dolarów; premia – ograniczona czasowo – dziś już nie jest aktualna, termin minął. Nauka jest ciągłą drogą do perfekcji. Prace wcześniejsze dają podstawę następnym – doskonalszym. Prostota, doskonałość i piękno to nieodłączne towarzyszki prawdy.

Literatura

1. Andrews G.E., *The Theory of Partitions*. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, Massachusetts 1976.

2. Biesiadecki C., *Dowód hipotezy Goldbacha*. Jednostronicowy maszynopis, Wrocław 2010.
3. Skoczylas Z., *Elektroniczny list z 15 grudnia 2010 do A.S.*
4. Skoczylas Z., *Informacja o przebiegu konkursu.* Publikacja w sieci komputerowej, http://www.im.pwr.wroc.pl/~skoczylas/Informacja_o_konkursie.pdf.
5. Skoczylas Z., *Konkurs z nagrodą, publikacja w sieci komputerowej*. http://www.im.pwr. wroc.pl/~skoczylas/konkurs_na_strone_www.pdf.
6. Smoluk A., *Podstawy algebry liniowej*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław 2007.

INFINITY, INTERGERS AND ANALOGY

Summary

Modern science is based on the axiom of infinity. Infinity implies continuity. Applications of sciences give an empirical argument for this axiom. Supposition that infinite set exists is quite natural and does not generate inconsistency. Financial institutions, banks and insurance industry, frequently act as if their domains – number of clients – were infinite. Consider time effect they may assume something like the axiom of potential infinity. This results in outburst of crises. Any arithmetic sequence which the first term and the difference are relatively prime numbers has infinite set of prime terms (Dirichlet sequence).

Hypothesis. Series of inverses of prime numbers of a Dirichlet sequence is not convergent.

Keywords: natural numbers, infinity prime numbers, Dirichlet sequence, Goldbach's conjecture.

Translated by Antoni Smoluk