**Mieczysław Lubański**

# W sprawie ilościowego charakteru matematyki

Studia Philosophiae Christianae 3/2, 321-327

1967

Studia Philosophiae Christianae
ATK
2/1967

# Z ZAGADNIEŃ FILOZOFII PRZYRODY



Mieczysław Lubański

## W SPRAWIE ILOŚCIOWEGO CHARAKTERU MATEMATYKI

Nic bardziej pożądanego nie może spotkać autora nad to, gdy wyrażone przez niego myśli znajdą oddźwięk wśród specjalistów. Piszącego te słowa spotkała właśnie tego rodzaju nadzwyczaj pomyślna sytuacja. Uważam bowiem sobie za zaszczyt, że w artykule dyskusyjnym pt. „O ilościowym charakterze przedmiotu matematyki"[1] co najmniej połowa artykułu została poświęcona krytyce wyrażonego przeze mnie stanowiska. Muszę jednak otwarcie wyznać, że przedstawioną tam krytyką nie jestem niestety przekonany. Na tym miejscu chciałbym dodać dalszy głos w dyskusji. Uczynię to starając się przedstawić wątpliwości, jakie budzi we mnie przeprowadzona we wspomnianym artykule „obrona" tradycyjnego ujęcia przedmiotu matematyki.

Najpierw chciałbym zaznaczyć, że wydaje się dezorientować nieznającego matematyki informacja zawarta w poniższym tekście:

„Przejdźmy teraz do głównego problemu, czy przedmiotem współczesnych dyscyplin matematycznych jest „czysta ilość", czy też „wykraczają one poza ramy kategorii ilości". Pierwsza supozycja jest tradycyjna. Wywodzi się z poglądu, iż *quantitas discreta* (mówiąc bardziej ogólnie i nowocześnie — mnogość, wyrażając się zaś tradycyjnie i ciaśniej —

[1] S. Kamiński, O ilościowym charakterze przedmiotu matematyki, Roczniki Filozoficzne 14 (1966), z. 1, 126—130.

liczba) lub *quantitas continua* (analogicznie: przestrzeń, figura geometryczna) stanowi obiekt poznania matematycznego" [2].

Chodzi mi tutaj o wyrażenie: „*quantitas discreta* (mówiąc bardziej ogólnie i nowocześnie — mnogość, wyrażając się zaś tradycyjnie i ciaśniej — liczba) lub *quantitas continua* (analogicznie: przestrzeń, figura geometryczna)". Sądzę, że ktoś, kto nie zna współczesnej matematyki zrozumie powyższy fragment w ten sposób, iż to co po łacinie zwie się quantitas discreta, dzisiaj nowocześnie zwie się mnogością, natomiast quantitas continua to po prostu przestrzeń. Trzeba niestety zapytać, kto stosuje taką terminologię, czy współczesny filozof, czy współczesny matematyk? W czyim słownictwie mnogość i przestrzeń są odpowiednikami (i to jeszcze poszerzonymi) quantitas discreta oraz quantitas continua? Każdy matematyk wie dobrze, że wyraz mnogość jest starym terminem (dziś już raczej nieużywanym) i znaczy to samo co słowo zbiór. A zbiory mogą być rozmaite, i dyskretne i ciągłe. Mówi się przecież np. o zbiorze liczb naturalnych, jak też o zbiorze punktów odcinka, koła itp. Podobnie jest z pojęciem przestrzeni. Nie każda przestrzeń musi być ciągła. Matematyka zna przykłady przestrzeni dyskretnych (odopowiadających terminowi quantitas discreta). A zatem ... czy wyżej cytowane słowa można uznać za adekwatne przedstawienie współczesnego stanowiska w matematyce?

Zajmijmy się obecnie analizą rozumowania, mającego uzasadnić, że przedmiotem matematyki jest ilość. Czytamy: „Krąg stosunków ilościowych (i szczególniej ich postaci — form przestrzennych) badanych przez matematykę ogromnie się rozszerzył. Ale wszystko to mieści się w kategorii ilości (jako mnogości, zbiorze). Zresztą od strony formalnej wykazano, że zbiór (klasa) oraz relacja są wzajem sprowadzalne (definiowalne)" [3].

Ostatnie cytowane zdanie jest prawdziwe. Nie bardzo jednak widać, w jaki sposób ma ono uzasadniać tradycyjne ujęcie przedmiotu matematyki. Dlaczego? Po prostu z tej racji, że przy ujęciu formalnym relacji i funkcji utożsamia się relację i funkcję z jej wykresem. „Gdy pary uporządkowane utożsamimy z punktami płaszczyzny, a ich poprzedniki i następniki odpowiednio z odciętymi i rzędnymi, to okaże się, że funkcja jest tym samym co *wykres funkcji* (w terminologii geometrycznej)" [4]. Jednakże to nie jest wszystko. Bowiem: „Pojęcie funkcji odróżniać należy od pojęcia przyporządkowania. Przez *przyporządkowanie* rozumiemy funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$ o dwu zmiennych, spełniającą warunki

$$\bigwedge_x \bigwedge_y \varnothing(x,y), \quad \bigwedge_{x,y_1,y_2} [\varnothing(x,y_1) \wedge \varnothing(x,y_2) \rightarrow (y_1 = y_2)]." [5]$$

[2] S. Kamiński, op. cit., 127—128.
[3] Tamże, 128.
[4] K. Kuratowski i A. Mostowski, Teoria mnogości, Warszawa $1966^2$, 73.
[5] Tamże, 75.

Jasną jest więc rzeczą, że w matematyce można odróżniać relację (względnie funkcję) od jej wykresu. Nie można chcieć zawęzić matematyki do samego ujęcia czysto formalnego. Byłoby to zubożeniem, okaleczeniem matematyki. W praktyce matematycznej na każdym niemal kroku odróżnia się funkcję od jej wykresu. Niech przykładem posłuży tu książka: I. M. Gelfand, E. G. Głagolewa, E. E. Sznol, Funkcii i grafiki, Moskwa 1966.

Zarzucono mi psychologistyczną interpretację funkcji. Oponent mój pisze bowiem: „Ponadto, jeśli określi się funkcję jako „fakt przyporządkowania elementom jednego zbioru elementów drugiego zbioru", to chyba przy psychologistycznej interpretacji, że funkcja jest faktem psychicznym (operacją myślową przyporządkowania) da się powiedzieć, iż pojęcie funkcji jest pojęciem „nieilościowym"." [6]

Sądzę, że nie jest potrzebna interpretacja psychologistyczna dla utrzymywania „nieilościowego" charakteru funkcji. Wystarczy zwrócić uwagę na cytowany wyżej tekst K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego. Jasne jest, że wystarczy tu przez przyporządkowanie rozumieć funkcję zdaniową $\Phi(x,y)$.

Jeszcze jeden cytat wiążący się z tą sprawą. „Zachodzi podejrzenie, że krytykowany tu Autor widzi źródło nieilościowego charakteru pojęć matematyki w ich redukowalności do pewnych pojęć logicznych. Byłoby to niesłuszne o tyle, że te ostatnie pojęcia mają wyłącznie zakresowy charakter" [7]. Otóż to, właśnie sprawa tego zakresowego charakteru pojęć logicznych. Chętnie polemizowałbym z wyrażonym wyżej stanowiskiem. Obecnie jednak pominę tę sprawę.

Wyznaję otwarcie, że nie jestem zwolennikiem jakiejś koncepcji tylko dlatego, że jest ona tradycyjna. To za mało. Oponent mój pisze: „Druga ewentualność zapoznaje ważne, choć tradycyjne, rozróżnienie w poznaniu jego przedmiotu materialnego i formalnego. Matematyka dotyczy, ontycznie się wyrażając, czegoś, co — jako przedmiot materialny — posiada obok aspektów kwantytatywnych również kwalitatywne. Atoli przedmiotem formalnym (właściwym kątem patrzenia na przedmiot materialny) matematyki są właśnie jedynie aspekty zakresowe, czyli ilościowe" [8]. Tak przedstawiona sprawa wydaje się przesądzać o mojej pomyłce. Czy jednak zagadnienie to zostało adekwatnie i przekonująco przedstawione? Nawiasem warto tu zapytać, czy istotnie zakresowość i ilość to jedno i to samo? A to zdaje się sugerować końcowa część cytowanego tekstu. Pomijając to jednak chciałbym jedynie zwrócić uwagę, że nie jest łatwo odpowiedzieć na pytanie co jest właściwie (według ujęcia tradycyjnego) przedmiotem matematyki (zarówno materialnym jak i for-

---

[6] S. Kamiński, op. cit., 128.
[7] Tamże, 128.
[8] S. Kamiński, op. cit., 129.

malnym? [9] Czy można ode mnie żądać, abym precyzował ten problem? Nie takie zadanie postawiłem sobie w artykule pt. „Ilość a matematyka” [10].

Matematyka współczesna bada m. in. relacje oraz ich własności. Sądzę, że praktyka matematyczna wskazuje, iż nie można wszystkich relacji badanych w matematyce sprowadzić do tzw. relacji ilościowych. Z tego względu nie wydaje się adekwatne ujmowanie ilości jako przedmiotu badań matematyki. Można by taką tezę głosić, ale jedynie jako ujęcie definicyjne. Powstaje pytanie, czy tak terminologia byłaby zgodna z rozumieniem kategorii przez Arystotelesa. Gdyby jednak przyjąć tego rodzaju terminologię, to wówczas, np. mechanika teoretyczna byłaby nieodróżnialna od matematyki. Czy więc pożyteczny byłby to termin z punktu widzenia potrzeb nauki?

Warto wspomnieć tutaj o tym, że obserwujemy współcześnie wykraczanie matematyki poza pojęcie zbioru. Mam na myśli matematyczną teorię kategorii. Nie będę tu podawał precyzyjnych określeń. Zacytuję bardzo jasny i wymowny tekst G. Choqueta. Oto on: „Teoria *kategorii* jest najmłodszym z wielkich narzędzi matematyki. Nic nie świadczy tak silnie o jedności matematyki jak właśnie ona. Stanowi ona nowy krok naprzód w dziedzinię abstrakcji. Istotnie, zajmuje się ona nie relacjami między elementami jakiegoś ustalonego zbioru, ale relacjami między przedmiotami ustalonej *kategorii*, a nawet relacjami między różnymi kateoriami. Fakt, że taka ogólność nie pociąga za sobą trywialności ani nawet ubóstwa tej teorii, nosi znamiona cudu. A jednak tak jest, teoria ta jest w wielu dziedzinach nieodłącznym przewodnikiem młodej generacji matematyków.

Ograniczymy się tutaj jedynie do podania kilku definicji.

Najpierw kilka przykładów kategorii: kategoria grup, kategoria przestrzeni wektorowych, przestrzeni topologicznych, zbiorów uporządkowanych i ogólniej — kategoria zbiorów opatrzonych strukturą pewnego gatunku z wyróżnioną klasą morfizmów.

Kategoria nie jest więc zbiorem; wygodnie jest wyobrazić ją sobie jako pewną klasę przedmiotów, rozumiejąc przez klasę coś szerszego niż zbiór” [11].

Sądzę, że wydźwięk „ideowy” jego jest jasny i wymowny. Z tej więc też racji nie widzę, abym miał zmieniać pogląd wyrażony ongiś przeze mnie. Wspominałem nieco wyżej, że mój Oponent tak operuje terminami ilość, zakres, zbiór jak gdyby uważał je za synonimy. Teoria kategorii,

---

[9] Por.: A. G. van Melsen, Filozofia przyrody, Warszawa 1963, 232; 234.

[10] Roczniki Filozoficzne 12 (1964), z. 3, 87—91.

[11] G. Choquet, Analiza i Bourbaki. Wiadomości Matematyczne 7 (1963), 107—108.

wobec takiego stanu rzeczy zachęca do ...wyjścia z tradycyjnego ujęcia przedmiotu matematyki. Osobiście sądzę, że chęć „zamykania" matematyki w granicach kategorii ilości bierze się z tego historycznego faktu, że dla Arystotelesa matematyka to była właściwie tylko geometria [12].

Mój Oponent pisze: „Dla teorii matematycznych znajduje się modele nieilościowe. Byty stanowiące takie modele nie muszą posiadać cech ilości, ale od tej „strony", w tym aspekcie nie są tzw. dziedziną żadnej teorii matematycznej. Badane przez matematykę stosunki zawsze są bowiem stosunkami ilościowymi" [13]. Muszę wyznać szczerze, że nie wiem skąd można czerpać taką pewność co do wyłączności stosunków ilościowych badanych przez matematykę. Wobec wszystkich wyżej przedstawionych myśli jestem skłonny podciągnąć i tę wypowiedź pod zdanie typu definicyjnego.

Trudną jest sprawą określić czym jest matematyka. Toteż celowe będzie zacytowanie tu zdania J. Łosia. Czytamy: „Matematyka zajmuje się abstrakcyjnymi tworami, nazwijmy je modelami. Niektóre modele mają swoje realizacje wśród innych modeli. [...] Inne modele znajdują realizację wśród takich tworów, jak funkcje, ciągi czy operacje. [...] Ale są modele, których realizacje są niemal bezpośrednio materialne, w takim stopniu, że poprzez nie można opisać rzeczywistość w sposób, który może służyć podejmowaniu konkretnych decyzji rzeczywistość tę kształtujących. [...] Najmłodszą z tego działu jest teoria decyzji. [...] O tym, czy coś jest czy nie jest matematyką, decyduje metoda, a nie takie czy inne realizacje modeli i heurystyczne ich interpretacje" [14].

Widzimy tu stanowisko, dla którego wyróżnianie przedmiotów, materialnego i formalnego, przy określaniu matematyki, jest zupełnie niepotrzebne. Czy nie można przy takim ujęciu pozostać?

Przedstawiona tutaj kontrowersja, zdaniem piszącego te słowa, świadczy wyraźnie o jednym. O tym mianowicie, że niejasne są terminy ilość oraz matematyka. Słowa te różnie rozumieją obie strony. I stąd dyskusja, stąd nieporozumienie. Mój Oponent bardzo szeroko rozumie wyraz „ilość". Moje rozumienie tego samego terminu jest z pewnością węższe. Wyraziłem wyżej już obawy, czy warto tak bardzo szeroko rozumieć wspomniany termin. Czy pozostanie on wówczas operatywny? Co zaś do węższego jego rozumienia, to chciałbym zauważyć, że w literaturze fachowej spotyka się je dość często. Czy można z góry rozsądzać, jaki jest ten węż-

---

[12] Cała matematyka grecka była właściwie geometrią. Por. H. Freudenthal, Rola intuicji geometrycznej we współczesnej matematyce. Wiadomości Matematyczne 9 (1966), 83—87.

[13] S. Kamiński, op. cit., 129.

[14] J. Łoś, Matematyka stosowana czy zastosowania matematyki, Wiadomości Matematyczne 8 (1965), 129—130.

szy sens bez przeprowadzenia odpowiednich badań szczegółowych? Pozwolę sobie podać tu jeden przykład.

Weźmy do ręki pozycję następującą: C. Kuratowski, Topologie II, Warszawa — Wrocław 1950. Dwa ostatnie paragrafy tego dzieła noszą następujące tytuły: § 54. *La surface sphérique* $S_2$. *Problèmes qualitatifs.* § 55. *La surface sphérique* $S_2$ *Problèmes quantitatifs. Étude du groupe* $P^A$. Powstaje pytanie, czy użyta wyżej terminologia jest naukowo celowa i użyteczna. Czy uczeni mają prawo, w miarę rozwoju wiedzy uściślać i precyzować terminy? I czy nie można życzyć sobie, aby filozofowie nie odcinali się od żywego nurtu nauki i nie zamykali w starym, jeszcze arystotelesowskim, rozumieniu terminów? Propozycja terminologiczna, za którą tutaj jest prowadzona „agitacja" nie jest jakimś wyjątkiem. Posługuje się taką terminologią np. R. Courant [15], czy Ph. J. Davis [16]. Wobec takiego stanu rzeczy dość specyficznie wygląda postawiony mi zarzut, że nie należy głosić, iż tzw. twierdzenie Jordana odnosi się do kategorii ilości, lecz samo w sobie jest czysto jakościowe [17].

W stosunku do terminu „matematyka" sytuacja wydaje się wyglądać odwrotnie. Tak jak dla terminu „ilość" mój Oponent stosował możliwie szerokie rozumienie słowa, piszący zaś te słowa, znacznie węższe, tak dla terminu „matematyka" strona mi przeciwna usiłuje zawęzić znaczenie interesującego nas wyrazu, podczas gdy ja chciałbym rozumieć go możliwie szeroko, zgodnie z aktualną sytuacją we współczesnej matematyce. Nie jest tu miejsce, aby przedstawiać wszystkie możliwe argumenty, przemawiające za słusznością mego punktu widzenia. Ograniczę się do zacytowania wypowiedzi, wspomnianego już wyżej, R. Couranta. Mówi on: „Na pytanie „co to jest matematyka" nie można odpowiedzieć w sposób sensowny używając ogólników filozoficznych, definicji semantycznych albo dziennikarskiej paplaniny. Takie charakteryzacje nie nadają się również do muzyki czy malarstwa. Nie można ocenić wartości tych sztuk bez pewnego wyczucia rytmu, harmonii i struktury, lub formy, barwy i kompozycji. Do oceny znaczenia matematyki jest jeszcze bardziej niezbędne wniknięcie w jej istotę. [...] Wzajemne oddziaływanie ogólnego i szczególnego, dedukcji i interpretacji, logiki i wyobraźni — to jest głęboka istota żywej matematyki" [18]. Pierwsze zdanie tego cytatu jest wymowne. Nie będę wchodził bliżej w jego analizę. Chciałbym na tym miejscu dodać tylko jedną uwagę tyczącą się stosunku matematyki do logiki. Wyrażę ją słowami C. V. Newsona. „Istnieje zatem nierozstrzygnięty dotąd spór w kwestii: co jest pierwotne, logika czy matema-

---

15 R. Courant, Matematyka w świecie współczesnym, w: Matematyka w świecie współczesnym, Warszawa 1966, 16—17.

16 Ph. J. Davis, Liczba, w: Matematyka w świecie współczesnym, Warszawa 1966, 60.

17 S. Kamiński, op. cit., 129.

18 R. Courant, op. cit., 12—13.

tyka? Tę nowoczesną wersję starego problemu „jajka i kury" niełatwo rozwiązać. Podejmując ją stajemy wobec problemu ostatecznej podstawy wiedzy ludzkiej. Problem ten znakomity logik angielski, F. P. Ramsey, określił jako „najtrudniejszą rzecz na świecie"." [19]. Jeśli więc tak mają się sprawy, to czy można uważać za uzasadnioną konkluzję mego Oponenta o ilościowym charakterze przedmiotu matematyki, wyrażoną słowami: „Tak przynajmniej przedstawia się sprawa przy obiegowym, intuicyjnym rozumieniu terminów: ilość i jakość."? [20]

Nie chcę twierdzić, że jedynymi źródłami nieporozumienia w interesującym nas zagadnieniu, są węższe i szersze rozumienia terminów „ilość", „jakość", „matematyka". Życzyłbym sobie, żeby dyskusja była kontynuowana. I aby w ten sposób przyczyniła się do lepszego sprecyzowania znaczeń występujących terminów, jak też do bardziej adekwatnego sformułowanoa samego problemu. Nie wydaje się bowiem, aby stare, tradycyjne sformułowanie zagadnienia nie dozwalało na postęp w tej dziedzinie. Matematyki nie można wcisnąć, tak sądzę, w stare, sztywne ramy ujęć tradycyjnych. Matematyka jest żywa i młoda, nie da się zamknąć w starych formach. Rozsadza je.

Szczepan W. Ślaga

## Z PROBLEMATYKI GENEZY ŻYCIA ORGANICZNEGO

Wśród problemów ogólnobiologicznych, wokół których toczy się odwieczny spór naukowy i filozoficzny, na pierwszym miejscu należy niewątpliwie umieścić zagadnienie powstania i rozwoju życia organicznego na ziemi. Przy uważnym śledzeniu rozwoju nauk, które bądź to bezpośrednio (jak biochemia, genetyka, cytologia, paleontologia), bądź też pośrednio (astrofizyka, geofizyka, geochemia, wirusologia itp.) zainteresowane są problemami początków życia, konstatuje się równoległy, ogromny postęp badań nad tymi problemami. Powoli i z trudem przed oczyma uczonych wyłania się obraz możliwych dróg i mechanizmów genezy życia, a przynajmniej obraz pierwotnej ewolucji chemicznej materii, pierwotnych warunków atmosferycznych, zarys struktur i systemów przed-życiowych.

Jakże jest to jednak obraz zamglony i nieczytelny.

Daleko jeszcze, o ile w ogóle jest to możliwe, do rozwiązania ta-

---

[19] C. V. Newsom, Istota matematyki, Warszawa 1967, 104. Problemem stosunku matematyki i logiki zajmował się ostatnio A. Church. Zob. jego artykuł pt. „Mathematics and logic" zamieszczony w „Logic, Methodology and Philosophy of Science", Stanford 1962, s. 181—186. Wydźwięk ideowy artykułu Churcha jest zgodny z wypowiedzią Newsoma.

[20] S. Kamiński, op. cit., 130.