Gustaw Treliński

Teoretyczne aspekty lektury tekstów typu matematycznego w klasach początkowych

Studia Pedagogiczne. Problemy Społeczne, Edukacyjne i Artystyczne 18, 205-220

2009

Studia Pedagogiczne Uniwersytetu Humanistyczno-Przyrodniczego Jana Kochanowskiego tom 18

Kielce 2009

Gustaw Treliński

TEORETYCZNE ASPEKTY LEKTURY TEKSTÓW TYPU MATEMATYCZNEGO W KLASACH POCZĄTKOWYCH

Wstęp

Umiejętność czytania niemal od zawsze jest uznawana za podstawowy element wykształcenia. Nasze codzienne funkcjonowanie wymaga odbioru, interpretowania i przetwarzania informacji zapisanych w różny sposób, w tym w formie mającej strukturę zbliżoną do tekstu matematycznego. Człowiek wykazujący nieporadność lub brak umiejętności pracy z takim tekstem traci w życiu zawodowym możliwości skutecznego samokształcenia.

Proces nabywania umiejętności czytania nie powinien kończyć się wraz z okresem wczesnoszkolnym, lecz musi być rozłożony na wszystkie etapy nauczania. Jest pewne, że dzieci, które jej nie zdobyły w pierwszych latach szkoły, napotykają wiele trudności w nauce, a także potem w dorosłym życiu. Badania biegłości w czytaniu[1] tekstów literackich oraz informacyjnych pokazują, że polscy uczniowie kończący klasę trzecią wypadają gorzej niż ich rówieśnicy z 28 krajów świata: „Używając pięciostopniowej skali ocen szkolnych, można powiedzieć, że w Polsce mamy za dużo uczniów dwójkowych i trójkowych, za mało czwórkowych i piątkowych"[2].

Zakresu umiejętności czytania nie można sprowadzać wyłącznie do tekstów typu humanistycznego; uczeń, a potem człowiek dorosły ma do czynienia z obszerną kla-

[1] Międzynarodowe badania PIRLS, poświęcone biegłości w czytaniu (reading literacy), przeprowadzono w szkołach 39 krajów świata w 2006 r. Testowano cztery umiejętności: wyszukiwania w tekście informacji spełniających podane warunki, wyciągania bezpośrednich wniosków z przesłanek zawartych w tekście, wiązania i interpretowania informacji zawartych w tekście oraz badania i oceniania treści, języka i układu tekstu.

[2] PIRLS 2006, s. 4.

są tekstów, które mają wiele cech redakcyjnych, kompozycyjnych i strukturalnych specyficznych dla tekstów matematycznych. Są to np. instrukcje obsługi urządzeń (m.in. instrukcja obsługi telefonu komórkowego, edytor tekstu, program Skype), umowy prowadzenia rachunku bankowego, przepisy prawne, zeznanie podatkowe czy schemat planowania podróży. Trafniej byłoby nazwać ich lekturę pracą z tekstem niż czytaniem; składa się na nią wiele elementarnych umiejętności czytania tekstów matematycznych. Praca z tego typu tekstem (czytanie, przetwarzanie, redagowanie) jest rodzajem kompetencji nieodzownej w samodzielnym uczeniu się, społecznym i zawodowym funkcjonowaniu, która staje się jednym z wyznaczników osiągniętego poziomu edukacji matematycznej.

Obserwacja zachowań uczniów pokazuje, że znacznie gorzej radzą sobie z czytaniem tekstów matematycznych niż tekstów użytkowych, informacyjnych czy literackich. Często nie potrafią przyswajać nowych informacji poprzez samodzielną lekturę tekstu, zdobywać potrzebnych wiadomości oraz rozumieć tekstu w sposób operatywny. Wydaje się, że realizacji tego celu nie poświęca się wystarczającej uwagi ani w pracach metodycznych, ani w praktyce nauczania. Nie sprzyja temu również błędne przeświadczenie, że nabycie umiejętności czytania tekstów humanistycznych prowadzi do opanowania umiejętności czytania tekstów matematycznych.

W tym opracowaniu zwrócę uwagę na te cechy tekstów matematycznych, które z dydaktycznego i praktycznego punktu widzenia mają znaczenie w procesie lektury, scharakteryzuję specyfikę tekstów z podręczników do matematyki w klasach początkowych, wskażę typowe zachowania uczniów w toku czytania tekstów, zdefiniuję poziomy i kryteria oceny umiejętności czytania tekstów typu matematycznego w nauczaniu zintegrowanym.

Specyfika tekstów matematycznych

Na matematykę można patrzeć jako na gotową wiedzę (formalną teorię, zestaw pojęć, twierdzeń wraz z ich dowodami, ściśle określonym językiem), użyteczną teorię (bibliotekę modeli i narzędzi rozwiązywania problemów spoza matematyki) oraz jako na działalność obejmującą, m.in. stawianie pytań, szukanie na nie odpowiedzi, rozwiązywanie zadań, a także przyswajanie sobie teorii. Matematyka jako gotowa wiedza jest wyrażana w formie pisemnej; matematyka jako użyteczna teoria oraz działalność może być uprawiana pisemnie, werbalnie lub w myśli[3].

Cechy tekstów matematycznych są determinowane cechami języka matematyki, zaś cechy języka – naturą samej matematyki (jej aspektu). W matematyce abstrakcyjnym obiektom (liczbom, relacjom itp.) nadaje się znaczenie logiczne, oderwane od sfery psychologicznej. Definiując (jawnie lub aksjomatycznie) nowe terminy

[3] Zob. G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I-III*, Kielce 2004.

używa się języka o specyficznej syntaktyce. Do badania pojęć i związków między nimi stosuje się dedukcję, a także wiele metod specyficznych, jak np. metody wektorowe, przechodzenia do granicy oraz wykorzystuje się liczne systemy symboliczne (np. algebry Boole'a, rachunek algebraiczny) z własnymi regułami tworzenia i przekształcania wyrażeń sensownych. To wszystko sprawia, że teksty matematyczne charakteryzujące się zwięzłością logiczną, odrębną syntaktyką, terminologią, symboliką różnią się redakcyjnie, kompozycyjnie i strukturalnie od tekstów literackich, z zakresu historii czy publicystyki.

Prawidłowe dydaktycznie wprowadzanie uczniów w tajniki czytania tekstów typu matematycznego[4] wymaga bliższego omówienia ich swoistych cech[5].

1. Tekst matematyczny jest pisany autonomicznym językiem, będącym mieszaniną **języka matematyki** (języka słownego, graficznego oraz symbolicznego) oraz **języka naturalnego.** Konsekwencją tego jest – rzecz nietypowa – wykorzystywanie kilku systemów kodowania i dekodowania informacji, odnoszących do napisów każdego z nich. Już prosty przykład pokazuje, jakie to ma znaczenie; w języku naturalnym napis $9 - 3 = 6$ można wyrazić jako: 6 jest różnicą 9 i 3; 9 odjąć 3 jest 6; 9 minus 3 jest 6; 9 jest o trzy większe od 6; zmniejszenie o 3 liczby 9 daje 6; 6 jest o 3 mniejsze od 9. Odkodowanie informacji $9 - 3 = 6$ wymaga zatem nie tylko pośrednictwa języka słów, ale również rozumienia struktury syntaktycznej języka symbolicznego. Występowanie i łączenie warstw opisowej (słownej) i symbolicznej wymaga – w toku lektury – nietypowej dla innych tekstów współpracy czytelnika z autorem. Nie jest to procedura liniowa (kolejne odczytywanie zdań); mamy tu liczne powroty do innych miejsc, pojedynczych wyrazów czy wyrażeń. Zapisy symboliczne o specjalnej konstrukcji (wzory, wyrażenia, algorytmy) wymuszają spowolnienie tempa czytania, rozbiór fragmentów będących nośnikami znaczenia oraz przekład znaków na operacje do wykonania.
2. Matematykę można **prezentować** i uprawiać **w różnych językach**: „Matematyka zaczęła się rozwijać w historii dopiero wtedy, gdy powstawało pismo, gdy powstawały pierwsze znaki wizualne dla języków zbudowanych ze znaków akustycznych”[6]. Niektóre języki (np. język algebry) powstały dość dawno, inne obecnie tworzy, np. technologia informacyjna. Każdy, kto posługuje się komputerem, a nawet telefonem komórkowym, w miarę ich używania poznaje i rozwija specjalny język, trochę różniący się od innych. Z podobną sytuacją spotykamy

[4] Myślę tu zarówno o tekstach monografii, książek matematycznych, jak również podręczników, które choć nie są tekstami matematycznymi w pełnym rozumieniu, to jednak mają wiele cech charakterystycznych dla takich tekstów.

[5] Charakteryzując te teksty wykorzystuję – w dużej mierze – przemyślenia Jana Koniora, zawarte w: J. Konior, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki,* tom 4: *Prace prof. dr hab. Jana Koniora*, pod red. J. Żabowskiego, Płock 2002.

[6] W. Zawadowski, *Kształcenie nauczycieli podręczniki i pomoce dydaktyczne do nauczania matematyki. Argumentacja i dowodzenia matematyczne*, w: *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, pod red. M. Czajkowskiej, G. Trelińskiego, Kielce 2006, s. 53.

się w matematyce. Wiedzę o wykresach funkcji można zdobyć studiując fragment analizy matematycznej, a także wykorzystując kalkulator graficzny z jego specyficznym językiem. Jednoczesne wykorzystywanie w tekstach matematycznych wielu języków różnych dziedzin matematyki (geometrii, algebry itp.) wymaga m.in. znajomości ich struktury syntaktycznej. Brak swobody przechodzenia z jednego systemu języka na inny istotnie rzutuje na procesy lektury tekstu matematycznego.

3. Język matematyki, a więc i teksty pisane w tym języku, operuje właściwymi sobie **formami gramatyczno-logicznymi**. Chodzi w szczególności o systemowe układy symboli oraz specyfikę połączeń między zdaniami. Bogactwo znaków o charakterze wizualnym[7] sprawia, że symboliczny język matematyki traci charakter alfabetyczny[8]. Pojedyncze znaki są nazwami złożonych pojęć (np. +, symbol dodawania liczb, wektorów, funkcji), całych konstrukcji, czy stosunków zachodzących między wieloma obiektami (np. $\perp$, symbol prostopadłości prostych), którym odpowiadają grupy wyrazów języka naturalnego. Jeżeli się nie pamięta znaczenia znaku, to nie można go „przeliterować", jak np. wyrazu *dom*. Ale jednocześnie odpowiednio skonstruowane grupy symboli same „pracują" za czytelnika w toku lektury, wystarczy tylko rozpoznać strukturę ich układu. Z taką sytuacją mamy do czynienia, np. gdy $(a+b)c$ zastępujemy wyrażeniem $ac + bc$. W matematyce wypowiedzi mają charakter warunkowy; wnioskuje się z przyjętych założeń, z dodatkowych przesłanek. W tekstach matematycznych mamy przewagę połączeń implikacyjnych, ponieważ wypowiedzi w trybie warunkowym lepiej wyrażają stosunki wynikania, przyczynowości[9]. Rozważmy zdanie: *W trójkącie naprzeciw równych boków leżą równe kąty*. Ta złożona formalna konstrukcja jest koniunkcją dwóch zdań typu implikacyjnego: a) *jeśli w trójkącie boki są równe, to naprzeciw nich leżą kąty równe*; b) *jeśli w trójkącie kąty są równe, to naprzeciw nich mamy równe boki*. Słów *jeżeli..., to...* używa się również w języku potocznym. W matematyce łączymy nimi zdania w czasie teraźniejszym, co nie występuje w tekstach narracyjnych czy informacyjnych.

4. W tekstach matematycznych można wydzielić dwie warstwy: **przedmiotową**, która zwiera wyłącznie informacje o obiektach matematycznych (liczbach, figurach, funkcjach itp.), oraz **metajęzykową**, która odnosi się do wypowiedzi języka przedmiotowego. Rozważmy zdania: *Prostokąt to czworokąt, który ma cztery kąty proste; 14 jest liczbą parzystą*. Przekazują one informacje o prostokącie, o liczbie 14; są to wypowiedzi języka przedmiotowego. Natomiast zdania:

---

[7] Znaki matematyczne są najlepiej przekazywane i odczytywane wzrokiem. Podobną strukturę mają np. znaki drogowe. Teksty budowane przez znaki drogowe mają ściśle określony zakres znaczeniowy, a możliwości ich zestawiania są bardzo ograniczone. Nie mogą być np. wykorzystywane do przetwarzania informacji, przeciwnie niż znaki matematyczne.

[8] Zob. J. Konior, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, tom 4, s. 179; W. Zawadowski, *Kształcenie nauczycieli podręczniki i pomoce dydaktyczne do nauczania matematyki*, s. 52.

[9] J. Konior, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, tom 4, s. 259

Zamiast pisać, że prosta a jest prostopadła do prostej b, piszemy $a \perp b$; *To nie jest trójkąt, to jest rysunek trójkąta*; $3 \cdot x$ *piszemy krócej bez kropki* nie informują o prostych *a* i *b*, o trójkącie, o wyrażeniu $3 \cdot x$, lecz odnoszą się do związku między wypowiedziami języka przedmiotowego; są to wypowiedzi metajęzykowe. Występowanie i mieszanie się warstw przedmiotowej i metajęzykowej, niespotykanych w takim nasileniu w tekstach informacyjnych oraz potocznych, musi mieć wpływ na proces skutecznej lektury tekstu. Ignorowanie ich prowadzi do błędnego rozkodowywania oraz opacznego interpretowania informacji.

5. Teksty matematyczne są pełne zwrotów oznaczających występowanie **zmiennych i kwantyfikatorów**. Często o ich znaczeniu decyduje kontekst sytuacyjny lub językowy, przy czym ani kwantyfikatory, ani zmienne nie muszą być wyrażane symbolicznie. Rozważmy wypowiedzi: *Wśród kolejnych trzech liczb naturalnych jedna jest wielokrotnością* 3; *Punkt* A *odległy o* k *cm od punktu* B *należy do koła o środku* B *i promieniu długości* k; *Na trójkącie można opisać okrąg*. W wypowiedziach tych jest mowa o *dowolnych* liczbach naturalnych, *dowolnych* punktach A, B, *dowolnej* liczbie dodatniej k oraz *dowolnym* trójkącie, ale jednocześnie o *pewnym* okręgu. Akcentujemy tylko, że *istnieje* okrąg, bez określenia jego środka i promienia. W roli matematycznych zmiennych mogą występować, w zależności od kontekstu, różne słowa języka naturalnego, m.in. zaimki *on, ten, gdzieś*. Na przykład, mówimy: *Gdy liczba jest wartością ciągu określonego wzorem* $a_n = (n+1):n$, *to ona jest większa od 1 i niewiększa od 2.* Tak jest również w wypowiedziach potocznych, np. *Popieramy ten protest.* Zastępując słowo *my* nazwą *Polacy* oraz nazwę ogólną *protest* wiążąc kwantyfikatorem ogólnym wyrażonym, np. słowem *każdy*, otrzymamy zdanie: *Polacy popierają każdy protest.* Nazwę *protest* można również związać kwantyfikatorem egzystencjalnym, np. *protest przeciw rasizmowi* – otrzymamy wówczas zupełnie inną wypowiedź. Podane przykłady wskazują na trudności odbioru tekstu, które zarówno wypływają z charakteru wiedzy, jak i ze struktury formalnej tekstu.
6. W tekstach matematycznych nie spotykamy typowych **środków ekspresji** obecnych w tekstach humanistycznych. Nie występują w nich środki stylistyczne, zwroty, których zadaniem jest wywołać reakcję emocjonalną czytelnika. Są one zbędne, bowiem przekonywanie odbywa się wyłącznie na drodze dedukcji, rozumowania logicznego. To czyni tekst „zimnym", osłabiającym aktywną współpracę ucznia z autorem.
7. Autorzy tekstów matematycznych wykorzystują **środki, formy redakcyjne i typograficzne** (np. segmentacje, rozwiązania graficzne, dwuwymiarowe grafy, zapisy strzałkowe), rzadko spotykane w innych tekstach. Także typowe znaki mogą mieć inny sens. Na przykład nawias informuje nas, że treści nim ujęte mają znaczenie drugorzędne; w tekstach matematycznych, w nawiasach, zwykle występują warunki, założenia, bez których komunikowana wypowiedź nie ma sensu. W tekstach humanistycznych zazwyczaj pojawiają się zwroty typu *teraz, następnie, obok.* Odczytując je w kolejnych zdaniach odbiorca buduje sobie czasowy

i przestrzenny plan wydarzeń. Teksty definicji, twierdzeń są jednak pozbawione tej cechy. Rozważmy definicję: *Funkcją ze zbioru* A *w zbiór* B *nazywamy każde przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru* A *odpowiada dokładnie jeden element zbioru* B. *Funkcję* f *ze zbioru* A *w zbiór* B *zapisujemy* f: A → B. A także twierdzenie: *Każda liczba mająca rozwinięcie dziesiętne, w którym jest nieskończenie wiele cyfr różnych od* 9, *ma dokładnie jedno rozwinięcie.* Obie statyczne wypowiedzi prezentują stan końcowy całego procesu do nich prowadzącego; to nie ułatwia ich czytania. Jak pisze J. Konior, „wolno sądzić, że różnica ta nie jest bez znaczenia dla uczniów, których nawyki czytelnicze kształtowały się na tekstach humanistycznych"[10]. Rekonstrukcja pojęcia czy rozumowania – na podstawie lektury tekstu – może (a nawet powinna) prowadzić do „przestrzenno-czasowego" konstruowania czegoś na wzór budowli, gdzie pewne operacje myślowe występują wcześniej, a inne później. Takie postępowanie ma jednak inną genezę niż w przypadku opisu literackiego; ma charakter wtórny i zwykle świadczy o bardziej dojrzałym czytaniu.

Wymienione atrybuty przysługują także w znacznej mierze tekstom typu[11] matematycznego (zmodyfikowanym na użytek szkolny), adresowanym do uczniów, którzy wkraczają w okres dojrzałości myślenia. W klasycznych tekstach matematycznych nośnikiem pojęcia – w sensie logicznym – jest treść definicji dostępna obiektywnie. Wielokrotne czytanie, a nawet pamięciowe jej odtwarzanie nie wystarczy, aby mało wyrobiony czytelnik wytworzył sobie, np. obraz[12] pojęcia; niezbędne jest **przetworzenie** treści matematycznej, formalnej konstrukcji na jego własną konstrukcję myślową. Zwykle w podręczniku proces przetwarzania jest inicjowany pytaniami, ćwiczeniami do samodzielnego wykonania oraz wzbogacany poglądowymi wyjaśnieniami i środkami graficznymi. Ich zadaniem jest pomaganie uczniowi w „tłumaczeniu" fragmentów tekstu na język potoczny, wskazywanie jak kojarzyć, np. terminy z obiektami matematycznymi, a te obiekty z operacjami abstrakcyjnymi i dalej operacje z czynnościami konkretnymi. Takie zabiegi prowadzą do posługiwania się wyrażeniami językowymi nie do końca formalnie poprawnymi (w obrębie studiowanej teorii), ale dla odbiorcy poglądowymi i pełnymi treści. Stąd podręcznikowe teksty typu matematycznego mają wiele cech ich praźródeł – mają one inną wagę dydaktyczną.

Czynność przetworzenia tekstu w reprezentację pojęcia wymaga specyficznej dla matematyki pracy z tekstem i nie może być utożsamiana z pojęciem interpretacji tekstu (np. literackiego). Wystarczy zauważyć, że różne modele teoretycznoliterackie prowadzą do rozmaitych odczytań tekstu[13], natomiast praca z tekstem definicji, twierdzenia ma przyczynić się do jednoznacznego rozumienia pojęcia, czy jego własności.

---

[10] J. Konior, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, tom 4, s. 263.

[11] Niekiedy takie teksty nazywa się *tekstami w stylu matematycznym.*

[12] Obraz pojęcia matematycznego tworzą: baza intuicyjno-skojarzeniowa, formalne fakty, narzędzia wykonawcze, system komunikowania, konteksty (modele) sytuacyjne.

[13] Zob. B. Chrząstowska, S. Wysłouch, *Poetyka stosowana*, Warszawa 1987.

Spojrzenie na tekst podręcznika do matematyki z punku widzenia procesów jego lektury

Wszystkie zapisy znajdujące się w podręczniku do matematyki, których adresatem jest uczeń, nazywam tekstem podręcznika szkolnego do matematyki. Przedstawiają one treści matematyczne przeznaczone do nauczania na określonym poziomie, a więc związane z przekazem, przyswajaniem, przetwarzaniem i wykorzystywaniem informacji; są to teksty definicji, rozumowań, zadań, objaśnienia, formuły symboliczne, ilustracje graficzne, rysunki.

Chociaż teksty podręczników do matematyki adresowane do uczniów klas początkowych zredagowano z użyciem języka matematyki i jest w nich wiele elementów typowych dla tekstów matematycznych (rysunki, wykresy, schematy, diagramy, formuły symboliczne itp.), jednak nie są one tekstami matematycznymi. Konieczność dostosowania ich do poziomu myślenia i doświadczenia uczniów 7-9–letnich oraz kształcenia w systemie zintegrowanym sprawia, że przyjmują one postać „tekstów dialogowych organizujących proces komunikacji na zasadzie sytuacyjnej rozmowy bohaterów – rówieśników adresata, tekstów przybierających formę zbeletryzowanego przekazu odautorskiego lub relacji wybranego narratora itp."[14]

Mimo zróżnicowanej oferty podręcznikowej[15] w konstrukcji ich tekstów można dostrzec szereg podobieństw. Na ogół są one dzielone na jednostronicowe (dwustronicowe) partie – jednostki tematyczne związane z określonym hasłem programu. Każda jednostka składa się z kilku, w miarę izolowanych segmentów tekstu, ujmowanych w formę zadań. Pełnią one różne funkcje; służą wprowadzeniu lub utrwaleniu pojęcia, jego własności, algorytmu czy schematu postępowania. Układ zadań jednostki tematycznej ma strukturę hierarchiczną, generowaną zarówno wymogami matematycznymi, jak i psychologicznymi.

Tekst każdego segmentu (zadania) można analizować biorąc pod uwagę **formę przedstawiania** treści (cechy zewnętrzne tekstu) bądź traktując go jako **środek oddziaływania** na czytelnika-ucznia[16]. Biorąc pod uwagę to, jak tekst wygląda (układ słów, rysunek, napis symboliczny itp.), możemy wyróżnić segmenty opisowe (wyrażone słownie), opisowo-symbolicznie oraz symboliczne. Istotną rolę[17] odgrywają wówczas dwie relacje: przekazywania (związana z wyborem i sposobem kodowania informacji) i odbioru (dekodowania informacji). Racjonalne jest zatem badanie

[14] J. Konior, *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki,* tom 4, s. 316.

[15] W tym opracowaniu ograniczam się do tekstów podręczników matematyki dla klas drugiej i trzeciej.

[16] M. Korcz, *Sposób przedstawienia treści matematycznych jako kategoria opisu tekstu podręcznika*, „Problemy Dydaktyczne Matematyki III", Zielona Góra 1987, s. 65.

[17] W modelu komunikacji (przekaz i odbiór informacji) rozważa się nadawcę, komunikat i odbiorcę oraz dwie relacje: przekazywania i odbioru. Efektywność komunikacji zależy od opanowania czynności związanych z przekazem i odbiorem informacji oraz od formy i struktury komunikatu językowego (zob. M. Jagodzińska, *Obraz w procesach poznania i uczenia się*, Warszawa 1991).

tych segmentów z uwzględnieniem płaszczyzn znaczeniowych komunikatu językowego[18]. W przypadku, gdy tekst jest środkiem oddziaływania na ucznia, interesuje nas skutek lektury, w szczególności rodzaj reprezentacji – w rozumieniu Brunera – obiektu matematycznego (pojęcia, algorytmu itp.), który powstaje lub ma powstać w myśli ucznia pod wpływem lektury.

1. Formy przedstawiania treści

Rozważmy przykłady:

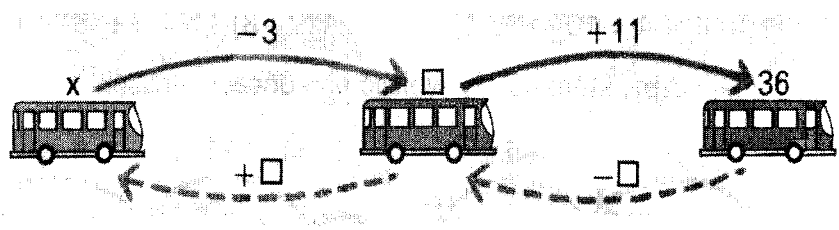
Przykład 1 [19]

> Przeczytaj równości: 12 – 7 = 5, 8 = 14 – 6.
> Wynik odejmowania nazywamy różnicą.
> Liczba 5 jest różnicą liczb 12 i 7.
> Jaka liczba jest różnicą liczb 14 i 6?

Tekst ma formę opisową; zredagowano go z użyciem języków naturalnego i matematycznego, pojawiają się symbole liczb oraz terminy specyficznie matematyczne.

Przykład 2 [20]

> Na początkowym przystanku wsiadło do autobusu kilku pasażerów. Na następnym wysiadło 3 i wsiadło 11. Jechało dalej 36 pasażerów. Ilu pasażerów wsiadło na początkowym przystanku?



Tym razem początkowy fragment zadania ujęto w formę opisową, zaś następny – w formę symboliczną. Jego część graficzna łączy w sobie „opis" rozważanej sytuacji oraz „opis" rozumowania prowadzącego do konstrukcji odpowiedzi na pytanie.

Przykład 3 [21]

> Dokończ według wzoru: 84 : 7 = (70 + 14) : 7 = 70 : 7 + 14 : 7 = 10 + + 2 = 12 72 : 6 = (60 + 12) : 6

Zadanie (segment) ma formę symboliczną.

---

[18] Przez komunikat językowy rozumiemy **wypowiedź** (językową jednostkę tekstu), która ma postać zdania lub układu zdań, zredagowanych w określonym języku dla porozumiewania się między nadawcą a odbiorcą tekstu. Komunikat można wydzielić przez analizę semantyczną lub formalną tekstu.

[19] B. Lankiewicz, Z. Semadeni, *Matematyka 2*, Warszawa 1994, s. 22.

[20] T. Jóźwicki, *Matematyka*, Warszawa 1987, s. 20.

[21] M. Frindt. J. Jednoralska, *Matematyka klasa 3*, Łódź 1995, s. 43.

Teksty tych zadań różnią się zarówno zastosowanymi w nich terminami, zwrotami językowymi, środkami wyrazu, jak i formą edytorską oraz sposobami oddziaływania na ucznia. Udział i wzajemne relacje między kodami – werbalnym, symbolicznym i graficznym – wpływają na odbiór tekstu. Ich lektura wymaga od czytelnika zupełnie odmiennych czynności w toku analizy i dekodowania informacji.

Każdorazowo autor, wybierając zadanie i nadając mu określoną postać, stawia sobie konkretny cel (funkcja odniesienia komunikatów językowych). A więc: wprowadzenie terminu – przykład 1, kojarzenia sytuacji z jej symbolicznym opisem oraz graficzną konstrukcją rozwiązania – przykład 2, analizy symbolicznych wyrażeń i posługiwania się prawem rozdzielności dzielenia względem dodawania przy wykonywaniu obliczeń – przykład 3. Zwykle dekodowanie informacji prowadzi do przyswojenia „gotowej" wiedzy (opanowania reguły, schematu postępowania, itp.) bądź jej tworzenia przez ucznia; w klasach początkowych preferuje się tę drugą możliwość.

Cechą specyficzną segmentów typu matematycznego jest to, że nie mogą być one czytane linowo, czyli w kolejności edytorskiej, czasowej lub operacyjnej. Ilustruje to przykład 2; uczeń musi powiązać opis słowny sytuacji z jej modelem formalnym, czynności konkretne, wyrażone słowami *wsiadło, wysiadło* „zastąpić" abstrakcyjnymi operacjami *dodawania* i *odejmowania*, wprowadzić niewiadome, oddzielić opis formalny sytuacji od konstrukcji rozwiązania, a więc zastąpić operacje -3 i +11, operacjami do nich odwrotnymi +3, –11, wreszcie zinterpretować liczbę 36 i otrzymany wynik. Chronologia zdarzeń oraz czynności prowadzących do wyznaczenia niewiadomej są skierowane przeciwnie. To wymusza nieliniową nawigację „po tekście", wielokrotne przechodzenie z jednej konwencji zapisu informacji do innej, a także świadomość, że „zrobienie" kroku następnego wymagą powrotu do opisu słownego, porównania wykonanych czynności, wiązania ich ze sobą.

Konieczność wielorazowego przekładu informacji z jednego języka (naturalnego, graficznego, symbolicznego) na inny w toku lektury jest tym, co charakteryzuje większość segmentów podręcznika. Niekiedy ten przekład jest wprost „wymuszany" przez autora (taką sytuację ilustruje przykład 4), innym razem czytelnik, aby rozwiązać zadanie, musi je sformułować werbalnie (zob. przykład 3), zmatematyzować sytuację życiową przedstawioną w zadaniu (zob. przykład 2) albo wreszcie tylko odczytać informacje podane rysunkiem (grafem).

Doświadczenie dowodzi, że zmuszenie ucznia do próby werbalnego sformułowania informacji podanej symbolicznie, wyrażonej grafem ma istotne znaczenie dla nauczania matematyki. Wielu psychologów i dydaktyków podkreśla wagę „mowy głośnej" jako stabilizatora procesów myślowych[22].

Przykład 4 [23]

Co oznacza zapis:
$(a \cdot b) \cdot c + a \cdot (b \cdot c)$?

---

[22] Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki część 1*, Warszawa 1977, s. 92.

[23] T. Jóźwicki, *Matematyka*, s. 27.

Zapis ten oznacza, że przy obliczeniu iloczynu trzech liczb czynniki możemy ..... Mnożenie liczb (tak jak i dodawanie) jest .....

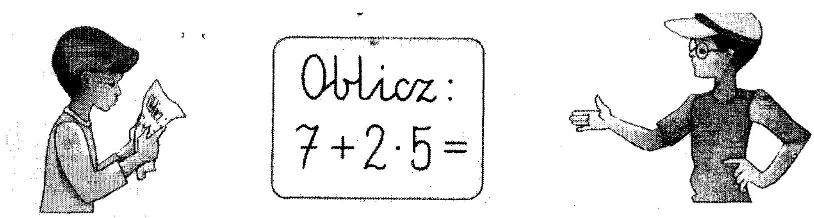
Stałe posługiwanie się wieloma językami wymaga aktywnej postawy wobec tekstu matematycznego; uczeń nie może sprowadzać swoich czynności do zwykłej recepcji informacji. Nie może również ograniczyć się do stosowania technik typowych dla lektury klasycznych tekstów literackich czy informacyjnych. Pojawia się ważne pytanie: czy bez specjalnego wprowadzania ucznia w tajniki analizy i czytania tekstów typu matematycznego potrafi on osiągać cele poznawcze stawiane przez autora?

Często w segmentach podręcznika dla klasy trzeciej spotykamy kolorowy druk, podkreślenia słów, kolorowe ramki, wyodrębnione graficznie fragmenty syntezy, rysunki zróżnicowane ze względu na formę i kolor. Ich celem jest nadawanie różnej wagi informacjom (funkcja emotywna). Dobór oznak określających postawę autora tekstu powinien być staranny i przemyślany, bowiem inaczej odbiera je nauczyciel a inaczej uczeń. Ten drugi jako mniej doświadczony nie zawsze umie je rozpoznać, odczytać, wycenić oraz wykorzystać. Warto podjąć badania eksperymentalne ustalające ich czytelność.

Każdy komunikat językowy (segment), jeśli ma skutecznie przekazać określone informacje, musi wywołać u odbiorcy reakcję poznawczą i emocjonalną (funkcja apelu). Takie reakcje osiąga się, dobierając różnego rodzaju reprezentacje graficzne, stawiając pytania, prowokując czynności itp., co ilustrują kolejne przykłady.

Przykład 5 [24]

Marek i Darek znaleźli kartkę z zadaniem:



Marek obliczył: $7 + 2 = 9$, $9 \cdot 5 = 45$, $7 + 2 \cdot 5 = 45$

Darek obliczył: $2 \cdot 5 = 10$, $7 + 10 = 17$, $2 + 2 \cdot 5 = 17$

Czyj wynik jest dobry? Marek wyciągnął książkę i przeczytał:

Jeśli nie ma nawiasów, to najpierw mnożymy, a potem dodajemy.

Przykład 6 [25]

Mama miała wstążkę długości 1 metra. Złożyła ją na pół i rozcięła na dwie równe części. Jedną połowę dała Agacie, a drugą Justynie. Każda dziewczynka dostała pół metra wstążki.

Ile to centymetrów? Pamiętaj, że jeden metr to 100 centymetrów.

---

[24] B. Lankiewicz, Z. Semadeni, *Matematyka 2*, s. 73.

[25] Tamże, s. 87.

Narysuj na tablicy linię o długości 1 metra.
Podziel ją na pół. Zmierz każdą połowę.

Niewątpliwie redakcja tekstu sprzyja podtrzymaniu i przedłużeniu komunikacji między czytelnikiem a autorem. Prowokowanie tego rodzaju czynności będzie bezowocne, gdy autor zignoruje wymogi psychologiczne rozwoju ucznia lub wybierze nieodpowiedni poziom konkretyzacji i symbolizacji informacji.

2. Tekst jako środek oddziaływania na ucznia

Tekst matematyczny „jest jakby kondensatem rozumowań i wniosków, uzyskanych przez autora na skomplikowanej, nieciągłej i nieliniowej drodze myśli, w jego własnym języku, na ogół różnym od konwencjonalnego języka tekstu"[26]. Jego lektura, choćby tylko zwierał kilka wierszy druku, wymaga od ucznia przetworzenia go na własne myśli, na wiedzę w „działaniu"[27], a więc pracy idącej drogą odwrotną do tej, którą przeszedł autor. Poza formą tekstu ważny jest skutek czytania, jego oddziaływanie na ucznia. Ważne, jakiego rodzaju reprezentację[28] wiedzy matematycznej ma on sobie wytworzyć, zgodnie z intencją autora, pod wpływem lektury.

Rozważmy kolejne przykłady.

Przykład 7 [29]

Zmierz długość i szerokość tego podręcznika. Porównaj swój wynik z wynikami kolegów. Możesz użyć słów takich, jak *prawie* lub *trochę*.

Tekstowi nadano postać symboliczną. Natomiast praktyczne, fizyczne wykonywanie czynności, narzuconych przez autora, sprzyja wytworzeniu się w myśli ucznia „schematu" wyznaczania długości odcinka. Reguły w kategoriach, w których on ujmie swoje doświadczenie, tworzą reprezentację enaktywną długości odcinka.

---

[26] S. Turnau, *Rola podręcznika szkolnego w kształtowaniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpoczątkowej*, Kraków 1978, s. 65.

[27] Wiedza rozpatrywana w kontekście psychologicznym i rozwojowym pojawia się najpierw w konkretnych sytuacjach zadaniowych nie jako wiedza gotowa, lecz jako potrzeba działania (zob. A. Bessot, *Ramy teoretyczne dydaktyki matematyki we Francji*, „Dydaktyka Matematyki", nr 18/1996).

[28] Przez reprezentację J.S. Bruner rozumie zbiór reguł w kategoriach, w których osoba tworzy sobie pojęcie stałości zdarzeń z jakimi się zetknęła. Reguły te mogą być wyrażane w formie schematów działania (reprezentacja enaktywna), reprezentowane w postaci obrazów (reprezentacja ikoniczna) bądź określonego kodu (słów, symboli, tekstu pisanego – reprezentacja symboliczna). Reprezentacje te rzadko występują w postaci „czystej", zwykle są to reprezentacje mieszane (*Poza dostarczone informacje*, Warszawa 1978, s. 530).

[29] B. Lankiewicz, Z. Semadeni, *Matematyka 2*, s. 9.

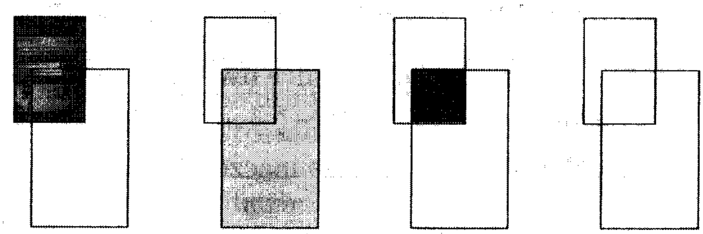
Przykład 8 [30]

Powiedz bez mierzenia, która droga jest dłuższa.

Zewnętrzne spojrzenie na tekst zadania może sugerować, że mamy do czynienia z obrazową (ikoniczną) formą jego przestawienia. Tak jednak nie jest, bowiem bez rozumienia języka przedstawiania figur (sieci kwadratowej, łamanej) nie można badać tych sytuacji. Istota rozwiązania wymaga myślowej analizy własności sieci, odległości między jej węzłami oraz długości odcinka i łamanej. Mamy więc do czynienia z tworzeniem się reprezentacji symbolicznej długości łamanej.

Przykład 9 [31]

Ile prostokątów widzisz na ostatnim rysunku?



Pamiętaj, że każdy kwadrat jest prostokątem.

Tym razem rozwiązanie zadania wymaga wytworzenia sobie reprezentacji ikonicznej prostokąta.

Badania tekstów podręczników dowodzą, że w klasie pierwszej przeważają zadania, które sprzyjają tworzeniu się reprezentacji enaktywnej i ikonicznej wiedzy[32], zaś w klasie trzeciej wzrasta udział symbolicznych reprezentacji.

Skoro rozwój intelektualny polega na opanowywaniu kolejno tych trzech form reprezentacji wiedzy oraz na zdolności do ich integrowania, do przekładania każdej na pozostałe[33], zatem lektura tekstu typu matematycznego nie może ograniczać się do jego czytania ze zrozumieniem oraz interpretowania go, ale musi prowadzić do przetwarzania zawartych w nim informacji w wiedzę w działaniu, posługiwania się nią. To zaś wymaga wykonywania wielu zabiegów wokół tekstu, posługiwania się różnymi środkami i technikami, czyli mówiąc krótko – pracy z tekstem.

[30] B. Lankiewicz, Z. Semadeni, *Matematyka 2,* s. 25.

[31] Tamże, s. 24.

[32] M. Korcz, *Sposób przedstawienia treści matematycznych jako kategoria opisu tekstu podręcznika*, s. 67.

[33] E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, Warszawa 1994, s. 84.

Poziomy czytania

Mówiąc o czytaniu tekstów typu matematycznego w klasach początkowych mam na myśli sytuację, w której uczniowie umieją już czytać (w zwykłym sensie) oraz opanowali praktycznie reguły postępowania, odnoszące się do lektury tekstów humanistycznych.

Obserwacja uczniów klas początkowych pozwala wydzielić kilka ich grup, reprezentujących różne postawy przy czytaniu krótkich tekstów typu matematycznego (zadań). Niektórzy z nich, choć czytają w miarę płynnie, jednak skupiają swoją uwagę na samej czynności czytania. Pytani o treść lektury odpowiadają: to było o zakupach, o bawiących się dzieciach itp. Mają subiektywne poczucie, że rozumieją przeczytany materiał, choć faktycznie ich czynności ograniczają tylko do śledzenia tego, co czytali. Takie czytanie można nazwać **receptywnym**.

Inni czytają podobnie, ale dodatkowo potrafią jeszcze opowiedzieć o tym, co czytali. Zwykle tekst zadania jest dwu-, trzyzdaniowy, więc starają się go przede wszystkim odtworzyć z pamięci. Czytanie utożsamiają z **reprodukowaniem informacji**.

Obie postawy charakteryzuje bazowanie na procesach pamięci, przy mocno ograniczonym rozumieniu tekstu. Można przypuszczać, że w świadomości ucznia nie występuje myśl wyrażona w czytanych zdaniach[34]. Samo subiektywne poczucie zrozumienia nie jest dowodem, że uczeń naprawdę rozumie, co czytał.

Można również wydzielić niezbyt liczną grupę uczniów, którzy **czytają tekst** typu matematycznego **ze zrozumieniem**. Potrafią wyodrębnić konkretne fakty i zdarzenia, związki między nimi czy nawet określić strukturę problemu. Mimo to niektórzy z nich nie radzą sobie z wykorzystaniem analogii sytuacji z sytuacją, o której wcześniej czytali. Przykłady takich zachowań można znaleźć w pracy[35]. Zdarza się również, że uczeń uzupełnia przeczytany tekst dodatkowymi informacjami, o których w tekście nie było mowy; swobodnie go interpretuje na wzór tekstu literackiego.

Do odszukania (np. na polecenie nauczyciela) prostej informacji w tekście pisanym prostym językiem, wymagającej niskiego poziomu wnioskowania wystarczy rozumienie instrumentalne[36]. To jednak za mało, aby włączyć odczytaną informację w system struktur myślowych. Oczywiście przedtem w umyśle czytelnika muszą być wytworzone struktury pojęciowe, „własna" matematyka, będąca układem odniesienia dla matematyki odcyfrowywanej z tekstu. Z kolei nauczanie prowadzące do wytworzenia takiej matematyki nie może być nauczaniem zbytnio ułatwionym, pozbawionym elementów przekładu i przetwarzania.

Dosłowne rozumienie treści jest czymś typowym dla dzieci rozpoczynających naukę czytania; dopiero później są one w stanie odnaleźć w tekście sens ukryty, czyli osiągnąć poziom III wg hierarchii poziomów rozumienia tekstów R. Więckowskie-

---

[34] M. Kreutz, *Rozumienie tekstów*, Warszawa 1968, s. 29.

[35] Zob. H. Siwek, *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym*, Kraków 2004.

[36] W pracy *Relational understanding* („Mathematics Teaching", nr 99) R. Skemp rozróżnia dwa rodzaje rozumienia: instrumentalne (krótko rozumienie tego, co się robi, sprowadzające się do asymilacji izolowanej od kontekstu reguły) oraz relacyjne (rozumienie nie tylko, co się robić, ale też dlaczego).

go. W przypadku tekstów typu matematycznego należałoby zwrot *odszukać ukryty sens* zastąpić wymaganiem **przetworzenia informacji w wiedzę w działaniu, wytworzeniem odpowiedniej reprezentacji tej wiedzy oraz jej wykorzystywaniem w analogicznej sytuacji.**

Specyfika języka matematycznego, teorie rozumienia pojęć i tekstów matematycznych oraz obserwacje zachowań uczniów w toku lektury sugerują, jako dydaktycznie użyteczne, wyróżnienie następujących poziomów czytania tekstów typu matematycznego:

Poziom		Uczeń:
01	recepcji	ogranicza się do śledzenia tego co czyta; ma subiektywne poczucie, że rozumie tekst
02	reprodukcji	śledzi to co czyta; opowiada o tym, co czyta
I	rozumienia instrumentalnego	a) wyodrębnia kolejne fakty, zdarzenia, zapamiętuje i odtwarza je
		b) wyodrębnia związki między faktami i zdarzeniami
II	przetwarzania	a) tworzy reprezentację (enaktywną, ikoniczną, symboliczną) wiedzy
		b) stosuje wiedzę w analogicznej sytuacji

Kolejne poziomy czytania (pracy nad tekstem), prowadzące do pełnego rozumienia tekstów matematycznych występujących w podręcznikach, wymagają różnych technik czytania i dostosowanych do ich specyfiki czynności w toku lektury. Inaczej czyta się definicje, a inaczej dowód, gotowe rozwiązanie zadania czy tekst opisowy zespolony z reprezentacją graficzną. Ich charakterystyka wykracza poza omawiany w tym artykule etap nauczania.

Wyróżnione powyżej poziomy są uszeregowane wg wzrastającego stopnia nabywania umiejętności czytania przez ucznia klas początkowych. Można je traktować jako teoretyczny model i jednocześnie narzędzie o szerokich zastosowaniach dydaktycznych. Sekwencją tych poziomów można się kierować: a) w fazie wypracowywania metodyki kształcenia umiejętności czytania tekstów typu matematycznego, b) przy rozpoznawaniu stopnia nabycia tej umiejętności, stosując odpowiedni dobór pytań i ćwiczeń, c) przy ocenie podręczników szkolnych, z punktu widzenia uczenia czytania tekstów, d) określając genezę niepowodzeń uczniowskich – dziecko, które nie radzi sobie z czytaniem, ma trudności w zrozumieniu tego co czyta, ma również trudności w uczeniu się matematyki.

Zakończenie

Charakterystyka tekstów typu matematycznego, których adresatami są uczniowie klas początkowych, pokazuje, że ogół problemów, z jakimi mamy do czynienia, ma naturę bardziej złożoną niż to, co silnie tkwi w świadomości nauczycieli. Rozumienie tekstów zadań, zapisów symbolicznych, graficznych lub ikonicznych, reguł algorytmicznych, a nawet poleceń werbalnych nauczyciela, wymaga pokonania wielu trudności, które należy kolejno i metodycznie przezwyciężać. Na trudności typu intelektualnego nakładają się bowiem utrudnienia wynikające z wymogów językowych. Jest oczywiste, że nie wystarczy nauczyć czytania tekstów humanistycznych czy narracyjnych, aby wprowadzić uczniów w tajniki lektury tekstów typu matematycznego.

Zarys metodyki kształtowania umiejętności przechodzenia od recepcji i reprodukcji tekstu do rozumienia instrumentalnego i przetwarzania wymaga odrębnego studium. Powinno być ono przedmiotem całkiem innego opracowania.

Bibliografia

A. Bessot, *Ramy teoretyczne dydaktyki matematyki we Francji*, „Dydaktyka Matematyki" nr 18/1996

J. Bruner, *Poza dostarczone informacje*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978

B. Chrząstowska, S. Wysłouch, *Poetyka stosowana*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1987

M. Frindt, J. Jednoralska, *Matematyka klasa 3*, Wydawnictwo JUKA, Łódź 1995

E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994

M. Jagodzińska, *Obraz w procesach poznania i uczenia się*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1991

T. Jóźwicki, *Matematyka*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1987

K. Konarzewski, *PIRLS 2006. Jak czytają dzieci w Polsce i na świecie*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2006

J. Konior, *Dlaczego uczyć czytania i redagowania tekstów matematycznych*, w: *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki. Tom 4: Prace prof. dr hab. Jana Koniora*, pod red. J. Żabowskiego, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2002

J. Konior, *Specyfika tekstów matematycznych w procesie lektury*, w: *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki. Tom 4: Prace prof. dr hab. Jana Koniora*, pod red. J. Żabowskiego, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2002

J. Konior, *O pojęciu zmiennej w nauczaniu szkolnym matematyki*, w: *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki. Tom 4: Prace prof. dr hab. Jana Koniora*, pod red. J. Żabowskiego, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2002

M. Korcz, *Sposób przedstawienia treści matematycznych jako kategoria opisu tekstu podręcznika*, „Problemy Dydaktyczne Matematyki III", Zielona Góra 1987

M. Kreutz, *Rozumienie tekstów*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968

Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki. Część 1*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977

B. Lankiewicz, Z. Semadeni, *Matematyka 2*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994

H. Siwek, *Kształcenie zintegrowane na etapie wczesnoszkolnym*, Wydawnictwo Akademii Pedagogicznej, Kraków 2004

R.R. Skemp, *Relational understanding*, „Mathematics Teaching" vol. 99

G. Treliński, *Podręcznik matematyki a funkcje komunikatów językowych*, w: *Konstruowanie podręczników szkolnych do nauczania matematyki*, pod red. T. Zimnego, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej, Częstochowa 1994

G. Treliński, *Kształcenie matematyczne w systemie zintegrowanym w klasach I-III*, Wydawnictwo Wszechnicy Świętokrzyskiej, Kielce 2004

S. Turnau, *Rola podręcznika szkolnego w kształtowaniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpoczątkowej*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej, Kraków 1978

W. Zawadowski, *Kształcenie nauczycieli podręczniki i pomoce dydaktyczne do nauczania matematyki. Argumentacja i dowodzenia matematyczne*, w: *Kształcenie matematyczne – tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, pod red. M. Czajkowskiej, G. Trelińskiego, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce 2006