tego zastrzeżenia chciałbym dodać, że wiele (nawet wywody omawianej książki) wskazuje na to, iż analiza semiotyczna nie może doprowadzić do ostatecznej odpowiedzi na filozoficzne zagadnienia typu ontologicznego. Aczkowiek przyczynia się do zlikwidowania nieporozumień oraz jałowych dróg rozwiązywania problematyki filozoficznej, nie wystarcza już jednak do rozważenia możliwości różnych konstrukcji ontologicznych (por. np. R. Ingarden, Spór o istnienie świata, t. I, r. 2 oraz T. Czeżowski, Filozofia na rozdrożu, Warszawa 1965, s. 12—18). Tymbardziej zaś nie jest w stanie wyjaśnić przez pierwsze powody pewnych stanów rzeczowych. A szukanie ostatecznych racji uniesprzeczniających ontycznie rzeczywistość trudno wykluczyć z granic filozofii pretendującej do miana naukowej (w szerszym sensie.) Nawet opisana przez prof. Czeżowskiego metoda opisu analitycznego, którą dałoby się potraktować jako wzbogacenie (pod pewnym względem) analizy semiotycznej o ekstrajęzykowe podejście, nie posiada charakteru specyficznego dla filozofii (por. T. Czeżowski, dz. cyt, s. 18). Nadto metoda analizy semiotycznej nie jest obca sposobom uprawiania nauk pozafilozoficznych. Oczywiście, wszystkie te „argumenty" są tylko głosem dyskusyjnym „ku uwadze", bo dla rozwiązania sprawy konieczne byłoby uprzednie ustalenie kryteriów, jakie ma spełniać filozofia pretendująca do miana nauki. A to już przekracza ramy niniejszej recenzji.

Wystarczy zauważyć na zakończenie, ile to ciekawych i prowokujących do dyskusji (w sprawach zasadniczych dla teorii nauki i koncepcji filozofii) tematów zostało poruszonych przez prof. Dąmbską. Niemniejszą zaletą książki jest jej ogromny ładunek rzetelnych informacji o poglądach klasyków epistemologii, na tle czego wskazywano dopiero nowe problemy. Zawarto również w studium dużo solidnej roboty ustalającej i porządkującej nie tylko terminologię, lecz także sprawy rzeczowe.

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

PARADOKS A POZNANIE

1. Wstęp. 2. Przykłady paradoksów matematycznych. 3. Paradoks a intucja. 4. Paradoks a rzeczywistość. 5. Wnioski.

Wstęp

Przyjęło się nazywać paradoksem taką wypowiedź, która w swej treści wydaje się być sprzeczna z powszechnie przyjętym przekonaniem. Ta pozorna sprzeczność powoduje u odbiorcy informacji paradoksalnej psychiczny stan niepokoju intelektualnego, stan dziwności w stosunku do problemu, którego dotyczy dany paradoks. Z klasycznych przykładów paradoksów można tu wymienić np. paradoks istnienia liczb niewymiernych, paradoksy Zenona, paradoks antypodów itd. We wspomnianych elementach „niepokoju", „dziwności", które pociąga za sobą paradoks, widzi się zwykle bodziec do prowadzenia intensywnych badań naukowych, których celem jest wyświetlenie powstałej sytuacji. Ten „naukowy" rys paradoksu należy powitać z wielkim uznaniem [1].

Historia nauki mówi nam, że lista paradoksów bynajmniej nie jest zakończona. W rozwoju nauki powstają ciągle nowe paradoksy. Dla przykładu można tu wymienić szeroko znane paradoksy z zakresu fizyki współczesnej, jak np. paradoks korpuskuły i fali dla cząstek elementarnych, paradoks nieciągłości przejścia elektronu w atomie z jednego poziomu energetycznego na drugi itp. We współczesnej matematyce także spotykamy się i to z wielką ilością zbiorów o paradoksalnych własnościach.

Celem tego artykułu jest omówienie kilku nowszych paradoksów matematycznych oraz przedstawienie na ich tle pewnych wniosków typu metodologiczno-filozoficznego. Zaznaczamy tu od razu, że ograniczamy się w rozważanych przykładach paradoksów wyłącznie do matematyki. Takie zawężenie rozważań pozwoli na uzyskanie co najmniej dwu następujących pozytywów: 1° umożliwi dokładniejszą analizę paradoksów z racji ich dość jednolitego charakteru, 2° ułatwi uzyskanie bardziej precyzyjnych i szczegółowych wniosków. Oparte one bowiem będą na bardziej ścisłych, jednolitych rozważaniach. Większa ogólność twierdzenia bowiem pociąga za sobą większe ubóstwo treści w porównaniu do twierdzenia bardziej szczegółowego [2].

---

[1] Por. np. T. Kotarbiński, Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk, Wrocław—Warszawa—Kraków 1961, 258—259.

[2] Zdarzają się czasami tu wyjątki. O takim wyjątku mogą świadczyć następujące słowa: „Teoria kategorii" jest najmłodszym z wielkich narzędzi matematyki. Nic nie świadczy tak silnie o jedności matematyki jak właśnie ona. Stanowi ona nowy krok naprzód w dziedzinę abstrakcji. Istotnie, zajmuje się ona nie relacjami między elementami jakiegoś ustalonego zbioru, ale relacjami między przedmiotami ustalonej „kategorii", a nawet relacjami między różnymi kategoriami. Fakt, że taka ogólność nie pociąga za sobą trywialności ani nawet ubóstwa tej teorii, nosi znamiona cudu." (G. Choquet, Analiza i Bourbaki, *Wiadomości Matematyczne* 7 (1963), 107).

2. Przykłady paradoksów matematycznych

Rozpoczniemy od rozważań związanych z pojęciem spójności. Mówiąc potocznie, zbiór jakiś jest spójny, jeżeli składa się z jednego „kawałka", jeżeli nie jest zespołem „luźnych" części. Np. kwadrat, sześcian to zbiory spójne. Natomiast np. zbiór liczb całkowitych nie jest spójny. Jasną jest rzeczą, że istnieją takie zbiory spójne, które przestają nimi być, gdy usuniemy z nich jeden punkt. Do takich zbiorów należy np. odcinek. Usuwając z jego wnętrza dowolny jeden punkt rozspajamy zbiór, otrzymując dwa rozłączne odcinki. Istnieją oczywiście zbiory jednowymiarowe, których jeden punkt nigdy nie rozspaja. Najprostszym przykładem może tu służyć zwykły okrąg koła. Trzeba usunąć co najmniej dwa różne punkty, by okrąg stał się niespójny. Gdyby jednak zapytać, czy możliwą jest rzeczą, aby istniał taki zbiór spójny, który by po usunięciu jednego punktu stał się całkowicie niespójny w tym sensie, że „rozpadałby się" na poszczególne rozłączne punkty, to intuicja dałaby nam raczej odpowiedź negatywną. Trudno bowiem wyobrazić sobie wspomnianą tak paradoksalną sytuację.

Okazuje się jednak, że przykład takiego rodzaju zbioru istnieje. Został on skonstruowany w r. 1921 przez B. Knastera i K. Kuratowskiego [3]. Punktem wyjścia konstrukcji jest tzw. miotełka Cantora. Powstaje ona przez połączenie odcinkami prostoliniowymi punktu płaszczyzny o współrzędnych (1/2, 1/2) z punktami dobrze znanego zbioru Cantora. Następnie z danego odcinka bierzemy punkty o rzędnych wymiernych, jeżeli odcinek zawiera koniec „wyjętego" przedziału przy konstrukcji zbioru Cantora. W przypadku przeciwnym bierzemy z odcinka punkty o rzędnych niewymiernych. Tak powstaje zbiór Knastera — Kuratowskiego. Można wykazać, że zbiór ten jest spójny, tj. (mówiąc potocznie) „jednokawałkowy", zarazem jednak punkt (1/2, 1/2) rozspaja go na oddzielne izolowane punkty. Innymi słowy, zbiór Knastera—Kuratowskiego po usunięciu punktu (1/2, 1/2) nie tylko przestaje być zbiorem spójnym, ale nie zawiera żadnego podzbioru spójnego, mającego więcej niż jeden punkt. Jak widać, punkt (1/2, 1/2) może być nazwany „eksplodującym". Spójny zbiór Knastera—Kuratowskiego, po usunięciu punktu (1/2, 1/2) eksploduje „rozsypując się" na poszczególne punkty.

Jasne jest, że opisana sytuacja może być uważana za paradoksalną. Widać to szczególnie wyraźnie, kiedy wniknie się nieco dokładniej w strukturę samego zbioru Knastera—Kuratowskiego. Dla intuicji dziw-

[3] Zob. B. Knaster et C. Kuratowski, Sur les ensembles connexes, *Fund. Math.* 2 (1921), 241.

ne jest zarówno to, że omawiany tutaj zbiór jest spójny, jak i jego własność „eksplodowania” po usunięciu jednego tylko punktu (1/2, 1/2).

Zapytajmy teraz, czy linią krzywą można wypełnić sześcian? Podobnie jak poprzednio intuicja zdaje się nam sugerować, że nie jest to możliwe. W jaki bowiem sposób dałoby się coś trójwymiarowego „wypełnić” czymś jednowymiarowym tylko? W jaki sposób czymś co posiada tylko długość można „wypełnić” zbiór mający i długość i szerokość i wysokość?

Okazuje się jednak, że odpowiedź i na to pytanie jest pozytywna. Można też poprowadzić linię krzywą, aby wypełniła ona cały trójwymiarowy sześcian [4].

Zauważmy, że krzywe wypełniające jakiś obszar (płaski względnie przestrzenny) noszą nazwę krzywych Peany. Pierwszy bowiem przykład krzywej ciągłej wypełniającej cały obszar płaski podał Peano w r. 1890 [5]. Widzimy więc, że tego rodzaju przykłady są znane w matematyce już niemal 80 lat. Kiedy matematycy zapoznali się z tym pierwszym przykładem Peany, wywołało to duże zainteresowanie odkryciem i pociągnęło za sobą wielką ilość prac poświęconych tej problematyce. Najwybitniejsi matematycy pracowali nad tym zagadnieniem. Wypada tu wymienić takie nazwiska jak Hahn, Hilbert, Moore, Polya. Z matematyków polskich pisał o tej problematyce prof. W. Sierpiński.

Jako trzeci przykład rozważmy zbiór będący wspólnym brzegiem trzech płaskich obszarów.

Najpierw zwróćmy uwagę na to, że zupełnie prostą i jasną sprawą jest istnienie zbiorów, będących wspólnym brzegiem dwu obszarów płaskich. Np. okrąg koła jest wspólnym brzegiem wnętrza koła i jego zewnętrza, podobnie elipsa jest wspólnym brzegiem dwu płaskich obszarów, mianowicie wnętrza elipsy i jej zewnętrza. Przykładów tego rodzaju jest dużo i ich istnienie nie jest żadnym problemem dla intuicji. Sądzimy, że tak powinno być z reguły. Toteż kiedy zapytamy, czy istnieją takie zbiory płaskie, aby każdy ich punkt był wspólnym brzegiem trzech obszarów, wówczas intucja (podobnie jak w przypadkach poprzednich) wydaje się mówić nam raczej nie. Jednakże wnikliwsze badania wykazują, że jest to możliwe.

Zarys konstrukcji omawianego obecnie zbioru wygląda następująco. Bierzemy na płaszczyźnie koło K. Usuwamy z niego następnie wnętrza dwu mniejszych kół położonych w wnętrzu koła K. Załóżmy, że odległość dowolnego punktu zbioru powstałego z wyjściowego koła K przez usunięcie dwu wspomnianych kół, od każdego z usuniętych kół

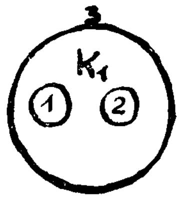
---

[4] Zob. np. A. Lelek, Zbiory, Warszawa 1966, 108—109.

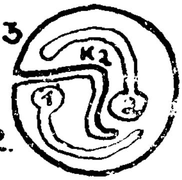
[5] G. Peano, Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, *Mathematische Annalen* 36 (1890), 157—160.

oraz od zewnętrza koła K, nie przekracza liczby 1. Oznaczmy ten zbiór przez K_1. Ponumerujmy wnętrza usuniętych kół i uważajmy je za obszary numer 1 oraz 2. Zewnętrze koła K nazwijmy obszarem numer 3. (Rys. 1) Poprowadźmy następnie z każdego z usuniętych dwu kół

Rys. 1.



Rys. 2.



oraz z zewnętrza koła K (czyli z trzech obszarów 1, 2, 3) parami rozłączne „kanały" tak, aby odległość każdego punktu zbioru powstałego z K_1 przez usunięcie wnętrz poprowadzonych kanałów (oznaczmy go przez K_2) od dowolnego z trzech powiększonych w opisany wyżej sposób obszarów 1, 2, 3 była niewiększa niż 1/2. (Rys. 2) I postępujmy tak dalej do nieskończoności. Zatem zbiór K_n powstaje ze zbioru K_{n-1} przez takie poprowadzenie parami rozłącznych kanałów z trzech rozpatrywanych obszarów, aby odległość każdego punktu zbioru K_n od wszystkich trzech obszarów jednocześnie nie przekraczała liczby $1/n$.

Bierzemy następnie część wspólną, czyli iloczyn mnogościowy, skonstruowanych zbiorów K_n, tj. zbiór $K = K_n$. Z konstrukcji jest jasne, że zbiór K_n posiada żądaną paradoksalną własność. Każdy jego punkt jest wspólnym brzegiem trzech płaskich obszarów.

Dla informacji dodajmy, że stosując analogiczną konstrukcję, można podobnie łatwo zbudować zbiór będący wspólnym brzegiem n płaskich obszarów, dla n = 4, 5, 6, ... Sytuacja paradoksalna pojawia się już przy liczbie 3. Dla liczb większych sprawa jest zupełnie podobna i nic istotnie nowego tutaj nie pojawia się.

Przejdziemy teraz do następnego przykładu do tzw. paradoksalnego rozkładu kuli. Chodzi tu o zagadnienie następujące. Niech dana będzie kula trójwymiarowa Q. S. Banach i A. Tarski udowodnili w r. 1924, że daną kulę Q można podzielić na 5 części w taki sposób, iż składając odpowiednio te części otrzyma się dwie pełne kule tej samej wielkości, co kula wyjściowa Q[6]. Nie trzeba nikogo przekonywać, że wynik

[6] Zob. S. Banach et A. Tarski, Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fund. Math.* 6 (1924), 244—277. Ściśle biorąc Banach i Tarski wykazali istnienie wspomnianego rozkładu kuli przy podziale jej na większą liczbę części. Liczba 5 jest osiągniętym tu minimum przez późniejszych badaczy tego zagadnienia.

Banacha i Tarskiego jest wysoce paradoksalny. Stanowi on, jak gdyby, wyzwanie dla „zdrowo-rozsądkowej" naszej intuicji geometrycznej.

Wspomnijmy o jeszcze jednym paradoksalnym fakcie geometrycznym. Jest rzeczą zrozumiałą i jasną, że łuk krzywoliniowy posiada tylko długość. Jeśli ktoś chciałby mówić o jego polu, to trzeba by powiedzieć, że jest ono równe zeru. Okazuje się jednak, że można podać konstrukcję łuku, który posiadałby pole dodatnie, a więc większe od zera.[7] Istnieje więc łuk o dodatnim polu. Konstrukcja wspomnianego łuku jest dość prosta. Nie będziemy jednak tutaj jej podawać ze względu na charakter tego artykułu. Wystarczy nam sama wiadomość o mającym miejsce paradoksalnym fakcie geometrycznym.

Zwróćmy obecnie uwagę na jeszcze jeden bardzo elementarny paradoks związany ze zbiorami przeliczalnymi. Został on podany przez prof. W. Sierpińskiego.

Załóżmy mianowicie, że co roku stawia się 10 nowych problemów naukowych. Przypuśćmy dalej, że w każdym roku rozwiązuje się tylko jeden z postawionych do danej chwili problemów. Otóż okazuje się, że mimo iż liczba nierozwiązanych zagadnień będzie stale wzrastać, to jednak każde zagadnienie zostanie w swoim czasie rozwiązane, o ile tylko założymy, że ludzkość będzie istnieć nieskończenie długo. Ten paradoks posiada następujące uzasadnienie.

Jest rzeczą jasną, że liczba problemów nierozwiązanych będzie stale wzrastać. Ponieważ, zgodnie z założeniem, w każdym roku stawia się 10 problemów, zaś rozwiązuje się jeden ze wszystkich do danej chwili postawionych, to po n latach liczba nierozwiązanych problemów będzie wynosić: $10n - n = 9n$. Jeżeli jednak ponumerujemy stawiane problemy i w każdym roku będziemy rozwiązywać zagadnienie o najmniejszym numerze, wówczas n-ty problem zostanie rozwiązany po n latach. Przeto w swoim czasie każdy problem zostanie rozwiązany.[8]

Należy zaznaczyć, że podane tu przykładowo paradoksy nie wyczerpują w najmniejszej mierze listy istniejących paradoksów w matematyce. W wielu działach współczesnej matematyki znamy ich wiele. Najliczniejsze bodajże są w teorii mnogości i topologii. Przedstawianie ich tutaj zajęłoby zbyt wiele miejsca. Nadto nie każda sytuacja paradoksalna daje się łatwo przedstawić w sposób elementarny bez terminologii fachowej. Toteż poprzestajemy na wymienionych sześciu zbiorach o własnościach paradoksalnych i przechodzimy obecnie do

---

[7] Zob. np. W. Sierpiński, Wstęp do teorii mnogości i topologii, Warszawa 1965, 111—113.

[8] Zob. W. Sierpiński, O stu prostych ale trudnych zagadnieniach arytmetyki, Warszawa 1959, 33.

bliższego ich zbadania pod interesującym nas punktem widzenia metodologiczno-filozoficznym. Chcemy bowiem w ten sposób uzyskać pewne konkretne wnioski.

3. Paradoks a intuicja

Zapytajmy teraz, jakie uwagi nasuwają się na temat roli intuicji w poznaniu, w świetle przedstawionych wyżej paradoksów. Jaką można jej przypisać funkcję i znaczenie w poznaniu?

Ogólnie biorąc powiemy, że omówione paradoksy wskazują na to, iż intuicja jest zawodna. Nie można polegać w pełni na jej sugestiach. W przypadku bowiem paradoksu pierwszego z podanych wyżej, intuicja jest skłonna podsuwać myśl, że zbioru spójnego nie można przez usunięcie jednego tylko punktu „rozsypać" na poszczególne oddzielne punkty, w przypadku drugiego paradoksu — że coś jednowymiarowego nie może wypełnić sobą obszaru trójwymiarowego, w przypadku trzeciego — że nie istnieje taki zbiór, którego każdy punkt byłby wspólnym brzegiem trzech obszarów jednocześnie, w przypadku czwartego — że z kuli nie można otrzymać dwu kul tej samej wielkości co kula wyjściowa, w przypadku piątego — że łuk nie może mieć pola dodatniego (wówczas bowiem przestałby być łukiem, stałby się czymś co posiada powierzchnię), w przypadku ostatniego — że gdy stawia się więcej zagadnień, niż rozwiązuje, to będą istniały problemy, które nigdy nie doczekają się rozwiązania. Widzieliśmy jednakże, że sugestie te okazały się błędne. To zmusza nas do ostrożności przy kierowaniu się intuicją i poleganiu na jej inspirujących funkcjach. Intuicja winna przeto być kontrolowana i kształcona.

Można więc i należy kontrolować intuicję oraz ją kształcić. Mówienie o kształceniu intuicji i postulowanie tego posiada więc sens. Intuicja jest wprawdzie cennym narzędziem heurystycznym, nie może jednak być uważana za jeden ze sposobów dowodzenia twierdzeń. Im bardziej intuicja zostanie wyszkolona (w danej dziedzinie wiedzy) na bazie faktów w oparciu o pracę rozumu, tym lepsze może nam oddać usługi. Wydaje się, że uświadomienie sobie dokładne tego stanu rzeczy jest ważne. Rzutuje to na wiele rozważań dotyczących problematyki ogólno-filozoficznej. Zasygnalizujmy wyłaniające się tu problemy związane z intuicją, jak np. problem jej różnych rodzajów oraz ich klasyfikacji, czy też zagadnienie sprawdzianu dla bezbłędnego ujmowania intuicyjnego rzeczywistości itp. Dojście do omawianej problematyki w stopniu znacznym ma miejsce dzięki zaistnieniu w nauce zjawisk typu paradoksalnego.

Jeśli przyjrzelibyśmy się nieco dokładniej przedstawionym wyżej paradoksom, to zauważylibyśmy, że pojawiły się one na skutek braku precyzji w intuicyjnym ujęciu problemu. Intuicja nie potrafiła przedstawić nam w sposób ścisły i precyzyjny treści takich pojęć jak zbiór spójny, łuk prosty, obszar trójwymiarowy, „istota" nieskończoności przeliczalnej itd., nie potrafiła — mówiąc nieco dokładniej — stanowić wystarczającej podstawy, na której bazując umysł mógłby sformułować adekwatne definicje wspomnianych pojęć. Paradoksy pojawiały się zawsze wtedy, gdy (jak to się później okazało) dość „grube" intuicje były konfrontowane z uściśleniami pojęciowymi. Wydaje się, że to w wystarczający sposób wskazuje, iż nie można poprzestawać na sugestiach intuicyjnych przy precyzacji pojęć. Odnośnie paradoksu np. krzywej ciągłej wypełniającej obszar, zauważmy iż odkrycie dokonane przez G. Peano zachwiało dziewiętnastowiecznymi intuicjami odnoszącymi się do pojęcia krzywej. Zarazem przyczyniło się to do lepszego wyprecyzowania pojęcia krzywej. Paradoks Peany wykazał, że nie można definiować krzywej jako zbioru punktów, będącego ciągłym obrazem odcinka geometrycznego [9]. Należy zatem pojęcia, dane nam najpierw w akcie pierwotnej intuicji, precyzować. Ta uwaga to także jeden z doniosłych wniosków, płynących z pojawiania się paradoksów. Nie można poprzestawać na intuicyjnym ujmowaniu pojęć. Pojęcia należy precyzować i to coraz subtelniej. Uzyskuje się wówczas istotny postęp w nauce [10].

Streszczając powiemy więc, że intuicja stanowi jak gdyby wewnętrzny bodziec zachęcający do podejmowania rozważań naukowych w pewnym kierunku, a także wytycza pierwsze granice badaniu naukowemu. Jednakże jest ona zawodna. Dlatego winna być kontrolowana i kształcona przy pomocy pracy umysłu.

4. Paradoks a rzeczywistość

Zastanówmy się obecnie nad pytaniem, czy i jakie istnieją relacje zachodzące między paradoksem a naszym poznawaniem rzeczywistości. Przyjmując za punkt wyjścia zaznaczony we wstępie fakt „niepokoju" intelektualnego powodowanego przez pojawianie się paradoksów, który

---

[9] Zob. np. A. Lelek, O funkcjach Peany, *Prace Matematyczne* 7 (1962), 127.

[10] Na pokrewny temat roli, jaką pełni intuicja geometryczna we współczesnej matematyce por. ciekawe uwagi H. Freudenthala w jego artykule pt. „The role of geometrical intuition in modern mathematics", *ICSU Review of World Science* 6 (1964), 206—209. Artykuł wspomniany kończy się znamiennym zdaniem: „Intuicje bez pojęć są puste, pojęcia bez intuicji są ślepe". Jest ono, jak dobrze wiadomo, parafrazą znanego powiedzenia Kanta.

tym samym stanowi bodziec do intensywniejszych badań naukowych, możemy spodziewać się pozytywnego wpływu paradoksu na bardziej adekwatne poznawanie rzeczywistości. Zaznaczmy wyraźnie, że wyraz „rzeczywistość" rozumiemy tu możliwie szeroko, a więc oznacza on każdy przedmiot badań naukowych. W szczególności możemy mówić o rzeczywistości matematycznej, tj. o tym co jest przedmiotem badań matematyki[11]. To właśnie znaczenie terminu „rzeczywistość" mamy głównie na myśli, kiedy rozważamy problematykę paradoksów współczesnej matematyki. Jednakże wnioski ważne będą ogólnie, nie tylko w odniesieniu do wyróżnionego zakresu rzeczywistości matematycznej. Ma to miejsce z tej racji, że wnioski będą posiadały charakter „wezwania do ostrożności".

Przyglądając się po kolei omówionym paradoksom, widzimy bez trudu, że pierwszy z nich pozwala lepiej ująć treść pojęcia spójności. Jeśli chcielibyśmy utrzymać nasze pierwotne intuicje, związane ze spójnością, to można by w tym paradoksie widzieć odpowiedź na pytanie, czy topologiczne pojęcie spójności odpowiada adekwatnie wspomnianym intuicjom. Jeżeli natomiast przyjęlibyśmy za niepodważalną definicję spójności, wówczas trzeba by powiedzieć, że intuicja nie harmonizuje z nią całkowicie. Powstaje w ten sposób głębszy problem „natury" spójności. Przez zarysowaną tu kontrowersję między implikacjami płynącymi z definicji spójności oraz sugestiami intuicji uzyskujemy głębszy, lepszy, ściślejszy wgląd w meritum zagadnienia.

Podobnie, biorąc drugi z omówionych paradoksów, uzyskujemy dzięki niemu bardziej dokładne wniknięcie w istotę związku zachodzącego między tworami jedno- i trójwymiarowymi (czy też ogólnie: wielowymiarowymi). Okazuje się, że sama różność wymiarów nie jest tu istotna. Podobnie nie jest istotna sama liczba elementów składowych. I w jednym i w drugim wypadku jest ich nieprzeliczalnie wiele (dokładniej: continnum). Najistotniejsze wydaje się tu być uporządkowanie elementów. Przeto pojęcie porządku byłoby jednym z podstawowych pojęć matematycznych.[12]

---

[11] W powyższym zdaniu nie wypowiadamy się wcale na temat przedmiotowego charakteru określenia matematyki i niczego w nim nie przesądzamy. Jest ono tylko wygodnym skrótem dla prostszego wypowiadania się.

[12] Ciekawa wydaje się być analogia z myślą Leibniza, który w przestrzeni widział „formę mnogości". Por. W. Tatarkiewicz, Historia filozofii, t. II, Warszawa 1968, 88. Ten fakt wskazywałby zarazem na genialną intuicję Leibniza, która uzyskała potwierdzenie dopiero pod koniec XIX wieku.

Trzeci paradoks, który mówi o istnieniu zbioru, będącego wspólnym brzegiem trzech płaskich obszarów, posiada wyraźnie „kształcący" charakter dla intuicji. Wskazuje na możliwość jej „szlifowania", „wysubtelniania". Tę samą uwagę należy, oczywiście, odnieść i do pozostałych paradoksów omówionych w tym artykule. Jeśli idzie o sam trzeci paradoks, to pomijamy inne interesujące wnioski, które on nasuwa, ale które posiadają charakter matematyczny i z tej racji nie będziemy się nimi zajmować.

Czwarty z przedstawionych wyżej paradoksów wart jest dokładniejszego omówienia. Może bowiem budzić wiele zastrzeżeń i nieporozumień.

A więc zauważmy najpierw, że Banach i Tarski udowodnili jedynie istnienie wspomnianego paradoksalnego rozkładu kuli. Nie podali natomiast efektywnego sposobu jego przeprowadzenia. Mamy zatem tylko tzw. czysty dowód istnienia wspomnianego paradoksalnego rozkładu kuli. Ten problem wiąże się ściśle z zagadnieniem istnienia w matematyce, z zagadnieniem dowodu w matematyce oraz z pokrewnymi zagadnieniami z podstaw matematyki. Pomijamy jednak te ciekawe problemy z racji charakteru tej pracy, która nie idzie po linii ani samej matematyki, ani jej podstaw.

I teraz możemy wnioskować dalej. Przypuśćmy więc, że udałoby się komuś wykazać, iż pełna kula w naszej przestrzeni fizycznej podlega twierdzeniu Banacha—Tarskiego. Znaczyłoby to, konsekwentnie, że nasza przestrzeń jest trójwymiarowa (w takim sensie, w jakim kula geometryczna jest trójwymiarowa — chodzi o to, że nie przesądzamy, czy zawarta jest ona w przestrzeni o wyższym wymiarze). Gdyby natomiast ktoś wykazał, że kuli w naszej przestrzeni fizycznej nie można rozłożyć na dwie kule we wspomniany sposób, to to znaczyłoby, iż kula w naszej przestrzeni fizycznej nie jest trójwymiarową kulą w znaczeniu geometrycznym.

Wiemy dobrze, iż fizyka współczesna sugeruje, że ciała materialne są raczej „pustką", aniżeli czymś „pełnym", „trójwymiarowym". Mają to być bowiem „małe" masy cząstek elementarnych umieszczone w „dużych" odległościach od siebie w „pustej" przestrzeni. Nie są one więc (tak się przynajmniej wydaje) trójwymiarowymi obszarami w znaczeniu geometrycznym. Toteż nie należy oczekiwać, iż paradoks Banacha—Tarskiego pozwoli nam kiedyś z jednej kulki złota otrzymać dwie kulki złote tej samej wielkości. Przeciwnie, wiedząc jaka jest „natura" kuli geometrycznej oraz kuli materialnej (powiedzmy: złotej), należy wnioskować, że nie jest to w ogóle możliwe.

Zwróćmy uwagę tutaj na to, że omawiany paradoksalny rozkład kuli jest wnioskiem wyprowadzonym przy użyciu tzw. pewnika wyboru. P. J. Cohen udowodnił przed pięciu laty niezależność pewnika wyboru od pozostałych pewników teorii mnogości[13].

Paradoks piąty stawia przed nami problem adekwatnego ujęcia znaczenia terminu łuk. Wskazuje on, podobnie jak paradoks pierwszy w odniesieniu do pojęcia spójności, na powstałą możliwość precyzji w pojęciowym ujęciu terminu łuk. Przez powstałą, dzięki paradoksowi, kontrowersję między implikacjami płynącymi z definicji łuku oraz ujęciem intuicyjnym uzyskujemy lepszy wgląd w treść omawianego pojęcia oraz możność wysubtelnienia naszej intuicji geometrycznej.

Ostatni z omówionych paradoksów wskazuje na odmienność „natury" nieskończoności w porównaniu do skończoności. Mówi nam także o braku analogii (pod omawianym w paradoksie względem) między nieskończonością a skończonością.

5. Wnioski

Dokonajmy teraz krótkiego podsumowania przeprowadzonych rozważań. Jak widzieliśmy dwie główne sprawy zjawiają się tutaj. Pierwsza z nich dotyczy związku zachodzącego między intuicją a poznaniem dyskursywnym, druga zaś to problem adekwatnego poznawania rzeczywistości. Z powyższego widać, że pojawianie się paradoksów stanowi doskonały punkt wyjścia do cennych spostrzeżeń odnoszących się do omawianych zagadnień.

Rozpatrując związek między poznaniem dyskursywnym a intuicją można dojść do sformułowania następującego wniosku: Intuicja to cenne narzędzie heurystyczne. Nie może jednak ona rościć pretensji, by stanowić metodę dowodu jakiejkolwiek tezy. Dowodzić musimy drogą dyskursywną. Intuicja nadto może i powinna być kształcona. Dobrze wykształcona, subtelna intuicja jest bardzo pożądaną własnością w pracy naukowej. Wytycza ona bowiem wówczas właściwą drogę postępowania. Pozwala tym samym iść we właściwym kierunku, nie błąkać się po manowcach myśli. Intuicja niewykształcona warunku tego nie potrafi spełnić. Kształcenie intuicji, ogólnie mówiąc, przebiega w sposób klasyczny dzięki pojawianiu się sytuacji paradoksalnych.

Dalszy wniosek, jaki tu się nasuwa, odnosi się do precyzji pojęć. Dzięki pojawianiu się paradoksów otwiera się przed nami droga dojścia do coraz bardziej adekwatnego ujęcia definicyjnego pojęć pierwotnie danych nam tylko intuicyjnie.

[13] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 50 (1963), 1143—1148, 51(1964), 105—110. Por. także J. Mikusiński, O twierdzeniu Zorna, *Wiadomości Matematyczne* 9(1967), 227—228.

Dwa te podstawowe wnioski prowadzą, z kolei, do dalszych. Najpierw więc możemy widzieć tutaj wezwanie do ostrożności. I to w znaczeniu jak najbardziej ogólnym. Należy strzec się przed złudną „oczywistością", która po wnikliwszym zbadaniu wcale nie wydaje się tak bardzo „oczywista". Sądzimy, że przedstawione powyżej paradoksy usprawiedliwiają w pełni ten wniosek. Np. ostatni z paradoksów w tej pracy zreferowanych zaleca ostrożność przy posługiwaniu się analogią, kiedy przechodzimy od wielkości skończonych do nieskończonych. Nie wolno jest tej analogii suponować, należy jej dowieść, by móc logicznie poprawnie nią się posługiwać.

Wydaje się, że warto jest mocno podkreślić ostatni wniosek, będący zachętą do ostrożności. Nigdy ostrożności nie jest za wiele. Ładnym przykładem może tu służyć rozważanie J. R. Searle o strukturze wypowiedzi typu: (a) „Tulius = Tulius" i (b) „Tulius = Cicero". Zgodnie z obiegowym przekonaniem wypowiedź typu (a) wydaje się być analityczna. Będzie ona prawdziwa przy każdym podstawieniu symboli w miejsce wyrazu „Tulius". Natomiast wypowiedź typu (b) różni się istotnie od wypowiedzi typu (a). Otóż okazuje się, że tak nie jest. Obie wypowiedzi są analityczne. Ich prawdziwość wynika z przyjętych reguł językowych [14].

A drugi wniosek, to stwierdzenie zachodzenia dialektycznego związku między intuicją a poznaniem intelektualnym. Praktyka naukowa wskazuje, że rozwój wiedzy ludzkiej następuje przez wzajemne ścieranie się intuicji oraz ujęć intelektualnych. I jeden i drugi czynnik jest potrzebny. Każdy na swoim miejscu. Przez styk zarówno intuicji, jak i umysłu z rzeczywistością i przez zachodzący między nimi dialektyczny związek możemy docierać do coraz lepszego, pełniejszego, bardziej adekwatnego poznawania rzeczywistości. Ona jest i przedmiotem badań naukowych i ostateczną instancją rozstrzygającą o prawdziwości naszego poznania.

Naczalnyj kurs fiłosofii, Izdanie wtoroje dorabotannoje, Izdatelstwo „Mysl", Moskwa 1968.

Praca pt. „Naczalnyj kurs fiłosofii" stanowi uzupełnione wydanie „Elementarnego kursu filozofii" marksistowsko-leninowskiej. W podtytule zaznaczono, że podręcznik jest przeznaczony dla słuchaczy podstaw marksizmu i leninizmu. Jest to praca zbiorowa, napisana przez czterech filozofów radzieckich. Składa się z przedmowy, 13 rozdziałów i zakończenia. Przedmowę i zakończenie oraz rozdziały I, II, V,

[14] J. R. Searle, Imiona własne, w: Logika i język, Warszawa 1967, 523—525.