

**Małgorzata Guzowska, Agnieszka
B. Malinowska**

**Wykorzystanie rachunku na skalach
czasowych do opisu i analizy zjawisk
ekonomicznych**

Studia i Prace Wydziału Nauk Ekonomicznych i Zarządzania 42/1, 47-59

2015

Artykuł został opracowany do udostępnienia w internecie przez Muzeum Historii Polski w ramach prac podejmowanych na rzecz zapewnienia otwartego, powszechnego i trwałego dostępu do polskiego dorobku naukowego i kulturalnego. Artykuł jest umieszczony w kolekcji cyfrowej bazhum.muzhp.pl, gromadzącej zawartość polskich czasopism humanistycznych i społecznych.

Tekst jest udostępniony do wykorzystania w ramach
dozwolonego użytku.

Małgorzata Guzowska*

Uniwersytet Szczeciński

Agnieszka B. Malinowska**

Politechnika Białostocka***

WYKORZYSTANIE RACHUNKU NA SKALACH CZASOWYCH DO OPISU I ANALIZY ZJAWISK EKONOMICZNYCH

Streszczenie

Teoria skal czasowych jest elastycznym i sprawnym narzędziem modelowania pozwalającym na rozważanie systemów określonych na złożonych dziedzinach czasu. Pojęcie skal czasowych wprowadził w 1988 r. niemiecki matematyk S. Hilger w rozprawie doktorskiej pisanej pod kierunkiem B. Aulbacha. Teoria skal czasowych była narzędziem, które umożliwiło unifikację wyników znanych dla ciągłych i dyskretnych układów dynamicznych. Z czasem zauważono, że rozpatrywanie zagadnień na gruncie teorii skal czasowych pozwala nie tylko ujednoczyć wyniki analizy ciągłej i dyskretniej, ale również umożliwia przeniesienie ich na dowolną skalę niejednorodną. W niniejszej pracy dla modelu prokrastynacji przedstawiono wyniki analizy dynamiki modelu z wykorzystaniem rachunku skal czasowych na przykładowych skalach niejednorodnych.

Słowa kluczowe: model prokrastynacji, rachunek na skalach czasowych

* Adres e-mail: mguzowska@wneiz.pl.

** Adres e-mail: a.malinowska@pb.edu.pl.

*** Praca zrealizowana w ramach S/WI/0/2016.

Wprowadzenie

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie możliwości zastosowania w modelach ekonomicznych teorii rachunku wariacyjnego na skalach czasowych. W modelach ekonomicznych przyjmowane jest założenie o naturze ciągłej lub dyskretnej czasu. W tym kontekście pojawia się pytanie o rolę natury czasu w modelach, np. dynamiki gospodarczej, a w szczególności o ewentualne podobieństwa czy analogie rozwiązań stosowanych modeli ciągłych bądź dyskretnych. Czy jest to zbieżność tylko przypadkowa i wybór ciągłej albo dyskretnej wersji modelu jest kwestią wygody lub preferencji badacza, czy też podstawy tych analogii są głębsze i oparte na pewnym ogólnym mechanizmie? Czy zastosowanie do opisu i analizy zjawisk ekonomicznych czasu ciągłego bądź dyskretnego wyczerpuje wszystkie możliwości analizy badanego zjawiska? Podejście z wykorzystaniem skal czasowych pozwala odpowiedzieć na te pytania, pokazując, że rozpatrywanie zagadnień na gruncie teorii skal czasowych umożliwia ujednoczenie standardowych dyskretnych i ciągłych modeli. Ponadto podejście to wypełnia lukę między dwoma rodzajami modeli: ciągłym i dyskretnym, gdyż pozwala na przeniesienie modeli na dowolne skale niejednorodne (np. rozważanie modeli hybrydowych). Co więcej, pamiętając o tym, że matematyczny opis badanego zjawiska jest tylko pewnym uproszczeniem, zastosowanie rachunku na skalach czasowych pozwala na nowe podejście do analizy tych zjawisk. Jest oczywiste, że takie podejście jest bardziej elastyczne i realistyczne oraz umożliwia badanie większej różnorodności realnych problemów decyzyjnych.

Rachunek różniczkowy i całkowy na skalach czasowych jest nową i ekscytującą teorią matematyczną łączącą istniejące podejścia do modelowania matematycznego procesów dynamicznych – za pomocą układów dynamicznych ciągłych lub dyskretnych – w ogólne ramy o nazwie układy dynamiczne na skalach czasowych. To ogólniejsze podejście do modelowania dynamicznego pozwala na rozważenie bardziej złożonych dziedzin czasu, np. dziedziny periodyczne hZ , kwantowe q^{N_0} lub hybrydowe (ciągło-dyskretne).

Pojęcie skal czasowych wprowadził w 1988 r. niemiecki matematyk S. Hilger w swojej rozprawie doktorskiej pisanej pod kierunkiem B. Aulbacha. Teoria skal czasowych była narzędziem, które umożliwiło unifikację wyników znanych dla ciągłych i dyskretnych układów dynamicznych (Aulbach, Hilger 1990). Z czasem zauważono, że rozpatrywanie zagadnień na gruncie teorii skal czasowych nie tylko

pozwala ujednoczyć wyniki analizy ciągłej i dyskretnej, ale również umożliwia przeniesienie ich na dowolne skale niejednorodne.

Obecnie literatura dotycząca teorii skal czasowych jest bardzo bogata i zawiera interesujące zastosowania teorii i metod skal czasowych, np. w ekonomii (Atici, McMahan 2009; Atici, Uysal 2008; Atici, Biles, Lebedinsky 2006, 2011; Guzowska, Malinowska, Ammi 2015), biologii (Bohner, Warth 2007; Bohner, Fan, Zhang 2007) lub fizyce (Bekker et al. 2010). Początki rachunku wariacyjnego na skalach czasowych to praca M. Bohnera z 2004 (Bohner 2004), w której problem wariacyjny zapisano z użyciem delta pochodnej i delta całki. W kolejnych latach rachunek ten był rozwijany przez wielu autorów (Malinowska, Torres 2011; Atici, Biles, Lebedinsky 2006; Atici, Uysal 2008; Bartosiewicz, Torres 2008; Hilscher, Zeidan 2009).

1. Modelowanie z wykorzystaniem rachunku na skalach czasowych

1.1. Podstawowe definicje

Niepusty i domknięty podzbiór zbioru R (liczb rzeczywistych) nazywamy skalą czasową i oznaczamy przez T . Zatem R , zbiór liczb całkowitych Z i zbiór liczb naturalnych N to trywialne przykłady skali czasowej. Inne przykłady to skala kwantowa $q^{N_0} = \{q^k : k \in N \cup \{0\}\}$ (stosowana np. w fizyce (Kac, Cheung 2002)) lub skale składające się z rozłącznych odcinków i izolowanych punktów, gdzie czas jest mieszany, dyskretno-ciągły. Skale takie oraz iloczyny kartezjańskie skal ciągłych i dyskretnych mogą służyć do precyzyjnego opisu układów hybrydowych, które pojawiają się m.in. w technice, ekonomii i biologii (Bohner, Peterson 2001).

Definicja 1

Dla $t \in T$ definiujemy:

- funkcję następnika $\sigma : T \rightarrow T$, $\sigma(t) := \inf\{s \in T | s > t\}$,
- funkcję poprzednika $\rho : T \rightarrow T$, $\rho(t) := \sup\{s \in T | s < t\}$,
- funkcję ziarnistości $\mu : T \rightarrow [0, \infty)$, $\mu(t) := \sigma(t) - t$.

Przykład:

Dla $T = R$ mamy $\sigma(t) = \rho(t) = t$ oraz $\mu(t) = 0$.

Dla $T = Z$ mamy $\sigma(t) = t + 1$, $\rho(t) = t - 1$ oraz $\mu(t) = 1$.

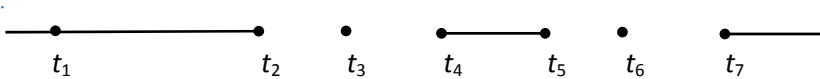
Dla $T = q^{N_0}$, $q > 1$ mamy $\sigma(t) = qt$, $\rho(t) = q^{-1}t$ oraz $\mu(t) = (q - 1)t$.

Definicja 2

Punkt $t \in T$ nazywamy lewostronnie gęstym, jeśli $t > \inf T$ oraz $\rho(t) = t$, prawostronnie gęstym, jeśli $t < \sup T$ oraz $\sigma(t) = t$, lewostronnie rozproszonym, jeśli $\rho(t) < t$, prawostronnie rozproszonym, jeśli $\sigma(t) > t$, izolowanym, jeśli $\rho(t) < t < \sigma(t)$ i gęstym, jeśli $\rho(t) = t = \sigma(t)$.

Przykład:

Niech T będzie następującym podzbiorem R :



wtedy:

t_1 jest punktem gęstym (lewostronnie i prawostronnie gęstym), ponieważ $\rho(t_1) = t_1 = \sigma(t_1)$,

t_2 jest punktem lewostronnie gęstym i prawostronnie rozproszonym, ponieważ $\rho(t_2) = t_2 < \sigma(t_2)$,

t_3 jest punktem izolowanym (lewostronnie i prawostronnie rozproszonym), ponieważ $\rho(t_3) < t_3 < \sigma(t_3)$,

t_4 jest punktem lewostronnie rozproszonym i prawostronnie gęstym, ponieważ $\rho(t_4) < t_4 = \sigma(t_4)$,

t_5 jest punktem lewostronnie gęstym i prawostronnie rozproszonym, ponieważ $\rho(t_5) = t_5 < \sigma(t_5)$,

t_6 jest punktem izolowanym (lewostronnie i prawostronnie rozproszonym), ponieważ $\rho(t_6) < t_6 < \sigma(t_6)$,

t_7 jest punktem lewostronnie rozproszonym i prawostronnie gęstym, ponieważ $\rho(t_7) < t_7 = \sigma(t_7)$.

1.2. Rachunek na skalach czasowych

Delta pochodna (ozn. Δ) i nabla pochodna (ozn. ∇) to uogólnienia klasycznej pochodnej funkcji zdefiniowanej na R oraz, odpowiednio, różnicy i różnicy wstecznej funkcji zdefiniowanej na Z .

Z uwagi na to, że do przykładu ekonomicznego wykorzystana będzie delta pochodna i delta całka, przytoczone w pracy definicje będą bazować na delta pochod-

nej i delta całce. Szczegółowe definicje oparte na nabla pochodnej i nabla całce można znaleźć w pracy: Bohner (2004).

Do zdefiniowania Δ -pochodnej potrzebujemy określenia zbioru T^κ . Zbiór ten konstruujemy następująco: jeśli T ma element maksymalny lewostronnie izolowany m , to $T^\kappa = T - \{m\}$; w przeciwnym razie $T^\kappa = T$.

Definicja 3

Mówimy, że funkcja $f : T \rightarrow R$ jest Δ -różniczkowalna w t , jeśli istnieje liczba $f^\Delta(t)$ taka, że dla wszystkich $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U takie, że

$$|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \tag{1}$$

dla wszystkich $s \in U$.

Uwaga. Można wykazać następujące fakty:

$$f^\Delta(t) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} & \text{dla } \mu(t) = 0 \\ \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} & \text{dla } \mu(t) > 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t) \tag{3}$$

Przykład:

Jeśli $T = R$, to $f^\Delta(t) = f'(t)$.

Jeśli $T = hZ$, to $f^\Delta(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} =: \Delta f(t)$.

Jeżeli $T = q^{N_0}$, $q > 1$, to $f^\Delta(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t}$.

Definicja 4

Jeżeli $a, b \in T$ z $a \leq b$, to przedział domknięty $[a, b]_T$ w T definiujemy

$$[a, b]_T := \{t \in T : a \leq t \leq b\} \tag{4}$$

Mówimy, że funkcja $f : T \rightarrow R$ jest rd-ciągłą, jeżeli jest ciągła w punktach prawostronnie gęstych oraz ma skończoną granicę lewostronną w punktach lewostronnie gęstych. Zbiór funkcji rd-ciągłych oznaczamy przez C_{rd} , a zbiór delta różniczkowalnych funkcji z delta pochodną rd-ciągłą przez C_{rd}^1 .

Definicja 5

Funkcja rd-ciągła ma delta funkcję pierwotną, tj. istnieje funkcja F taka, że $F^\Delta = f$. W tym przypadku delta całkę (w sensie Cauchy'ego) definiujemy następująco:

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) \text{ dla } a, b \in T \quad (5)$$

Przykład:

Jeśli $T = R$, to $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$.

Jeśli $T = hZ$, to $\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} hf(kh)$.

Jeśli $T = q^{N_0}$, $q > 1$, to $\int_a^b f(t)\Delta t = (1-q)\sum_{t \in [a,b) \cap T} tf(t)$.

Definicja 6

Funkcję $p : T^\kappa \rightarrow R$ nazywamy regresywną (ang. *regressive*), jeżeli

$1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ dla wszystkich $t \in T^\kappa$. Przez R oznaczmy zbiór funkcji regresywnych i rd-ciągłych.

Twierdzenie 1

Niech $p \in R$ oraz $t_0 \in T$. Wówczas zagadnienie początkowe

$$y^\Delta = p(t)y, \quad y(t_0) = 1 \quad (6)$$

ma jednoznaczne rozwiązanie w T .

Definicja 7

Niech $p \in R$ oraz $t_0 \in T$. Funkcję wykładniczą na skali czasowej definiujemy jako rozwiązanie zadania początkowego (6) i oznaczamy $e_p(\cdot, t_0)$.

Przykład:

Jeśli $T = R$, to $e_p(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau}$ z $t, t_0 \in R$ i ciągłą funkcją $p: R \rightarrow R$.

Jeśli $T = Z$, to $e_p(t, t_0) = \prod_{\tau=t_0}^t [1 + p(\tau)]$ dla $t, t_0 \in Z, t_0 < t$ i ciągłą funkcją $p: Z \rightarrow R$ taką, że $p(t) \neq -1$ dla wszystkich $t \in Z$.

1.3. Zagadnienie wariacyjne na skalach czasowych

Zagadnienie wariacyjne na skali czasowej T stawiane jest zwykle następująco. Znajdź ekstremum funkcjonału:

$$\mathfrak{J}(y) = \int_a^b L(t, y^\sigma(t), y^\Delta(t)) \Delta t \tag{7}$$

przy warunkach brzegowych $y(a) = y_a, y(b) = y_b, y_a, y_b \in R$ i ewentualnie innych warunkach ograniczających, np. w postaci Δ -całki.

2. Wykorzystanie rachunku na skalach czasowych do analizy modelu prokrastynacji

W niniejszej pracy analizie poddano nową wersję klasycznego modelu wykorzystania zasobów, tj. model prokrastynacji (nazywany czasem modelem zwlekania bądź kunktatorstwa), zdefiniowany następująco:

$$\max \int_0^T e^{-\delta t} u(1 - w(t)) dt \tag{8}$$

przy ograniczeniu

$$\int_0^T w(t) dt = \beta, \quad \forall t \in [0, T] \quad 0 < w(t) < 1 \tag{9}$$

gdzie: $\delta > 0$ jest stopą dyskontową reprezentującą preferencje indywidualne, $w(t)$ chwilową stopą pracy (ułamek czasu przeznaczony na pracę) nad zadaniem, którego wykonanie wymaga $\beta > 0$ godzin pracy i musi być ukończone przed ustaloną datą $T > \beta$; funkcja użyteczności u , będąca funkcją wypoczynku l , jest co najmniej klasy C^2 , rosnąca i wklęsła; $w(t) + l(t) = 1$ dla każdego $t \in [0, T]$. Model z $\delta = 0$ opisuje jednostkę cierpliwą (patrz: Caputo 2009). Dokładniejsze omówienie modelu prokrastynacji można znaleźć w pracy: Fischer (2001).

Model prokrastynacji na skalach czasowych z delta operatorami zapisujemy następująco:

$$\max \int_0^T e_{\Theta\delta}(t, 0) u(1 - w(t)) \Delta t \quad (10)$$

przy ograniczeniu

$$\int_0^T w(t) \Delta t = \beta, \quad \forall t \in [0, T]_T \quad 0 < w(t) < 1 \quad (11)$$

Aby zapisać niezbędny warunek optymalności dla problemu (10)–(11), konieczne jest zastosowanie twierdzenia 2.

Twierdzenie 2 (patrz: Girejko, Malinowska, Torres 2011)

Niech T będzie skalą czasową, $a, b \in T$ dla $a < b$. Jeśli \hat{y} jest rozwiązaniem problemu

$$\max \int_a^b f(t, y(t)) \Delta t \quad (12)$$

$$\int_a^b g(t, y(t)) \Delta t = \Theta, \quad \Theta \in R \quad (13)$$

w klasie $C_{rd}([a, b]_T)$ funkcji oraz $\frac{\partial g}{\partial y}(t, \hat{y}) \neq 0$, wtedy istnieje stała λ taka, że zachodzi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, \hat{y}) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(t, \hat{y}) = 0 \quad (14)$$

dla wszystkich $t \in [a, b]_T$.

Na podstawie twierdzenia 2 warunek konieczny optymalności dla problemu (10)–(11) ma postać:

$$e_{\Theta\delta}(t,0)u'(1-w(t))+\lambda=0, \tag{15}$$

dla wszystkich $t \in [a, b]_T$.

Przykład:

Do analizy modelu konieczna jest znajomość postaci funkcji użyteczności konsumenta. W niniejszym przykładzie przyjęto logarymiczną (logarytm naturalny) funkcję użyteczności. Rozważmy zatem zadanie:

$$\max \int_0^T e_{\Theta\delta}(t,0)\ln(1-w(t))\Delta t \tag{16}$$

przy ograniczeniu

$$\int_0^T w(t)\Delta t = \beta, \quad \forall t \in [0, T]_T \quad 0 < w(t) < 1 \tag{17}$$

Zgodnie z twierdzeniem 2 warunek optymalności rozwiązania dla problemu (16)–(17) jest następujący:

$$e_{\Theta\delta}(t,0)u'(1-w(t))+\lambda=0 \tag{18}$$

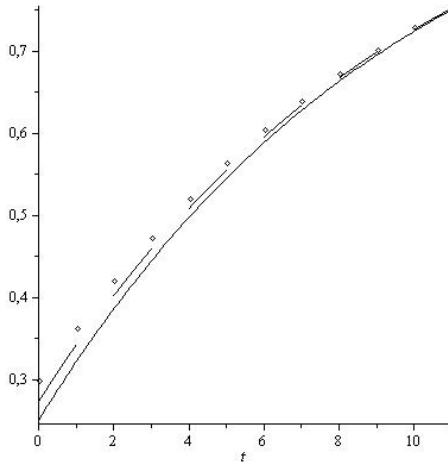
Warunek ten łącznie z (17) pozwala wyznaczyć optymalną ścieżkę pracy $w(t)$. Niech skala czasowa, na której rozpatrujemy powyższy model, będzie zdefiniowana następująco: $T = P_{1,1} \cap [0, 11]$, gdzie $P_{1,1} = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$; oraz $\beta = 6$, $\delta = 0,1$. Wówczas

optymalną ścieżkę pracy wyznaczamy według następującego wzoru:

$$w(t) = 1 + \frac{1}{\lambda} \frac{e^{\delta k}}{(1+\delta)^k} e^{-\delta t} \quad t \in [2k, 2k+1], \quad k = 0, \dots, 5 \tag{19}$$

Rysunek 1. Porównanie ścieżek pracy na skalach czasowych

$$T = P_{1,1} \cap [0, 11], T = R \cap [0, 11] \text{ oraz } T = Z \cap [0, 11]$$



Źródło: obliczenia i opracowanie własne.

W celu porównania na rysunku 1 przedstawione są ścieżki pracy na skalach czasowych $T = P_{1,1} \cap [0, 11]$, $T = R \cap [0, 11]$ oraz $T = Z \cap [0, 11]$.

Na skali czasowej $T = P_{1,1} \cap [0, 11]$ praca wykonywana jest nieprzerwanie w pewnych odcinkach czasu, po których następują okresy bez pracy. Rysunek 1 pokazuje, że poziom pracy na tej skali jest wyższy niż na skali ciągłej. Łatwo zauważyć, że poziom pracy, gdy $h = 1$, czyli w przypadku gdy praca wykonywana jest na skali dyskretnej – tylko w określonych momentach – jest jeszcze wyższy. Otrzymane wyniki potwierdzają nasze intuicyjne przypuszczenia, że poziom wykonywanej pracy jest wyższy, gdy wykonywana jest ona z przerwami, niż gdy wykonywana jest w sposób ciągły. Zastosowanie rachunku wariacyjnego na skalach czasowych pozwoliło nie tylko na obserwację znanego z teorii efektu odkładania pracy na później (zjawisko to jest widoczne na wszystkich skalach czasowych), ale też na zaobserwowanie różnic w poziomie wykonywanej pracy ze względu na czas jej wykonywania.

Podsumowanie

W niniejszej pracy zastosowano podejście do modelu ekonomicznego oparte na rachunku wariacyjnym na skalach czasowych. Dla wielu ekonomistów wykorzystanie czasu w modelu oznacza zastosowanie czasu ciągłego lub dyskretnego. Wybór między tymi dwoma rodzajami czasu pozwala tylko w ograniczony, uproszczony sposób analizować zjawiska ekonomiczne. Teoria skal czasowych pozwala natomiast na analizę modelu w szerszej perspektywie. Zapis modelu na skalach czasowych pozwala na analizę dynamiki tego modelu nie tylko na wspomnianych skalach ciągłej i dyskretniej, ale także na bardziej skomplikowanych dziedzinach czasu. Analiza nawet prostych modeli ekonomicznych na niestandardowych skalach czasowych pozwala często na obserwację zjawisk znanych z teorii ekonomii behawioralnej (Guzowska, Malinowska, Ammi 2015). Analiza dynamiki modeli jest jednym z ważnych zagadnień w analizie ekonomicznej, z tego też powodu warto wzbogacać klasyczne metody analizy o nowe narzędzia, jakim jest rachunek na skalach czasowych.

Literatura

- Atici F.M., McMahan C.S. (2009), *A comparison in the theory of calculus of variations on time scales with an application to the Ramsey model*, „Nonlinear Dynamics and Systems Theory”, vol. 9, nr 1, s. 1–10.
- Atici F.M., Biles D.C., Lebedinsky A. (2006), *An application of time scales to economics*, „Mathematical and Computer Modelling”, vol. 43, nr 7–8, s. 718–726.
- Atici F.M., Biles D.C., Lebedinsky A. (2011), *A utility maximisation problem on multiple time scales*, „International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations”, vol. 3, nr 1/2.
- Atici F.M., Uysal F. (2008), *A production-inventory model of HMMS on time scales*, „Applied Mathematics Letters”, vol. 21, nr 3, s. 236–243.
- Aulbach B., Hilger S. (1990), *A unified approach to continuous and discrete dynamics. Qualitative theory of differential equations*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 53, s. 37–56.
- Bartosiewicz Z., Torres D.F.M. (2008), *Noether's theorem on time scales*, „Journal of Mathematical Analysis and Applications”, vol. 342, nr 2, s. 1220–1226.

- Bauer P.S. (1931), *Dissipative dynamical systems*, „Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America”, vol. 17, s. 311.
- Bekker M., Bohner M., Herega A., Voulov H. (2010), *Spectral analysis of a q-difference operator*, „Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical”, vol. 43, nr 14, s. 15.
- Bohner M. (2004), *Calculus of variations on time scales*, „Dynamic Systems and Applications”, vol. 13, nr 3–4, s. 339–349.
- Bohner M., Fan M., Zhang J. (2007), *Periodicity of scalar dynamic equations on time scales and applications to population models*, „Journal of Mathematical Analysis and Applications”, vol. 330, nr 1, s. 1–9.
- Bohner M., Peterson A. (2001), *Dynamic equations on time scales*, Birkhäuser Boston, Boston.
- Bohner M., Warth H. (2007), *The Beverton-Holt dynamic equation*, „Applicable Analysis”, vol. 86, nr 8, s. 1007–1015.
- Caputo R.M. (2009), *A unified view of ostensibly disparate isoperimetric variational problems*, „Applied Mathematics Letters”, vol. 22, nr 3, s. 332–335.
- Fischer C. (2001), *Read this paper later: Procrastination with time-consistent preferences*, „Journal of Economic Behavior and Organization”, vol. 46, s. 249–269.
- Girejko E., Malinowska A.B., Torres D.F.M. (2011), *Delta-nabla optimal control problems*, „Journal of Vibration and Control”, vol. 17, nr 11, s. 1634–1643.
- Guzowska M., Malinowska A.B., Ammi M.R.S. (2015), *Calculus of variation on time scale: application to economics models*, „Advances in Difference Equations”, vol. 2015, nr 1, s. 203, DOI: 10.1186/s13662-015-0537-0.
- Hilscher R., Zeidan V. (2009), *Weak maximum principle and accessory problem for control problems on time scales*, „Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications”, vol. 70, nr 9, s. 3209–3226.
- Kac V., Cheung P. (2002), *Quantum calculus*, Springer, New York.
- Malinowska A.B., Torres D.F.M. (2011), *Euler-Lagrange equations for composition functionals in calculus of variations on time scales*, „Discrete and Continuous Dynamical Systems” A, vol. 29, nr 2, s. 577–593.

APPLICATION OF TIME SCALE CALCULUS FOR DESCRIPTION AND ANALYSIS OF ECONOMIC PHENOMENA

Abstract

The origins of the idea of time scales calculus date back to the late 1980s when S. Hilger introduced this notion in his Ph.D. thesis (directed by B. Aulbach) and showed how to unify continuous time and discrete time dynamical systems. With time this unification aspect has been supplemented by the extension and generalization features. The time scale calculus theory can be applicable to any field in which dynamic processes are described by discrete or continuous models. On the other hand, many economic models are dynamic models. Therefore it is natural to relate those two subjects. This work is intended to motivate the use of the calculus of variations in the study of economic models. We shall use a modern economic interpretation of the standard resource model, that is the model of procrastination.

Translated by Agnieszka B. Malinowska

Keywords: procrastination model, time scale calculus

JEL Codes: C63; D99