Mieczysław Lubański

Z problematyki dwoistości w naukach formalnych

Studia Philosophiae Christianae 5/2, 125-139

1969

Studia Philosophiae Christianae
ATK
5(1969)2

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

Z PROBLEMATYKI DWOISTOŚCI W NAUKACH FORMALNYCH, I

1. Wprowadzenie

Wiedza bywa porządkowana na różne sposoby. A także w rozmaitych znaczeniach. Np. można porządkować pewne wycinki wiedzy, można to czynić z całymi kompleksami nauk itd. Można również porządkować wiedzę według takiej czy innej zasady, np. według schematu ewolucjonistycznego. Wydaje się, że za jeden ze sposobów porządkowania wiedzy, i to sposób interesujący, należy uznać przyjęcie za podstawę we wspomnianych zabiegach pojęcia dwoistości. Pojęcie to już dawno wprawdzie zanotowała historia nauki. Nie można jednak powiedzieć, by się ono zestarzało i stało nieaktualne. Przeciwnie, dzisiaj przeżywa ono swój pełny rozkwit.

Pojęcie dwoistości może stanowić jednak nie tylko podstawę systematyzacji wiedzy, może ono także bardzo dobrze pełnić funkcję heurystyczną. Pozwala ono bowiem doszukiwać się dwoistości w operacjach dokonywanych w nauce, w wyrażeniach występujących w nauce, a nawet w całych teoriach naukowych. Historia nauki zna różnego rodzaju „dopatrywania się" dwoistości. Dostarcza jednocześnie licznych argumentów za celowością takiego postępowania oraz za jego naukową płodnością. Wymienione wyżej racje przemawiają za podjęciem problematyki związanej z dwoistością w nauce.

Celem tego artykułu jest przedstawienie bogactwa problematyki związanej z pojęciem dwoistości w naukach formalnych. Służyć to będzie następnie do rozpatrywaniu analogicznej problematyki w naukach realnych, w szczególności w fizyce, oraz w filozofii.

Obecna, pierwsza część artykułu, ogranicza się do przedstawienia różnych pojęć dwoistości występujących w logice. W charakterze prostych zastosowań omówiona będzie dwoistość w cybernatyce oraz w topologii ogólnej. Druga część artykułu zajmie się ex professo zagadnieniem dwoistości w matematyce.

2. Algebra Boole'a

Przypomnimy tutaj najpierw określenie algebry Boole'a wraz z podaniem jej aksjomatyki. Następnie omówimy pojęcie dwoistości w algebrze Boole'a. Wreszcie wskażemy na proste zastosowanie przedstawionych pojęć w cybernetyce.

2.1. Aksjomatyka algebry Boole'a

Zbiór B, złożony z elementów x, y, z, ... oraz dwu wyróżnionych elementów 0 oraz 1, łącznie z trzema działaniami określonymi i wykonalnymi w zbiorze B[1] a oznaczanymi przez —, ., +, nazywa się algebrą Boole'a, jeżeli spełnione są następujące aksjomaty:

(1+)	$0 + x = x$	(1·)	$1 \cdot x = x$
(2+)	$1 + x = 1$	(2·)	$0 \cdot x = 0$
(3+)	$x + -x = 1$	(3·)	$x \cdot -x = 0$

[1] Działanie — jest jednoargumentowe, działania + i · są dwuargumentowe.

(4+) $x + x = x$ (4·) $x \cdot x = x$
(5+) $x + y = y + x$ (5·) $x \cdot y = y \cdot x$
(6+) $x + (x \cdot y) = x$ (6·) $x \cdot (x + y) = x$
(7+) $x + (y + z) = (x + y) + z$
(7·) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(8+) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
(8·) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Jest rzeczą zrozumiałą, że —, +, ·, oznaczają jakieś operacje na elementach zbioru B. Nie należy sądzić, że są to działania arytmetyczne, bądź algebraiczne. Sens wspomnianych operacji określony jest przez wyżej podane aksjomaty. Można podać różne modele, różne interpretacje algebry Boole'a. Mówimy mianowicie, że zbiór złożony z jakichś elementów a_1, a_2, a_3, ... wraz z dwoma wyróżnionymi elementami b_0 i b_1 oraz trzema konkretnymi operacjami, określonymi i wykonalnymi w zbiorze Z, a oznaczanymi przez o_1, o_2, o_3, jest modelem algebry Boole'a, jeżeli po zastąpieniu elementów x, y, z, ··· przez elementy a_1, a_2, a_3, ···, elementów 0 i 1 przez b_0 i b_1 oraz działań —, +, · przez operacje o_1, o_2, o_3 aksjomaty algebry Boole'a stają się wszystkie zdaniami prawdziwymi. Znane są powszechnie następujące interpretacje algebry Boole'a: klasyczny rachunek zdań, algebra zbiorów, tzw. algebra sieci przekaźnikowych dwubiegunowych [2].

Prosty, lecz interesujący, jest przypadek tzw. dwuelementowej algebry Boole'a. Mamy z nią do czynienia wówczas, gdy zbiór B składa się tylko z elementów 0 oraz 1, zaś operacje —, +, · są określone identycznie, jak funktory negacji,

---

[2] Co do aksjomatyki algebry Boole'a por. A. Mostowski, Logika matematyczna, Warszawa — Wrocław 1948, 103 oraz A. Grzegorczyk, Zarys logiki matematycznej, Warszawa 1961, 186. O interpretacji „elektrycznej" zob. np. A. W. Mostowski, Algebry Boole'a i ich zastosowania, Warszawa 1964. Współcześnie algebra Boole'a jest działem matematyki bardzo obszernym i ważnym. Zob. np. R. Sikorski, Boolean Algebras, Berlin — Goettingen — Heidelberg 1960.

alternatywy i koniunkcji [3]. Tutaj 0 jest odpowiednikiem zdania fałszywego, zaś 1 — zdania prawdziwego.

Homomorfizmem algebry Boole'a B_1 w algebrę Boole'a B_2 nazywamy każde przekształcenie h zbioru B_1 w zbiór B_2, które zachowuje operacje algebr B_1 i B_2. Mówimy, zaś, że przekształcenie h zachowuje operacje, jeżeli obraz w B_2 danej operacji dokonanej w B_1 jest równy wynikowi odpowiadającej jej operacji w B_2, dokonanej na elementach przyporządkowanych elementom wyjściowym przez przekształcenie h. Wzorem można to wyrazić następująco:

$$h\,[o^1(x_1, \ldots, x_i)] = o^2[h(x_1), \ldots, h(x_i)]$$

gdzie o^1 oraz o^2 oznaczają odpowiednio operacje w algebrze B_1 i algebrze B_2, zaś „i" mówi nam iluargumentowane są powyższe operacje. Jasne jest, że muszą one posiadać tyle samo argumentów.

Jeżeli odwzorowanie h jest odwzorowaniem B_1 na cały zbiór B_2, to mówimy, że h jest homomorfizmem B_1 na B_2. Tego rodzaju homomorfizm przyjęło się nazywać także epimorfizmem. Homomorfizm algebry Boole'a w siebie nazywa się endomorfizmem.

Jeżeli odwzorowanie h, występujące w określeniu homomorfizmu, jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym między wszystkimi elementami zbioru B_1 i wszystkimi elementami zbioru B_2, to mówimy, że h jest izomorfizmem. Jeżeli h jest tylko odwzorowaniem różnowartościowym między zbiorami B_1 i B_2, to zwiemy je monomorfizmem. Widać stąd, że izomorfizm może być określony jako przekształcenie, które jest zarazem epimorfizmem i monomorfizmem. Oczywiście, przy określeniu izomorfizmu, jak i monomorfizmu, zakładamy, że odwzorowanie h jest homomorfizmem, a nie dowolnym przekształceniem spełniającym własność różnowartościowości. Musi więc mieć miejsce tzw. zachowanie operacji.

---

[3] Zob. np. H. Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, Warszawa 1968, 257.

2.2. Dwoistość w algebrze Boole'a

Aksjomaty algebry Boole'a zostały celowo podane w takiej postaci, która pozwoli łatwo sformułować „dwoistość" algebry. Co przez to się rozumie? Otóż chodzi o rzecz następującą. Jeżeli w aksjomatach algebry Boole'a zastąpilibyśmy symbole 0 oraz 1 i działania + oraz • wzajemnie przez siebie, wówczas każdy aksjomat oznaczony jakąś liczbą ze znakiem + przeszedłby na aksjomat oznaczony tą samą liczbą ze znakiem • i odwrotnie. Wynika więc stąd dalej, że z każdego twierdzenia algebry Boole'a można automatycznie otrzymać drugie twierdzenie tej algebry (jak się mówi „dwoiste" względem pierwszego) zastępując symbole 0 oraz 1 i operacje + oraz • wzajemnie przez siebie. Opisany właśnie przed chwilą fakt nosi nazwę zasady dwoistości w algebrze Boole'a.

Podamy teraz kilka przykładów stosowania zasady dwoistości. Dowodzi się, że w algebrze Boole'a zachodzą następujące twierdzenia:

$$-(x \cdot y) = -x + -y, \qquad x = x \cdot y + x \cdot -y$$

Dwoistymi do nich twierdzeniami będą wyrażenia:

$$-(x + y) = -x \cdot -y, \qquad x = (x + y) \cdot (x + -y) \cdot$$

Zauważmy, że wzory umieszczone w pierwszej kolumnie są ważnymi twierdzeniami algebry Boole'a noszącymi nazwę wzorów de Morgana [4]. Ich odpowiedniki występują także w logice, a więc i w rachunku zdań i w rachunku kwantyfikatorów.

Podobnie do wyrażenia

$$-(x \cdot y) = -(x \cdot y) \cdot (-x + -y)$$

wyrażenie dwoiste będzie miało postać

$$-(x + y) = -(x + y) + (-x \cdot -y) \cdot$$

Przykładów tego rodzaju można podawać dużo i to w sposób bardzo łatwy. Zasada postępowania jest jasna.

Z powiedzianego widzimy, że w algebrze Boole'a można mówić o wyrażeniach dwoistych. Każde tego rodzaju wyra-

---

[4] Co do samej nazwy praw por. T. Kotarbiński, Wykłady z dziejów logiki, Łódź 1957, 103 i 67.

żenie jest dwoiste względem jemu odpowiadającemu. Krótko mówiąc są one dwoiste względem siebie wzajemnie. Ale nie tylko to wynika z zasady dwoistości. Można także mówić o operacjach dwoistnych względem siebie. Konkretyzując, operacje $+$ oraz $\cdot$ są dwoiste względem siebie. Operacja $-$ może być uważana za dwoistą względem siebie samej. I jeszcze jedno. Elementy 0 oraz 1 także mogą być rozpatrywane jako dwoiste względem siebie. Reasumując powiemy, że zasada dwoistości odnośnie do algebry Boole'a pozwala mówić o elementach dwoistych, o eperacjach dwoistych i o wyrażeniach dwoistych. Przeto wyraz „dwoistość" nie jest wyrazem jednoznacznym.

Zauważmy jeszcze rzecz następującą. Mianowicie z definicji homomorfizmu wynika, że przekształca on wyrażenia, operacje i elementy wzajemnie dwoiste na obiekty tego samego rodzaju, pozostające nadal dwoistymi wzajemnie. W tym sensie można mówić, że dwoistość jest niezmiennikiem homorfizmu.

Przejdźmy obecnie do prostszych zastosowań przedstawionych wyżej pojęć w cybernetyce.

2.3. Zastosowanie do cybernetyki

W cybernetyce można mówić o dwu zasadach dwoistości. Pierwsza z nich odnosi się do tzw. układów pro-i retrospektywnych. Druga — do informacji i zasilenia.

Rozważmy najpierw pierwszą zasadę dwoistości. W tym celu przypomnijmy pewne określenia. Mówimy, że układ względnie odosobniony jest układem prospektywnym (krótko: układem PRO), jeżeli każda reakcja dowolnego wyjścia jest wyznaczona przez wcześniejsze i teraźniejsze bodźce wszystkich wejść. Zwiemy to krótko determinizmem lokalnym. Mówimy, że układ względnie odosobniony jest układem retrospektywnym (krótko: układem RETRO), jeżeli dowolny bodziec na wejściu jest wyznaczony przez teraźniejsze lub przyszłe reakcje wszystkich wyjść. Zwiemy to krótko paradeterminizmem lokalnym [5]. Okazuje się, że teorię układów względnie odosobnionych prospektywnych i retrospektywnych można zbudować w sposób dwoisty.

Dwoistość wspomnianą otrzymamy ustalając następującą odpowiedniość:

wejście — wyjście, bodziec — reakcja, determinizm lokalny — paradeterminizm lokalny.

Wówczas układy PRO i RETRO będą dwoiste względem siebie.

Formalny przekład wyrażeń z jednego układu w wyrażenia drugiego układu może być więc dokonywany przy pomocy następującego „słownika”: [6]

wyrażenia przekładane	wynik przekładu
wejście	wyjście
wyjście	wejście
bodziec	reakcja
reakcja	bodziec
determinizm lokalny	paradeterminizm lokalny
paradeterminizm lokalny	determinizm lokalny
PRO	RETRO
RETRO	PRO

Przejdźmy obecnie do drugiej zasady dwoistości. Jak już było wspomniane odnosi się ona do informacji i zasilenia. Wiadomo dobrze, że układy względnie odosobnione występujące w realnych warunkach zawierają dwa podstawowe elementy, które zwiemy informacją i zasileniem. Można więc konsekwentnie mówić o wejściach i wyjściach informacyjnych oraz o wejściach i wyjściach zasileniowych. Pozwala to odróżniać dwa podstawowe rodzaje układów: transformatory informacji i transformatory zasileń. Transformatorem informacji nazywamy układ prospektywny posiadający co najmniej jedno

---

[5] Zob. H. Greniewski i M. Kempisty, Cybernetyka z lotu ptaka, Książka i Wiedza, 1963, 21.

[6] Tamże 24.

zewnętrzne wejście zasileniowe, co najmniej jedno wejście informacyjne i wyjścia zewnętrzne tylko informacyjne. Zaś transformator zasileń to taki układ prospektywny, który posiada co najmniej jedno wejście zasileniowe zewnętrzne, co najmniej jedno wejście informacyjne i wyjścia zewnętrzne tylko zasileniowe [7]. Jest rzeczą widoczną, iż zastępując wejścia i wyjścia informacyjne wzajemnie przez wejścia i wyjścia zasileniowe, otrzymamy z transformatora informacji transformator zasileń i odwrotnie. Występuje tu więc wspomniana dwoistość między informacją i zasileniem. Widać wyraźnie, że schemat „dopatrywania się" dwoistości między informacją i zasilaniem jest izomorficzny z omówionym schematem dwoistości w algebrze Boole'a. To pozwala na formalne ujęcie dwoistości.

Aby wskazać na płodność naukową zasady dwoistości w cybernetyce, przypomnijmy, że jeśli zbudowalibyśmy ogólną teorię transportu, to teorią dwoistą byłaby do niej ogólna teoria łączności. Podobnie w stosunku do ogólnej teorii magazynu dwoistą byłaby ogólna teoria pamięci [8]. Można także mówić o wzajemnej dwoistości między tzw. obserwowaniem i realizowaniem. Obserwowanie byłoby tu odpowiednikiem informacji, zaś realizowanie odpowiednikiem zasilenia. Ciekawe jest, że istnieją układy dwoiste względem siebie samych. Zwiemy je samodwoistymi [9]. Tego typu układy są i filozoficznie interesujące.

3. Logika

Termin „logika" jest wieloznaczny. W tym artykule będziemy wspomniany termin rozumieć jako rachunek logiczny obejmujący dwie podstawowe teorie: logikę zdań (oczywiście mamy na myśli logikę dwuwartościową) i logikę kwantyfikatorów.

---

[7] Tamże 54.

[8] Tamże, 60.

[9] Tamże, 77.

3.1. Dwoistość w logice zdań

Ponieważ rachunek zdań można uważać za interpretację algebry Boole'a, przeto pojęcie dwoistości z algebry daje się automatycznie przenieść do logiki zdań. Jest więc sensowne mówienie o wyrażeniach dwoistych. A zasada dwoistości umożliwia otrzymywanie z danych tautologii, tautologii względem nich dwoistych.

Wygodną rzeczą jest posługiwanie się w logice zdań następującym prostym twierdzeniem o dwoistości. Daje się ono sformułować następująco:

Jeżeli $\vdash W_1 \rightarrow W_2$, to $\vdash W_2^d \rightarrow W_1^d$.

Jeżeli $\vdash W_1 \rightleftarrows W_2$, to $\vdash W_1^d \rightleftarrows W_2^d$.

Tutaj wskaźnik d u góry litery W oznacza wyrażenia dwoiste do wyrażenia W, zaś $\rightarrow$ jest znakiem implikacji, zaś $\rightleftarrows$ znakiem równoważności.

Powyższe twierdzenie o dwoistości pozwala np. z tautologii

$p \cdot q \rightarrow p$, $-(p + q) \rightleftarrows (-p \cdot -q)$, $p \cdot (q + r) \rightleftarrows (p . q + p . r)$

otrzymać tautologie

$p \rightarrow p + q$, $-(p \cdot q) \rightleftarrows (-p + -q)$,

$p + q \cdot r \rightleftarrows (p + q) \cdot (p + r)$.

Gdy idzie o dwoistość funktorów, to umawiamy się nazywać funktor n-argumentowany f dwoistym względem funktora n-argumentowego g, jeżeli tautologią jest następująca równoważność:

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \rightleftarrows -g(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n).$$

Jak łatwo sprawdzić, z funktorów jednoargumentowych dwoistym względem samego siebie jest tylko funktor negacji. Wśród 16 funktorów dwuargumentowych występuje 10 par funktorów dwoistych, w tym 4 pary funktorów dwoistych względem siebie samych. Ze znanych dobrze funktorów dwuargumentowych alternatywa jest dwoista względem koniunkcji, jednoczesne zaprzeczenie Łukasiewicza jest dwoiste względem dyzjunkcji Sheffera.

3.2. Dwoistość w logice kwantyfikatorów

Powiemy, że tautologie rachunku kwantyfikatorów są dwoiste, jeżeli zamieniając duży kwantyfikator i funktor koniunkcji przez mały kwantyfikator i funktor alternatywy wzajemnie przez siebie, otrzymamy z jednej tautologii — drugą.

Przykładami wspomnianego zabiegu „dwoistości" mogą służyć prawa de Morgana dla logiki kwantyfikatorów oraz tzw. tautologie dotyczące rozdzielności. Oto one:

$$\vdash -\left[\bigwedge_x \phi(x)\right] \rightleftarrows \bigvee_x\left[-\phi(x)\right]$$
$$\vdash -\left[\bigvee_x \phi(x)\right] \rightleftarrows \bigwedge_x\left[-\phi(x)\right]$$
$$\vdash \bigwedge_x\left[\phi(x)\cdot\psi(x)\right] \rightleftarrows \left[\bigwedge_x \phi(x)\right]\cdot\left[\bigwedge_x \psi(x)\right]$$
$$\vdash \bigvee_x\left[\phi(x)+\psi(x)\right] \rightleftarrows \left[\bigvee_x \phi(x)\right]+\left[\bigvee_x \psi(x)\right]$$

Bez trudu widać, że postępując w opisany sposób z jednej tautologii otrzymujemy drugą i odwrotnie.

Tautologie są specjalnego rodzaju wyrażeniami sensownymi logiki kwantyfikatorów. Zatem wolno jest mówić o dwoistości wyrażeń rachunku kwantyfikatorów. Nietrudno jest zauważyć, że dwoistość ma miejsce także między samymi kwantyfikatorami, duży i mały kwantyfikator są względem siebie dwoiste. Nie budzi zaś najmniejszej wątpliwości powiedzenie, że negacja jest dwoista względem samej siebie, zaś alternatywa i koniunkcja są dwoiste między sobą.

Logika zdań może być uważana za szczególny przypadek logiki kwantyfikatorów. Stąd to wszystko, co się odnosiło do pojęcia dwoistości w rachunku zdań będzie słuszne i mutatis mutandis dla rachunku kwantyfikatorów. W tym ostatnim jednak rachunku logicznym mamy do czynienia z występowaniem tego rodzaju dwoistości, o której nie ma mowy w logice zdań. Chodzi mianowicie o dwoistość wśród tautologii zawierających kwantyfikatory. Ta ostatnia dwoistość jest niezbędna przy bogatszych teoriach, np. w topologii ogólnej, o czym będziemy mówić za chwilę.

3.3. Zastosowanie do topologii ogólnej

W celu przedstawienia wspomnianego zastosowania przypominamy najpierw definicję przestrzeni topologicznej.

Mówimy mianowicie, że zbiór P jest przestrzenią topologiczną, jeżeli wyróżniona jest w nim klasa podzbiorów (zwanych zbiorami otwartymi), która spełnia następujące trzy warunki:

1° Zbiór pusty i cała przestrzeń są zbiorami otwartymi.

2° Część wspólna dwu (a więc skończonej liczby) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

3°Suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Przyjmuje się następujące określenie: Zbiór X, którego uzupełnienie do całej przestrzeni P jest zbiorem otwartym, nazywamy zbiorem domkniętym. Z tej definicji oraz z warunków 1°, 2°, 3° na podstawie praw de Morgana otrzymujemy warunki postaci:

1) Zbiór pusty i cała przestrzeń są zbiorami domkniętymi.

2) Suma dwu (a więc skończonej liczby) zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

3) Część wspólna dowolnie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Widzimy więc, że każde twierdzenie otrzymane z warunków 1°, 2°, 3° posiada swój „dwoisty" odpowiednik w twierdzeniu, otrzymanym na podstawie warunków 1), 2), 3). Nerwem przekładu są tu prawa de Morgana. Formalnie biorąc otrzymujemy z jednego typu twierdzenia twierdzenie dwoiste względem niego przez zastąpienie zbiorów otwartych i domkniętych wzajemnie przez siebie oraz operacji brania części wspólnej i brania sumy także wzajemnie przez siebie. Zwróćmy uwagę, że odpowiednikiem tezy głoszącej, że suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym jest teza głosząca, że część wspólna dowolnej ilości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Natomiast nie jest prawdą, że suma dowolnej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, ani że część wspólna dowolnej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Łatwo można podać przykłady takich układów zbiorów, aby suma nieskończenie wielu zbiorów domkniętych nie była zbiorem domkniętym oraz część wspólna nieskończenie wielu zbiorów otwartych nie była zbiorem otwartym [10].

Omówiona wyżej sytuacja, zachodząca w topologii ogólnej, nosi właśnie nazwę dwoistości topologii. Można tutaj, podobnie jak w poprzednio rozpatrywanych przypadkach, mówić zarówno o dwoistości wyrażeń, twierdzeń, operacji, pojęć. Dwoistymi więc byłyby pojęcia zbioru domkniętego i zbioru otwartego, dwoistymi byłyby więc operacje brania sumy zbiorów i brania części wspólnej, dwoistymi byłyby odpowiednio warunki 1°, 2°, 3° w stosunku do warunków 1), 2), 3). Tu mielibyśmy do czynienia z dwoistością tez.

Należy zaznaczyć, że dwoistość w topologii ogólnej nie ogranicza się do uwag wyżej podanych. Można mówić o dwoistości przy klasyfikacji Borela. W tym wypadku bowiem istnieją dwie postaci klasyfikacji borelowskiej, w oparciu o zbiory otwarte i w oparciu o zbiory domknięte. Nie wchodzimy jednak w to zagadnienie z racji czysto technicznych. Sygnalizując je chcemy jedynie wskazać na dalsze możliwe tu stosowanie zasady dwoistości. Sądzimy, że zamieszczone w tym artykule przykłady dostatecznie wyraźnie wskazały na sens i ważność pojęcia dwoistości.

4. Podsumowanie

Z przedstawionych uwag nasuwają się następujące wnioski. Po pierwsze widzimy, że pojęcie dwoistości jest pojęciem wieloznacznym. Można je odnosić i do wyrażeń danej dziedziny wiedzy i do operacji tam wykonywanych, jak i do pojęć względnie przedmiotów w niej występujących. Oprócz tego

---

[10] Zob. np. K. Kuratowski, Wstęp do teorii mnogości i topologii, Warszawa 1962 oraz R. Engelking, Zarys topologii ogólnej, Warszawa 1968.

rodzaju obiektów dwoistych jest sensowne mówienie o zasadzie dwoistości, która obowiązuje w danej dziedzinie wiedzy. Zasada dwoistości jak gdyby łączy wymienione rodzaje obiektów dwoistych w pewną harmonijną całość. To łączenie daje pewien kompleks wyrażeń ściśle ze sobą powiązanych.

Po drugie należy powiedzieć, że zasada dwoistości jest naukowo wartościowa. Dzięki niej uzyskujemy ekonomię wysiłku. Możemy bowiem z jednej grupy twierdzeń otrzymywać niemal automatycznie drugą grupę twierdzeń. Ale nie tylko ekonomia usprawiedliwia ważność zasady dwoistości. Kierując się tą zasadą jako tezą heurystyczną, wnikamy głębiej w strukturę danej teorii naukowej. Możemy odkryć ciekawe fakty. A to jest bardzo ważne i z punktu widzenia czysto naukowego, jak i metodologicznego oraz filozoficznego.

W naturalny sposób powstaje tutaj pytanie jaki jest związek pojęcia dwoistości z pojęciem symetrii. To ostatnie jest ważnym pojęciem przyrodoznawstwa (i nie tylko przyrodoznawstwa). Ciekawe wydaje się zbadanie bliższe tego problemu. Sygnalizując to zagadnienie chcieliśmy jeszcze w jeden sposób wskazać na liczne powiązania problematyki dwoistości z naukowo ważnymi pojęciami i teoriami oraz wypunktować jej rangę i naukową i filozoficzną.

Zur Dualitätsproblematik der formalen Wissenschaften, I

Der Artikel beschäftigt sich mit dem Begriff der Dualität in Boole'schen Algebra und Logik und mit seiner Anwendungen in Kybernetik und Allgemeinen Topologie. Der zweite Teil des Artikels die Dualität in Mathematik durcharbeiten wird.

Die Axiomen der Boole'schen Algebra man kann wie nachstehend verzeichnen:

(1+) $0 + x = x$

(1.) $1 \cdot x = x$

(2+) $1 + x = 1$

(2.) $0 \cdot x = 0$

(3+) $x + -x = 1$

(3.) $x \cdot -x = 0$

(4+) $x + x = x$
(4.) $x \cdot x = x$
(5+) $x + y = y + x$
(5.) $x \cdot y = y \cdot x$
(6+) $x + (x \cdot y) = x$
(6.) $x \cdot (x + y) = x$
(7+) $x + (y + z) = (x + y) + z$
(7.) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(8+) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
(8.) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Hier — die einstellige und $+$, $\cdot$ die mehrstellige Operationen bedeuten. Diese Operationen für die Elemente x, y, z, • • • der Boole'schen Algebra definiert sind. 0 und 1 die ausgezeichnete Elemente der Algebra sind.

Wenn man in Axiomen der Boole'schen Algebra die Symbole 0 und 1 und die Operationen $+$ und $\cdot$ verwechselt, dann jeder Axiom welcher mit einer Zahl mit dem Zeichen $+$ versehen ist, in den Axiom mit dieser Zahl aber mit dem Zeichen $\cdot$ übergehen wird. Das bedeutet, dass aus jedem Theorem auch ein Theorem entsteht, wenn man im ersten die Symbole 0 und 1 und die Operationen $+$ und $\cdot$ verwechselt. Dieses Faktum das sogenannte Dualitätsprinzip der Boole'schen Algebra heisst. Man kann also in Boole'schen Algebra von den dualen Ausdrücken, Operationen und Elemente sprechen.

Dieser Sprachgebrauch eine Verwendung in der Kybernetik besitzt. Nämlich die Theorie der sogenannten PRO und RETRO — Systeme dual ist. Zu diesem Zweck genügt die Übersetzung: Eingang — Ausgang, Rezeptor — Effektor, Lokaldeterminismus — Lokalparadeterminismus, annehmen. Die zweite Dualität den Platz zwischen Information und Regelung nehmt.

Ähnlich zur Dualität in der Boole'schen Algebra, mögen wir über die Dualität in Aussagen — und Prädikatenlogik sprechen. Hier kann man auch die duale logische Ausdrücke. Funktoren und Operatoren unterscheiden.

Benutzt man die von de Morgan Gesetze, so kann man die Theorie der topologischen Räume in zwei dualen Formen treiben. Die eine Form von dem Begriff der offenen, die zweite von dem der abgeschlossenen Mengen geht aus. Die Axiomatik der topologischen Räume ist wie folgende: 1° Die leere Menge und der ganze Raum sind offene Mengen, 2° Der Durchschnitt zwei offenen Mengen ist eine offene Menge, 3° Die Summe der geliebig vielen offenen Mengen ist eine offene Menge. Man muss achten, dass die duale Form zum Theorem:

Die Summe der geliebig vielen offenen Mengen ist eine offene Menge, die folgende Gestalt: Der Durchschnitt der geliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist eine abgeschlossene Menge, hat.

Man kann also in der Boole'schen Algebra und Logik sowohl über dem Dualitätsprinzip, als auch über die dualen Ausdrücken, Operationen und Objekte sprechen.