Mieczysław Lubański

Z problematyki dwoistości w naukach formalnych II

Studia Philosophiae Christianae 6/2, 45-67

1970

Studia Philosophiae Christianae
ATK
6(1970)2

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

Z PROBLEMATYKI DWOISTOŚCI W NAUKACH FORMALNYCH (II)

1. Uwagi wstępne

Od dawna już istnieje kontrowersja na temat relacji zachodzących między logiką a matematyką. Gdy idzie o zakresowe ujmowanie problemu, to w tym sporze można wyróżnić, biorąc rzecz historycznie, trzy stanowiska. Pierwsze głosi, że logika i matematyka są różnymi naukami, jednak posiadają one część wspólną niepustą, tzn. istnieją takie elementy, które należy jednocześnie zaliczyć i do logiki i do matematyki. Drugie uważa, że matematyka jest częścią logiki, trzecie natomiast twierdzi przeciwnie, że logika jest fragmentem matematyki. Opisana rozbieżność stanowisk zwiększa się jeszcze gdy uwzględnimy pogląd, który utożsamia logikę i matematykę, uważając je za jedną i tę samą naukę [1].

[1] Zwolennikiem tego rodzaju poglądu jest np. B. Russell. Zob. jego Wstęp do filozofii matematyki, Warszawa 1958 oraz argumentację, ma-

Jednakże pomimo istnienia wspomnianej przed chwilą kontrowersji odnoszącej się do związku, jaki ma miejsce między logiką a matematyką, podchodząc do tej problematyki od strony faktycznej, należy stwierdzić, że odróżnia się i logikę i matematykę jako nauki różne (przynajmniej w znaczeniu praktyki naukowej), nie przesądzając wcale o tym co wchodzi w skład ich części wspólnej. Z tego względu nie będzie pozbawione sensu wyróżnianie wśród nauk formalnych logiki oraz matematyki. Taką przecież terminologię stosuje się powszechnie. Wolno więc skorzystać z istniejącego zwyczaju językowego, nie opowiadając się tym samym za jednym z wymienionych stanowisk, nie wchodząc więc w rozważania dotyczące „istoty" logiki i matematyki. Nie jest bowiem to potrzebne dla celów, które przyświecają tej pracy.

Pierwsza część artykułu [2] sygnalizowała istotę problematyki związanej z pojęciem dwoistości w logice. Obecna, część druga, zarysuje podstawowe elementy zagadnienia dwoistości w matematyce. Zwrócona będzie tu uwaga głównie na algebrę abstrakcyjną, na geometrię rzutową oraz na analizę funkcjonalną. Zostały wybrane te działy matematyki ze względu na ich dość znaczną różnorodność oraz z racji na ich prostotę z logicznego punktu widzenia.

2. Dwoistość w algebrze abstrakcyjnej

W algebrze można odróżnić jej działy klasyczne oraz nowoczesne. Wśród nowoczesnych działów algebry rozwija się obecnie bardzo tzw. algebra abstrakcyjna.[3] Badane są w niej twory

jącą przemawiać za słusznością głoszonej przez niego tezy, zawartą na stronach 284—285.

[2] Z problematyki dwoistości w naukach formalnych, I, *Studia Phil. Christ.*, 5 (1969), Nr 2, 125—139.

[3] Por. np. A. G. Kurosz, Multioperatornyje kolca i algebry, Uspiechi matematiczeskich nauk, 24 (1969), wyp. 1, 3—15 oraz P. M. Cohn, Uniwersalnaja algebra, Moskwa 1968.

zwane algebrami. Łącznie z nimi występuje tam także pojęcie kategorii. Ono wydaje się być fundamentalne dla współczesnej matematyki. Toteż przypomnimy je tutaj i na jego tle przedstawimy problematykę dwoistości. Przedtem jednak poświęcimy kilka chwil uwagi sprawie terminologicznej odnoszącej się do rozumienia zwrotów: „zbiór" oraz „klasa".

2.1. Klasy i zbiory

Przed stu laty zaczęły się ukazywać prace G. Cantora, które zapoczątkowały nowy dział matematyki, teorię mnogości. Występujące tam pojęcie zbioru było ujmowane początkowo w sposób intuicyjny. Doprowadziło to jednak do antynomii. Toteż powstały wysiłki badaczy, aby ściśle sprecyzować pojęcie zbioru tak, by pojawianie się antynomii stało się niemożliwe. Jedną z dróg, które prowadziły do tego celu, stało się zaksjomatyzowanie teorii mnogości. Pierwszą aksjomatykę wspomnianej teorii podał E. Zermelo na początku obecnego stulecia. Współcześnie jesteśmy świadkami istnienia wielu różnych systemów aksjomatycznych teorii mnogości. Do tej pory nie można powiedzieć, by sprawa znalezienia najdoskonalszej postąci dla aksjomatyki teorii mnogości była już zakończona. Wśród wspomnianych wielu różnych układów aksjomatów, z interesującego nas punktu widzenia, należy wyróżnić dwie podstawowe grupy. Do jednej zaliczyć wypada aksjomatykę typu Zermelo-Fraenkla, do drugiej zaś — aksjomatykę typu Goedla-Bernaysa. Pierwsza ze wspomnianych aksjomatyk posługuje się jako pojęciami pierwotnymi pojęciem „zbioru" i pojęciem „przynależności elementu do zbioru". W aksjomatykach drugiego rodzaju w miejsce pojęcia „zbioru" używa się szerszego pojęcia „klasy". Jeśli więc przyjmiemy drugi schemat aksjomatyki teorii mnogości, to w ramach jednolitej teorii należy odróżniać zbiory od klas.

Wyrażając się poglądowo powiemy, że „klasa" jest to dowolny zespół jakichkolwiek przedmiotów. Przedmioty, które wchodzą w skład danej klasy zwiemy jej elementami. „Zbiorem" natomiast nazywać będziemy taką klasę, która jest elementem jakiejś innej klasy. A zatem, jeżeli A jest klasą, to powiemy, że jest ona zbiorem wtedy i tylko, gdy istnieje taka klasa B, że klasa A jest jej elementem. Przeto, zgodnie z przyjętą terminologią, każdy zbiór jest klasą, nie każda natomiast klasa jest zbiorem. Np. klasa wszystkich zbiorów nie jest zbiorem. Wynika to z rozumowania, które prowadzi do antynomii Russella [4]. Wychodząc z pojęcia klasy można określić pewne nowe pojęcia i operacje na klasach. Np. pojęcie klasy pustej, pojęcie klasy pełnej, operację sumowania klas, operację brania przecięcia klas itp. W oparciu o przyjęte aksjomaty można np. wykazać, że klasa pełna nie jest zbiorem.

Na podstawie powiedzianego wyżej odróżniać więc będziemy klasy od zbiorów. Jest to wygodne i właściwe dla uwypuklenia pewnych typów kategorii. W literaturze matematycznej, gdzie ważne są rozważania charakteru logicznego oraz struktury logicznej występujących pojęć i konstrukcji, tego rodzaju terminologia jest stosowana coraz powszechniej. Nie jest to kwestia jedynie wygody terminologicznej. Bez żadnej przesady można powiedzieć, że rozwijające się badania w zakresie algebry abstrakcyjnej, szczególnie pojawienie się teorii kategorii, zmusiło niejako badaczy do odróżniania klas (jako pojęcia szerszego) od zbiorów.[5]

2.2. Definicja kategorii

Kategoria jest to pewien twór złożony z „obiektów" oraz „morfizmów", które mogą być „mnożone". Zatem kategoria składa się z dwojakiego rodzaju przedmiotów. Jedne są zwane obiektami, drugie — morfizmami. Nadto w kategorii ma miejsce pewnego rodzaju operacja zachodząca między ostatnimi wy-

[4] Zob. np. P. M. Cohn, Uniwersalnaja ałgebra, Moskwa 1968, 15.

[5] Zob. np. S. Mac Lane, Gomołogija, Moskwa 1966, 40—41 a także G. Choquet, Analiza i Bourbaki, *Wiadomości Matematyczne* 7 (1963—1964), 107—108.

mienionymi przedmiotami, która jest krótko nazywana mnożeniem. Działanie to ma spełniać pewne proste warunki, które zwiemy aksjomatami teorii kategorii.

Po tym intuicyjnym wyjaśnieniu pojęcia kategorii, przejdźmy obecnie do ścisłej definicji.

Powiemy więc, że klasa obiektów A, B C, ..., łącznie z

(1) rodziną parami rozłącznych zbiorów Hom (A, B), przy czym każdej parze obiektów A, B odpowiada dokładnie jeden zbiór Hom (A, B),

(2) funkcją określoną dla każdych trzech obiektów A, B, C, która elementom a ε Hom (A, B) oraz b ε Hom (B, C) przyporządkowuje element ba ε Hom (A, C),

(3) funkcją przyporządkowującą każdemu obiektowi A element 1_A ε Hom (A, A),

jest kategorią, jeżeli spełnione są następujące dwa aksjomaty:

(A_1) Aksjomat jedności: jeśli a ε Hom (A, B), to $a1_A = a = 1_Ba$,

(A_2) Aksjomat łączności: jeżeli a ε Hom (A, B) oraz b ε Hom (B, C) i c ε Hom (C, D), to c (ba) = (cb)a.

Klasę złożoną z obiektów A, B, C, ... oznaczamy zwykle literą K, zaś elementy a, b, c, ... zwiemy morfizmami. Mamy więc do czynienia z kategorią K, złożoną z obiektów A, B, C, ... oraz morfizmów a, b, c, ... Jeżeli klasa obiektów kategorii K jest zbiorem to kategorię tę zwiemy małą [6].

Wprowadźmy jeszcze pewne proste pojęcia oraz niektóre terminy przydatne w dalszej części tej pracy.

Jeżeli mamy daną kategorię K, to klasę wszystkich jej obiektów oznaczamy przez ObK, zaś klasę wszystkich jej morfizmów — przez HomK. Jeżeli a ε Hom (A, B), to będziemy pisać także a: A→B i mówić będziemy, że morfizm a jest skierowany od A do B. W tym przypadku zwać będziemy również obiekt A dziedziną, zaś obiekt B — przeciwdziedziną morfizmu a.

[6] Por. S. Lang, Ałgebra, Moskwa 1968, 39—44, S. Mac Lane, Gomołogija, Moskwa 1966, 40—41, P. M. Cohn, Uniwersalnaja ałgebra, Moskwa 1968, 49—51.

Morfizm k nazywamy jednością kategorii K, jeżeli ka = a, zawsze gdy tylko iloczyn ka jest określony, oraz jeżeli bk = b, zawsze gdy tylko iloczyn bk jest określony. Jest zrozumiałe, że morfizm 1_A jest jednością kategorii K. Ale i odwrotnie. Jeżeli k jest jednością kategorii K, to wówczas k: A→A dla pewnego obiektu A kategorii K. Przeto k = $k1_A$ = 1_A. To oznacza, że każda jedność kategorii K pociąga postać 1_A dla pewnego jednoznacznie określonego obiektu A. Innymi słowy ma miejsce odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między obiektami kategorii K a klasą jej morfizmów, będących jednościami. Konsekwentnie więc kategoria K jest określona całkowicie przez klasę wszystkich swoich morfizmów.

Klasę L nazywamy podkategorią kategorii K, jeżeli L składa się z takich podklas klas ObK oraz HomK (oznaczonych przez ObL oraz HomL), że spełnione są następujące warunki:

(L_1) Jeżeli A ε ObL, to 1_A ε HomL.

(L_2) Jeżeli a, b ε HomL oraz iloczyn ab jest określony w kategorii K, to ab ε HomL.

(L_3) Jeżeli a ε HomL oraz a: A→B, to A, B ε ObL.

Słowami można to wyrazić mniej więcej następująco: Warunek (L_1) mówi, że klasy ObL oraz HomL są wybrane „dobrze". Znaczy to, iż przynależności elementu A do podklasy ObK odpowiada przynależność elementu 1_A do podklasy HomK i odwrotnie. Warunek (L_2) mówi, iż działanie mnożenia na morfizmach wziętych z HomL nie wyprowadza poza tę klasę. Klasa HomL jest więc, jak to się mówi, zamknięta ze względu na operację mnożenia morfizmów. Warunek ostatni orzeka, że morfizm wzięty z klasy HomL działa na elementach, które należą do ObL.

Niech dane będą dwie kategorie K oraz K'. Odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne a→a, między klasami HomK oraz HomK' nazywać będziemy izomorfizmem kategorii K na kategorię K', jeżeli iloczyn ab jest określony wtedy i tylko, gdy jest określony iloczyn a'b' przy czym ma być spełniony warunek: (ab)' = a'b'.

Odwzorowanie wzajemne jednoznaczne a→a' między klasami

HomK, oraz HomK' nazywać będziemy antyizomorfizmem, jeżeli iloczyn ab jest określony wtedy i tylko, gdy jest określony iloczyn b'a', przy czym spełniony jest warunek (ab)' = = b'a'.[7]

2.3. Przykłady kategorii

Podamy obecnie, dla ilustracji, kilka prostych przykładów kategorii.

1) Kategoria zbiorów. Obiektami są t uwszystkie zbiory, natomiast morfizmami — wszystkie przekształcenia jednego zbioru w drugi. „Mnożenie" morfizmów rozumie się tu jako branie superpozycji przekształceń. Jednością jest odwzorowanie tożsamościowe. Łatwo sprawdzić, że wszystkie warunki wymagane dla kategorii zostaną w ten sposób spełnione. Aksjomaty kategorii, przy tak rozumianych operacjach, stają się zdaniami prawdziwymi. Przeto mamy do czynienia z kategorią.

2) Kategoria grup. W tym przypadku obiektami są wszystkie grupy, zarówno abelowe, jak i nieabelowe. Natomiast morfizmami są wszystkie homomorfizmy jednej grupy w drugą. Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, łatwo jest sprawdzić, że przy tak wziętej klasie obiektów oraz morfizmów mieć będziemy do czynienia z kategorią.

3) Kategoria przestrzeni topologicznych. Za obiekty uważamy wszystkie przestrzenie topologiczne. Morfizmami zaś są wszystkie przekształcenia ciągłe jednej przestrzeni w drugą. Ponieważ superpozycja dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, przeto widzimy, że wymienione obiekty oraz morfizmy spełniają warunki wymagane dla kategorii. Jednością kategorii jest oczywiście przekształcenie tożsamościowe dowolnego obiektu (tj. dowolnej przestrzeni topologicznej) na siebie.

4) Kategoria grup przemiennych. Obiektami są tu wszyst-

---

[7] Por. np. P. M. Cohn, op, cit., 50—51 a także S. Mac Lane, op. cit., 44.

kie grupy abelowe. Morfizmami zaś — homomorfizmy grup abelowych w siebie.

5) Kategoria zbiorów uporządkowanych. Tutaj obiektami są zbiory uporządkowane, morfizmami zaś — homomorfizmy monotoniczne. Przypominamy tu, że jeżeli mamy dane dwa zbiory uporządkowane A oraz B, to przekształcenie f: A → B nazywa się homomorfizmem monotonicznym wtedy i tylko, gdy zachowuje ono relację porządku, tzn. jeśli element x poprzedza element y w zbiorzeA, to wówczas obraz elementu x przy przekształceniu f poprzedza obraz elementu y przy przekształceniu f.

Obecnie przejdziemy do omówienia zagadnienia dwoistości w teorii kategorii.

2.4. Dwoistość w teorii kategorii

Niech dana będzie jakaś kategoria K. Rozważmy dowolną tezę T kategorii K. Przypuśćmy, że w tezie T dokonamy następujących przekształceń. Iloczyn ab zamieniamy na iloczyn ba zamieniając jednocześnie dziedzinę i przeciwdziedzinę danych morfizmów oraz kierunek morfizmu na przeciwny. Tak postępujemy ze wszystkimi morfizmami. Wówczas tak otrzymaną tezę T& nazywamy tezą dwoistą względem tezy T.

Bez trudu można spostrzec, że wyrażenie dwoiste do aksjomatu teorii kategorii przechodzi znowu w aksjomat kategorii. Wynika stąd, że można mówić o dwoistości dowodu w teorii kategorii. Przeto rozumowanie dwoiste do danego stanowi zarazem dowód dla tezy dwoistej do danej. Chodzi tu, oczywiście, o rozumowania oparte wyłącznie na aksjomatach kategorii. W przeciwnym przypadku nie zawsze wyrażenie dwoiste do tezy musi być tezą, co jest zrozumiałe.

Jeżeli mamy daną kategorię K, to można zbudować kategorię dwoistą względem danej. Postępuje się tu następująco: Kategorię dwoistą do danej kategorii K oznaczać będziemy przez K&. Za obiekty kategorii K& uważać będziemy pewne obiekty A& znajdujące się w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej z obiektami A kategorii K. Notujemy to tak: A&←→A. Za morfizmy kategorii K& weźmiemy klasę elementów a& znajdujących się w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej z morfizmami a kategorii K. Zapisujemy to: a&←→a. Zakładamy ponadto, że warunek a&: A&→B& zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek a: B→A, oraz iloczyn a& b& jest określony wtedy i tylko wtedy gdy określony jest iloczyn ba, przy czym ma miejsce również a&b& = = (ba)&. Wówczas K& jest, jak łatwo sprawdzić, kategorią. Nazywamy ją kategorią dwoistą względem kategorii K.

Rozważmy teraz kategorię K. I weźmy pod uwagę jakąś jej tezę T. Niech T& oznacza tezę dwoistą do danej kategorii K. Wówczas tezą dwoistą do tezy T& w kategorii K& będzie, co jest widoczne, teza T.

W ten sposób mówić możemy w teorii kategorii o operacjach dwoistych, o twierdzeniach dwoistych oraz o kategoriach dwoistych. Dwoistość ma więc miejsce w zakresie samej kategorii oraz między nimi. Można by więc, konsekwentnie, rozważać klasy wyrażeń i operacji dwoistych wewnątrz pewnej ustalonej kategorii, jak również rozważać klasę wszystkich kategorii względem siebie dwoistych.

Zauważmy jeszcze, że posługując się pojęciem antyizomorfizmu, należy powiedzieć, że ma on miejsce między kategoriami K oraz K&. Zatem kategoria K& jest antyizomorficzna z kategorią K. Ogólnie zachodzi związek następujący: Kategoria K' jest antyizomorficzna z kategorią K wtedy i tylko wtedy, gdy kategoria K' jest izoformiczna z dwoistą kategorią K& [8].

Ta ostatnia uwaga pozwala krótko określić kategorię dwoistą względem danej kategorii K. Wystarczy mianowicie powiedzieć, że K& składa się z morfizmów kategorii K z tym tylko, iż mnożenie ich jest określone wzorem: a&b = ba wtedy i tylko gdy jest określona strona prawa powyższej równości.

---

[8] Por. np. S. Mac Lane, op. cit., 43—44 oraz P. M. Cohn, op. cit., 52.

O klasie obiektów można tu nie wspominać, gdyż, jak to było zaznaczone wyżej (§ 2.2.), kategoria jest określona przez klasę wszystkich swoich morfizmów.

Można, oczywiście, mówić także o kategoriach dwoistych względem siebie samych. Kategorię K nazywać będziemy dwoistą względem siebie samej jeżeli jest ona izomorficzna z kategorią dwoistą względem niej. Notujemy to: $K = K^{\&}$. Jako przykład kategorii dwoistej względem siebie samej można wymienić kategorię wszystkich zbiorów omówioną wyżej w poprzednim paragrafie.

3. Dwoistość w geometrii rzutowej

Przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa jest to zbiór punktów, będących układami uporządkowanymi n liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_n)$, przy czym odległość między dwoma takimi punktami jest określona znanym wzorem jak pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów różnic współrzędnych. Natomiast punktem przestrzeni rzutowej n-wymiarowej jest układ uporządkowany złożony z $n + 1$ liczb rzeczywistych $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ jednocześnie nie będących zerami. Nadto utożsamia się ze sobą układy proporcjonalne. Punkt posiadający zerową współrzędną równą liczbie zero nazywa się punktem niewłaściwym przestrzeni rzutowej. Jak wiadomo może on być utożsamiony z kierunkiem pewnej prostej. Jeżeli do zwykłej prostej euklidesowej dołączymy odpowiadający jej punkt niewłaściwy (punkt w nieskończoności), to otrzymamy tzw. prostą rzutową. Jeżeli w opisany sposób uzupełnimy przestrzeń euklidesową n-wymiarową punktami niewłaściwymi, to otrzymamy przestrzeń rzutową n-wymiarową. Oznaczać ją będziemy P_n. W szczególności przez P_2 oznaczamy płaszczyznę rzutową; a zatem jest to przestrzeń dwuwymiarowa powstała z płaszczyzny euklidesowej przez dołączenie do niej punktów niewłaściwych, czyli punktów w nieskończoności. Mówiąc obrazowo płaszczyzna rzutowa składa się z płaszczyzny euklidesowej, do której dodano jeszcze jedną prostą w nieskończoności, tzw. prostą niewłaściwą.

Zgodnie z tzw. programem z Erlangen F. Kleina (1872) przez geometrię danej przestrzeni rozumiemy teorię niezmienników pewnej grupy przekształceń. Jest zrozumiałe, że im obszerniejsza jest klasa przekształceń, tym węższa jest klasa ich niezmienników. I otóż przez geometrię przestrzeni P_n rozumiemy teorię niezmienników odwzorowań rzutowych. Zwiemy ją krótko geometrią rzutową. W szczególności możemy mówić o geometrii płaszczyzny rzutowej P_2.

Rozważmy formę liniową postaci: $a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = = 0$. Tutaj $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są ustalonymi liczbami, zaś x_0 $x_1 \ldots, x_n$ to współrzędne zmiennego punktu w przestrzeni P_n. Pamiętamy, że zawsze mamy tu do czynienia z równością w sensie proporcjonalności, tj. utożsamiamy układy liczb do siebie proporcjonalnych. Układ liczb $a_0, a_1, \ldots, a_n$ można interpretować dwojako, mianowicie bądź jako zwykły punkt w przestrzeni P_n, bądź jako pewną hiperpłaszczyznę n-l wymiarową przestrzeni rzutowej P_n. Opisany przed chwilą punkt oraz odpowiadającą mu hiperpłaszczyznę nazywamy tworami dwoistymi przestrzeni rzutowej n-wymiarowej P_n. Jeżeli w podanym wyżej równaniu liniowym ustalimy współczynniki oznaczane literą a ze wskaźnikami, to powyższa forma liniowa oznacza te punkty przestrzeni P_n, które leżą na pewnej hiperpłaszczyźnie. Jeżeli natomiast w powyższej formie ustalimy elementy oznaczane literą x ze wskaźnikami, to równanie rozważane przedstawia zbiór wszystkich hiperpłaszczyzn przestrzeni rzutowej, przechodzących przez dany punkt $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ przestrzeni rzutowej. W ten sposób otrzymujemy dwie interpretacje jednego i tego samego związku analitycznego. Mówiąc prościej, jeden i ten sam wzór liniowy można interpretować bądź jako pewną hiperpłaszczyznę, bądź jako pewien punkt przestrzeni P_n. Twory te zwiemy dwoistymi względem siebie. Zarazem do wyrażenia „punkt leżący na hiperpłaszczyźnie” dwoistym wyrażeniem okazuje się być wyrażenie „hiperpłaszczyzna przechodzi przez dany punkt”.

Niech teraz T oznacza jakieś twierdzenie geometrii rzutowej sformułowane w postaci wzoru algebraicznego. Twierdzeniu temu można nadać dwie różne interpretacje posługując się sposobem opisanym przed chwilą. A zatem słownik przekładu jest tu następujący. Wyrażeniu „punkt przestrzeni rzutowej n-wymiarowej" odpowiada wyrażenie „hiperpłaszczyzna (n-1)-wymiarowa przestrzeni rzutowej n-wymiarowej" zaś wyrażeniu „punkt leży na hiperpłaszczyźnie" — wyrażenie „hiperpłaszczyzna przechodzi przez punkt". Na tym właśnie polega istota dwoistości w przestrzeni P_n. Oczywiście, gdyby w twierdzeniu T występowały jeszcze inne pojęcia geometryczne oprócz tworów wymienionych wyżej, to przed dokonaniem przekładu należałoby wpierw znaleźć ich odpowiedniki dwoistę. [9].

Zasadą dwoistości odnośnie do geometrii rzutowej nazywamy tezę orzekającą, że prawdziwość dowolnego twierdzenia geometrii przestrzeni P_n implikuje prawdziwość twierdzenia względem niego dwoistego. W tym sformułowaniu wyraźnie widzimy metateoretyczny charakter zasady dwoistości. Zasada dwoistości jest tezą o geometrii rzutowej.

Obecnie przejdziemy do przedstawienia na przykładzie dwu twierdzeń z geometrii płaszczyzny rzutowej istoty dwoistości. Przykłady te pozwolą dobrze zilustrować myśl zasady dwoistości i jej sens. Podane bowiem wyżej rozważania dla przestrzeni n-wymiarowej mogą nie być zbyt intuicyjne. Toteż przyjrzenie się ich realizacjom w przypadku dwuwymiarowym winno pomóc wybitnie i naszej wyobraźni przestrzennej.

Zauważmy tylko przedtem, że w przypadku przestrzeni P_n, można mówić i o tworach dwoistych i o operacjach dwoistych i o twierdzeniach dwoistych.

---

[9] Por. np. K. Borsuk, Geometria analityczna wielowymiarowa, Warszawa 1964[2], 281—284.

3.1. Twierdzenie Pascala

Niech S będzie okręgiem koła. Niech f oznacza dowolne przekształcenie rzutowe przestrzeni P_n na siebie. Wówczas f(S) nazywamy stożkową zupełną. Jest to więc obraz rzutowy okręgu koła.

Oznaczmy stożkową zupełną f(S) krótko przez K.

Weźmy teraz na stożkowej zupełnej K sześć różnych punktów a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Punkty te nazywać będziemy wierzchołkami sześciokąta wpisanego w stożkową K. Przez L_i oznaczamy prostą łączącą a_i z wierzchołkiem a_{i+1} (jeżeli $i = 6$, to przyjmujemy $i + 1 = 1$). Proste te nazywamy bokami sześciokąta. Boki: L_1 i L_4 oraz L_2 i L_5 a także L_3 i L_6 zwiemy bokami przeciwległymi danego sześciokąta.

Zachodzi następujące twierdzenie Pascala:

Trzy punkty przecięcia par boków przeciwległych sześciokąta wpisanego w stożkową leżą na jednej prostej (tzw. prostej Pascala) [10].

Twierdzeniu temu można przyporządkować twierdzenie dwoiste, zwane twierdzeniem Brianchona. Z zasady dwoistości wynika, że musi ono być prawdziwe, o ile tylko prawdziwe jest twierdzenie Pascala. I odwrotnie. Jeśli udowodnimy twierdzenie Brianchona, to tym samym mieć będziemy dowód twierdzenia Pascala. Dwa te twierdzenia są bowiem wzajemnie do siebie dwoiste. Widzimy więc, że zasada dwoistości, stanowiąca sama w sobie interesującą tezę, może służyć do upraszczania budowy teorii, pozwalając na ekonomię wysiłku.

Przechodzimy obecnie do sformułowania twierdzenia dwoistego względem twierdzenia Pascala.

3.2. Twierdzenie Brianchona

Jak pamiętamy w twierdzeniu Pascala była mowa o sześciokącie wpisanym w stożkową zupełną oraz o przecinaniu się

---

[10] Zob. K. Borsuk, op. cit., 289.

par boków przeciwległych w punktach, które leżą na jednej prostej.

W celu otrzymania twierdzenia dwoistego należy dokonać odpowiedniego przekładu, zastępując dane twory, operacje, wyrażenia przez ich dwoiste odpowiedniki.

Zamiast sześciokąta wpisanego w stożkową bierzemy sześciokąt opisany na stożkowej. Niech teraz L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 będą stycznymi do danej stożkowej zupełnej K. Pamiętamy, że przez styczną do danej stożkowej K rozumiemy taką prostą, leżącą w płaszczyźnie rzutowej P_2, która posiada za stożkową dokładnie jeden punkt wspólny, zwany punktem styczności. Przez b_i oznaczamy punkt przecięcia boku L_i z bokiem L_{i+1}. Punkty b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 nazywamy wierzchołkami sześciokąta opisanego na danej stożkowej K. W ten sposób otrzymujemy trzy proste wyznaczone przez przeciwległe wierzchołki, tj. przez wierzchołki b_1 i b_4, b_2 i b_5, b_3 i b_6. Oznaczamy te proste B_1, B_2, B_3. Zgodnie z zasadą dwoistości proste B_1, B_2, B_3 przecinają się w jednym punkcie. I to jest właśnie treść twierdzenia Brianchona. Twierdzenie to można słowami wypowiedzieć następujący:

Trzy proste, łączące pary przeciwległych wierzchołków sześcioboku opisanego na stożkowej, przecinają się w jednym punkcie [11].

Nie jest rzeczą trudną sprawdzić, że dokonany przekład jest przekładem dwoistym. Korzystano tu z faktów mówiących, że tworem dwoistym do danej stożkowej zupełnej jest zbiór stycznych do pewnej innej stożkowej, że wierzchołkom sześciokąta wpisanego w stożkową odpowiadają styczne stanowiące sześciobok opisany na stożkowej (innej), że parom boków przeciwległych odpowiadają pary wierzchołków przeciwległych, że trzem punktom leżącym na jednej prostej odpowiada przecinanie się trzech prostych w jednym punkcie [12].

[11] Tamże, 293.

[12] Por. np. K. Borsuk, op. cit., 292—293.

4. Dwoistość w analizie funkcjonalnej

Pojęcie przestrzeni liniowej (zwanej także przestrzenią wektorową) jest podstawowe dla analizy funkcjonalnej. Z tego względu przypomnimy je tutaj najpierw.

Niech C będzie ciałem liczb rzeczywistych bądź zespolonych. Zbiór niepusty E nazywamy przestrzenią liniową, jeżeli w zbiorze tym są określone dwa działania, mianowicie dodawanie elementów zbioru E oraz mnożenie ich przez liczby z ciała C, przy czym działania te nie wyprowadzają poza zbiór E i spełnione są następujące proste warunki:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \qquad (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3),$$
$$x + x_1 = x + x_2 \text{ pociąga za sobą } x_1 = x_2,$$
$$a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2, \qquad (a_1 + a_2)x = a_1x + a_2x,$$
$$(a_1a_2)x = a_1(a_2x), \qquad 1x = x.$$

We wzorach powyższych a, a_1, a_2 oznaczają elementy ciała C, zaś x, x_1, x_2 — elementy zbioru E. Wyrażenie ax nazywamy iloczynem liczby a przez element x. Z założenia ax jest elementem zbioru E.

Jeżeli C jest ciałem liczb rzeczywistych, to przestrzeń liniową E zwiemy przestrzenią liniową rzeczywistą. Jeżeli natomiast C jest ciałem liczb zespolonych, to przestrzeń E zwiemy przestrzenią liniową zespoloną.

Nietrudno jest zauważyć, że powyższą definicję można sformułować następująco:

Przestrzenią liniową (rzeczywistą względnie zespoloną) nazywamy zbiór E, w którym są określone dwa działania: dodawanie elementów zbioru E oraz mnożenie tych elementów przez liczby (rzeczywiste względnie zespolone), przy czym spełnione winny być następujące warunki:

1° zbiór E jest grupą abelową ze względu na działanie dodawania,

2° działanie mnożenia nie wyprowadza poza zbiór E, 3° iloczyn jedności przez dowolny element zbioru E jest równy temu elementowi,

4° działanie mnożenia elementów przez liczby jest łączne, przemienne i rozdzielne (ze względu na liczby i elementy zbioru E) w stosunku do działania dodawania.

Jako prosty przykład przestrzeni liniowej można podać zbiór wszystkich funkcji określonych na dowolnym zbiorze a przyjmujących wartości liczbowe. Dodawanie funkcji i mnożenie ich przez liczbę określa się w zwykły sposób jak dla funkcji o wartościach liczbowych zmiennej liczbowej.

Innymi przykładami przestrzeni liniowych mogą służyć: zbiór liczb rzeczywistych oraz zbiór liczb zespolonych.

Przedstawimy obecnie pewne proste pojęcia definiowane dla przestrzeni liniowych, które prowadzą do dwoistości w zakresie analizy funkcjonalnej.

4.1. Liniowa niezależność i pełność układu wektorów

Niech dana będzie przestrzeń liniowa E. Niech x_i będzie elementem przestrzeni E, zaś a_i elementem ciała C (dla $i = 1, 2, \ldots, k$). Wyrażenie postaci $u = a_1x_1 + \ldots + a_kx_k$ nazywamy liniową kombinacją elementów (zwanych punktami bądź wektorami) x_i o współczynnikach a_i. Jeżeli wszystkie współczynniki a_i danej kombinacji liniowej wektorów przestrzeni E są równe zeru, to taką kombinację zwiemy trywialną. W wypadku przeciwnym zwiemy nietrywialną[13].

Układ wektorów x_1 $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nazywa się układem liniowo niezależnym jeżeli wszystkie jego nietrywialne kombinacje liniowe są różne od zera. Inaczej mówiąc, układ wektorów jest liniowo niezależny, jeżeli ze znikania kombinacji liniowej wynika znikanie wszystkich jej współczynników. Je-

[13] Zob. np. A. Alexandrowicz, Analiza funkcjonalna, Warszawa 1969, 51—52 oraz I. M. Głazman, Ju. I. Lubicz, Konieczpomiernyj liniejnyj analiz, Moskwa 1969, 12.

żeli wektory x_i nie są liniowo niezależnymi, to nazywamy je liniowo zależnymi.

Otoczką liniową układu wektorów X nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów układu X. Otoczkę układu X oznacza się przez L(X). Podukład X_0 układu X nazywa się pełny, jeżeli każdy wektor układu X jest kombinacją liniową wektorów podukładu X_0, czyli gdy układ X jest zawarty w liniowej otoczce podukładu X_0.

Zachodzą następujące twierdzenia:

(1) Każdy podukład liniowo niezależnego układu wektorów jest liniowo niezależny.

(2) Każdy podukład zawierający układ pełny wektorów jest pełnym układem wektorów.

Twierdzenie (1) można przeredagować do postaci:

(1) Każdy podukład zawierający się w liniowo niezależnym układzie jest liniowo niezależny.

Jeżeli teraz w tym zmienionym sformułowaniu twierdzenia (1) zastąpimy wyrażenie „zawierający się" przez wyrażenie „zawierający" oraz wyrażenie „liniowo niezależny układ" przez wyrażenie „układ pełny wektorów", to wówczas twierdzenie (1) przejdzie w twierdzenie (2). Ten fakt wyrażamy mówiąc, że twierdzenia (1) oraz (2) są względem siebie dwoiste. Nadto i podane wyżej wyrażenia w cudzysłowach można uważać za dwoiste względem siebie [14].

Z powiedzianego widać, że struktura formalna obu twierdzeń jest identyczna. Można je zapisać w jednej symbolicznej postaci, przy czym każde ze wspomnianych twierdzeń może być traktowane jako podstawienie jednego i tego samego schematu. Nie jest to jednak zwykłe tylko podstawienie. Posiada ona bowiem cechę „wzajemności" między elementami podstawianymi.

---

[14] Por. I. M. Głazman, Ju. I. Lubicz, Koniecznomiernyj liniejnyj analiz, Moskwa 1969, 13—14.

4.2. Baza układu wektorów

Niech dany będzie układ wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_k$ przestrzeni E. Mówimy że układ ten stanowi bazę przestrzeni E, jeżeli każdy element przestrzeni E daje się w jeden tylko sposób przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, tj. dla każdego x E zachodzi wzór: $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k$, przy czym przedstawienie to jest jedno tylko.

Zachodzą następujące twierdzenia:

(3) Na to, aby układ wektorów był bazą przestrzeni potrzeba i wystarcza, żeby on układem liniowo niezależnym i zarazem maksymalnym, tj. by nie zawierał się w żadnym podukładzie liniowo niezależnym.

(4) Na to, aby układ wektorów był bazą przestrzeni potrzeba i wystarcza, żeby był on układem pełnym i zarazem minimalnym, tj. by nie zawierał żadnego podukładu pełnego.

Bez trudu zauważamy dwoistość twierdzeń (3) oraz (4). Wystarczy zastąpić wzajemnie wyrażenia „układ liniowo niezależny", „układ maksymalny", „zawierać się" przez wyrażenia „układ pełny", „układ minimalny", „zawierać" aby z pierwszego z tych twierdzeń otrzymać drugie i odwrotnie.

Zwróćmy uwagę na to, że bazę przestrzeni można jeszcze określić jako układ wektorów posiadających dwie cechy: liniową niezależność oraz pełność. Stąd, oraz z wyżej powiedzianego, wynika, że pojęcie bazy jest dwoiste względem siebie samego.

Uwaga, podana na końcu poprzedniego paragrafu, może być także i w tym miejscu powtórzona. Zezwala jednakże ona na małe uzupełnienie przez wypunktowanie faktu istnienia pojęć dwoistych względem siebie samych.

4.3. Podprzestrzenie maksymalne i minimalne

Przypuśćmy że dana jest przestrzeń E. Przez A oznaczmy klasę złożoną z podprzestrzeni przestrzeni E. Niech A_j będzie elementem klasy A. Oznaczamy przez W pewną własność, która przysługuje wszystkim elementom klasy A.

Powiemy, że przestrzeń A_j jest maksymalna ze względu na własność W, jeżeli nie zawiera się ona w żadnej innej przestrzeni z klasy A. Przestrzeń A, nazywamy minimalną ze względu na własność W, jeżeli nie zawiera ona żadnej innej przestrzeni z klasy A.

Jeżeli przestrzeń A_j zawiera każdą przestrzeń z rodziny A, to nazywamy ją największą przestrzenią ze względu na własność W. Jeśli przestrzeń A_j jest zawarta w każdej przestrzeni klasy A, to zwiemy ją najmniejszą przestrzenią ze względu na własność W.

Prawdziwe są następujące twierdzenia:

Na to, aby przestrzeń maksymalna A_j była największą przestrzenią potrzeba i wystarcza aby była jedyną minimalną przestrzenią.

Na to, aby przestrzeń minimalna A_j była najmniejszą przestrzenią potrzeba i wystarcz aaby była jedyną minimalną przestrzenią.

Jest widoczne, że podane tu pojęcia różnych rodzajów przestrzeni są dwoiste. Także dwa twierdzenia wyżej nieco zacytowane są względem siebie dwoiste [15].

Warto może przypomnieć, że w klasie przestrzeni A zawsze istnieje przestrzeń maksymalna oraz minimalna. Natomiast przestrzenie największa oraz najmniejsza nie zawsze muszą istnieć.

Jeżeli w klasie A istnieje przestrzeń największa, to jest ona jednocześnie i maksymalna. Podobnie, jeżeli w klasie A istnieje przestrzeń najmniejsza, to jest ona minimalna. Nie jest jednak odwrotnie, jak o tym pouczają nas powyższe twierdzenia. Klasa przestrzeni A może posiadać wiele przestrzeni maksymalnych i wiele przestrzeni minimalnych. Żadna z przestrzeni maksymalnych nie będzie wówczas największą przestrzenią ani żadna z minimalnych, nie będzie przestrzenią najmniejszą.

[15] Tamże, 25.

4.4. Dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni

Niech dana będzie przestrzeń liniowa E. Przez E' oznaczamy przestrzeń z nią sprzężoną tj. przestrzeń złożoną z funkcjonałów liniowych [16] określonych na E.

Wektor x przestrzeni E oraz funkcjonał f określony na E nazywają się wzajemnie ortogonalnymi, jeżeli f(x) = O.

Niech B będzie podprzestrzenią przestrzeni E. Dopełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni B nazywamy zbiór wszystkich tych funkcjonałów f należących do E', które są ortogonalne do każdego wektora podprzestrzeni B. Analogicznie, w sposób dwoisty, określa się dopełnienie ortogonalne podprzestrzeni B' zawartej w E'.

Otrzymujemy w ten sposób parę pojęć dwoistych. Jest widoczne, że dopełnienie ortogonalne dowolnej podprzestrzeni (E względnie E') jest największą podprzestrzenią (odpowiednio w E' względnie w E) ortogonalną do danej podprzestrzeni. Dwoistość dopełnienia ortogonalnego w omawianym przypadku płynie stąd, że wektor oraz funkcjonał spełniają warunek ortogonalności w sposób dwoisty. Jeżeli zachodzi równość f(x) = O, to i wektor jest ortogonalny do funkcjonału oraz funkcjonał jest ortogonalny do wektora [17].

Można mówić także o ortogonalności podprzestrzeni (odpowiednio z E oraz z E'). Mianowicie, niech B będzie podprzestrzenią E, zaś B' — podprzestrzenią E'. Powiemy, że B oraz B' są względem siebie ortogonalne, jeżeli dla każdego $x \in B$ oraz dla każdego $f \in B'$ zachodzi wzór f(x) = O, czyli gdy x oraz f są wzajemnie ortogonalne. W ten sposób uzyskujemy dalsze pojęcie dwoiste, mianowicie ortogonalność dwu podprzestrzeni (z podprzestrzeni względem siebie sprzężonych).

---

[16] Funkcjonałem nazywamy odwzorowanie, określone na przestrzeni liniowej, przyjmujące wartości liczbowe. Funkcjonał f nazywa się liniowym, jeżeli spełnione są następujące dwa warunki: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ i $f(ax) = af(x)$.

[17] Por. I. M. Głazman, Ju. I. Lubicz, op. cit., 52.

5. Uwagi końcowe

Przyglądając się podanym w tym artykule pojęciom oraz twierdzeniom, które odnoszą się do problematyki dwoistości, można zauważyć przynajmniej następujące rzeczy. A więc, po pierwsze, stwierdzamy różnorodność sytuacji, do których daje się odnosić pojęcie dwoistości. Dwoiste bywają obiekty, aksjomaty, operacje, twierdzenia, pojęcia. Wszystko to może być zaliczone do dwoistości rozumianej jako wewnętrzna własność mająca miejsce w teorii matematycznej. Ale to nie jest wszystko, bowiem zupełnie uzasadnione jest spojrzenie na wspomniane pojęcie jako na własność samej teorii, zatem jako na własność metateoretyczną. Pojawiałby się więc w ten sposób postulat spojrzenia na problematykę związaną z dwoistością z punktu widzenia metateoretycznego. Tak jak mówi o teoriach niesprzecznych, rozstrzygalnych, kategorycznych itp., podobnie wydaje się być właściwe zapoczątkowanie mówienia o teorii dwoistej. Jest to jednak temat odpowiedni do oddzielnego ujęcia i opracowania. W tym miejscu daje on się tylko zasygnalizować.

Dalsza sprawa, jaka tu się nasuwa, to problem zbadania w sposób możliwie wyczerpujący a zarazem ogólny, cechy „wzajemności", z którą ma się do czynienia w przypadku dwoistości (por. np. § 4.1). Ścisłe ujęcie tej cechy pozwoli dotrzeć do „istoty" dwoistości.

Wszystko, co było do tej pory powiedziane, upoważnia do wyrażenia przeświadczenia, iż pojęcie dwoistości posiada charakter pojęcia analogicznego. Podkreślenie tej sprawy wydaje się być, z filozoficznego punktu widzenia, ważne i ciekawe. I, zapewne, nie tylko z filozoficznego punktu widzenia.

Zur Dualitätsproblematik in den formalen Wissenschaften (II)

Der Artikel betrachtet die fundamentalen Elemente der Dualitätsproblematik in der Mathematik. Insbesondere gilt unsere Aufmerksam-

keit der universalen Algebra, projektiven Geometrie und Funktionalanalysis.

Im Bereiche der universalen Algebra diskutiert man die Dualität der Axiome und Thesen; hier wird auch der Begriff der dualen Kategorie gegeben. Es bezeichne K eine gegebene Kategorie. Die duale Kategorie $K^{\&}$ definiert man wie folgt. Die Objekte der Kategorie $K^{\&}$ sind Objekte $A^{\&}$, welche sich in ein-eindeutiger Relation mit den Objekten A der Kategorie K befinden. Dieses schreiben wir in der Form: $A^{\&}$ A. Analog, die Morphismen der Kategorie $K^{\&}$ sind die Elemente $a^{\&}$, welche sich in 1—1 Relation mit der Morphismen a der Kategorie K befinden. Dieses schreiben wir so: $a^{\&}$ a. Man setzt noch voraus, dass die Bedingung a: $A \rightarrow B$ dann und nur dann gilt, wenn die Bedingung a: $B \rightarrow A$ gilt, und ausserdem ist die Multiplikation $a^{\&}$ $b^{\&}$ definiert dann und nur dann, wenn die Multiplikation ba definiert ist und gleichzeitig die Formel: $a^{\&}$ $b^{\&}$ = $(ba)^{\&}$ gilt. In der Kategorientheorie kann man auch über die dualen Operationen sprechen.

Im Bereiche der projektiven Geometrie illustriert man die Dualitätsproblematik an zwei Beispielen, nämlich an dem Satz von Pascal und an dem Satz von Brianchon. An jener Stelle unterstreicht man auch den metatheoretischen Aspekt des Begriffes der Dualität.

Im Bereiche der Funktionanalysis operiert man mit verschiedenen Begriffen wie: linear unabhängiges Vektorsystem, Vollständigkeit eines Vektorsystems, Basis eines Vektorsystems, maximaler und minimaler Unterraum, orthogonaes Komplement eines Unterraumes. Diese Begriffe sind in einem linearen Raum definiert und sind Beispiele für die Dualität. Eine Menge heisst ein linerarer Raum, wenn in ihr zwei Operationen definiert sind, nämlich: die Addition der Elemente der Menge E und die Multiplikation der Elemente von E mit reellen (oder komplexen) Zahlen so, dass die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind: 1° E ist eine additive abelsche Gruppe, 2° Die Mutliplikation führt nicht aus E heraus, 3° Das Produkt des Einselementes mit einem beliebigen Element der Menge E ist gleich diesem Elemente, 4° Die Multiplikation der Elemente mit den Zahlen ist assoziativ, kommutativ und distributiv (bezüglich der Zahlen und Elemente der Menge E) hinsichtlich der Addition. Man bemerkt, dass die formale Struktur der dualen Satze dieselbe ist. Die Sätze sind Exemplifizierungen eines und diesselbes Schemates unter der Voraussetzung der „Wechselbedingung".

Es scheint, dass die Erforschung der „Wechselbedingung" im allgemeinen Falle den Übergang zu dem „Wesen" der Dualität erlaubt.

Die Dualität scheint mindestens zwei Aspekte zu besitzen: erstens einen inneren, der die Objekte der Theorie betrifft, zweitens, einen externen, metatheoretischen, der sich auf die Eigenschaften der Theorie bezieht. Man kann meinen, dass die genauere Ausarbeitung dieser Problematik nicht ohne Ziel sein wird. Also sollte es dort um die „duale" Betrachtung der Dualitätsproblematik gehen.

All diese Bemerkungen erlauben uns zu der Schlussfolgerung zu gelangen, dass wir im Falle der Dualität mit dem Begriff des analogen Charakters zusammentreffen werden. Das ist wahrscheinlich interessant für die Wissenschaft als auch für die Philosophie.