Mieczysław Lubański

Język matematyczny i odwzorowanie

Studia Philosophiae Christianae 7/1, 55-69

1971

Studia Philosophiae Christianae
ATK
7/1971/1

MIECZYSŁAW LUBAŃSKI

JĘZYK MATEMATYCZNY I ODWZOROWANIE

1. Wprowadzenie. 2. Logiczna koncepcja języka. 3. Odwzorowanie. 4. Język a odwzorowanie. 5. Uwagi zamykające.

1. Wprowadzenie

Język to coś specyficznie ludzkiego i zarazem podstawowego [1]. Nauka o języku przeszła długą historię i ewolucję od stanu pierwotnego do poziomu, na którym obecnie się znajduje [2]. Współcześnie w językoznawstwie zaznacza się coraz silniej tendencja do ścisłości [3]. Konsekwentnie powoduje to lepsze odróżnianie w języku strony syntaktycznej i semantycznej, samego język i jego ontologii. Na język można patrzeć jako na pewnego rodzaju odwzorowanie rzeczywistości. W ten sposób pojawia tu się powiązanie z teorią modeli. Modelować bowiem można i język [4] i rzeczywistość. A zatem podstawowym pojęciem okazuje

[1] „Człowiek jest istotą mówiącą. Jest to najważniejsza cecha, która odróżnia go od innych istot żywych i jednocześnie (tak przynajmniej chcielibyśmy myśleć) wynosi ponad nie. [...] Język jest podstawowym środkiem zachowywania, przekazywania i ciągłego wzbogacania osiągnięć ludzkiej kultury." (M. Schlauch, Język i językoznawstwo współczesne, Warszawa 1967, 7—8).

[2] Por. np. J. Reychman, Od wieży Babel do językoznawstwa porównawczego, Warszawa 1969.

[3] Zob. np. J. Lewin, Znaki, język, matematyka, w: J. Lewin, J. Gastiew, J. Rozanow, Język, matematyka, cybernetyka, Warszawa 1967, 14—17.

[4] Zob. tamże, 17—32.

się tu być pojęcie odwzorowania. Stąd też w naturalny sposób nasuwają się pytania o wzajemne relacje zachodzące między językiem, modelem, odwzorowaniem. W artykule tym chodzić będzie o przedstawienie kilku myśli, odnoszących się do wspomnianej problematyki.

2. Logiczna koncepcja języka

Jak dobrze wiadomo, wyraz „język" jest wieloznaczny. Może, po pierwsze oznaczać część ciała ludzkiego lub zwierzęcego, po drugie, sposób porozumiewania się między ludźmi, czyli mowę, po trzecie, przedmiot przypominający kształtem język w znaczeniu pierwszym [5]. Biorąc pod uwagę drugie z wymienionych znaczeń, można w nim wyróżnić szersze i węższe rozumienie wyrazu „język". W znaczeniu szerszym przez język rozumie się każdy system przekazywania informacji. W tym znaczeniu więc można mówić nie tylko o języku sygnałów kolejowych, znaków drogowych itp., ale także o języku organizmu, maszyny itd. To znaczenie języka jest wygodne dla cybernetyki i tam powszechnie stosowane. W znaczeniu węższym, natomiast, język to mowa ludzka. Językoznawcy na pismo patrzą jako na konwencjonalny sposób przedstawiania mowy. Wzrokowy sposób przedstawiania języka jest tylko namiastką sposobu słuchowego [6]. Nadto zwraca się uwagę na społeczną stronę języka. Porozumiewanie się ludzi ma miejsce, historycznie i realnie rzecz biorąc, w grupach społecznych [7]. Jeśli za pojęcie pierwotne przyjąć „mowę", to język daje się wówczas określić jako to, co jest w mowie równocześnie społeczne, trwałe i abstrakcyjne [8]. W mowie można wyróżnić cztery jej fazy, mianowicie: mówienie, zrozumienie, tekst i wreszcie język, który jest społecznym tworem mowy [9].

[5] Por. Mały słownik języka polskiego, Warszawa 1968.

[6] Zob. M. Schlauch, Język i językoznawstwo współczesne, Warszawa 1967, 7.

[7] Tamże, 8.

[8] T. Milewski, Językoznawstwo, Warszawa 1965, 5.

[9] Tamże, 5—8.

Nas interesować będzie tutaj logiczna koncepcja języka. Czym jest język z logicznego punktu widzenia? Aby tę koncepcję przedstawić, przypomnijmy najpierw co mamy na myśli, kiedy mówimy o rozumieniu wyrażeń językowych. Otóż powiemy, z całą pewnością, że rozumiemy dane wyrażenie, jeżeli usłyszenie go kojarzy nam się z przedmiotem od tego wyrazu różnym, bądź z pewną relacją zachodzącą między przedmiotami, bądź z pewną czynnością [10]. Znaczeniem natomiast, w jakim się rozumie dane wyrażenie, nazwiemy określony (pod pewnymi względami) sposób rozumienia danego wyrażenia [11]. Jeśli teraz weźmiemy pod uwagę pewien zasób wyrażeń oraz sposobów ich rozumienia, czyli znaczeń, to mieć będziemy właśnie do czynienia z logiczną koncepcją jęyka [12]. Przeto mówić jakimś językiem znaczy posługiwać się jego wyrażeniami oraz rozumieć je w takim znaczeniu, jakie jest w danym języku przyjęte. Weźmy pod uwagę przypadek najprostszy, gdy wyrażeniom języka jest przyporządkowane ich znaczenie w sposób jednoznaczny, tj. gdy każde wyrażenie posiada jedno tylko ustalone znaczenie. Wówczas gdybyśmy tym samym wyrażeniom przyporządkowali inny sposób ich rozumienia (czyli inne znaczenie) i także, dla prostoty, jeden tylko sposób, to mielibyśmy do czynienia, z logicznego punktu widzenia, z innym językiem. Można by tutaj odróżniać różność języka odnośnie do zbioru wyrażeń oraz odnośnie do przyporządkowywanych wyrażeniom znaczeń. Jeśli więc zmienilibyśmy zbiór wyrażeń, zachowując ich rodzaje syntaktyczne oraz znaczenie, to można by mówić o werbalnej zmianie języka. Jeśli stronę wyrażeniową zostawilibyśmy niezmienioną, zaś przyjęlibyśmy inne, nowe znaczenia dla wyrażeń, to można by mówić o znaczeniowej zmianie języka. Jeśli dokonalibyśmy jednego i drugiego, to mielibyśmy do czynienia z pełną zmianą języka.

Rozważając stronę semantyczną języka, przypomnijmy, że wydaje się, iż najbardziej właściwy układ kategorii ontologicz-

---

[10] Zob. K. Ajdukiewicz, Logika pragmatyczna, Warszawa 1965, 19.

[11] Tamże, 20—23.

[12] Tamże, 23—24.

nych należy oprzeć na pojęciach teorii mnogości. Układ ten zawiera nieskończenie wiele kategorii. Są nimi: 1° indywidua (tzn. przedmioty nie będące zbiorami), 2° zbiory, 3° relacje (dwu-, trój-, ... , n-członowe). Relacji jest właśnie nieskończenie wiele ze względu na ich „członowość". Dla dowolnego n naturalnego posiadamy relację n-członową. Z praktycznego punktu widzenia, w podanych wyżej kategoriach ontologicznych, dadzą się zmieścić wszystkie znane nam filozoficznie istotne pojęcia metafizykalne [13]. Podkreślmy myśl, głoszącą, że współcześnie nie widać żadnego sposobu, który by pozwolił budować język całkowicie poza wymienionymi wyżej kategoriami. Przypuśćmy bowiem, dla przykładu, że rozważamy ruch. Wydaje się, że gdy mówimy o ruchu, to traktujemy wyrażenie to jedynie jako skrót. W rzeczywistości ruch jest zawsze ruchem czegoś. Coś się porusza. Nie mą ruchu bez przedmiotu poruszającego się. Ruch jest nieodłącznie związany z czymś, co się porusza. Fizyk teoretyk powiedziałby, że rozpatruje ruch punktu materialnego. Zawsze więc mamy do czynienia z czymś poruszającym się, a nie z ruchem samym jako takim. Zwyczaj językowy nie pozwala nam mówić o istnieniu samego ruchu bez przedmiotu poruszającego się. Opisywanie ruchu przy pomocy pojęcia funkcji zakłada istnienie pewnego substratu, którego zmienne stany w rozważanym ruchu są właśnie rozpatrywane, badane. Wprawdzie takie pojęcie jak tor cząstki poruszającej się wydaje się być tylko pojęciem makroskopowym, nie posiadającym odpowiednika w mikroświecie, to jednak niezależnie od tego, i w mechanice klasycznej i w mechanice kwantowej zawsze mamy do czynienia z substratem, który podlega zmianie, który się porusza [14].

---

[13] Zob. np. H. Stonert, Język i nauka, Wiedza Powszechna, 1964, 182—183. Wypada tu zwrócić uwagę na to, że w matematycznej teorii kategorii powstała sytuacja, która zmusza do „wyjścia" poza pojęcie zbioru. Używa się tam szerszego pojęcia klasy. Każdy zbiór jest klasą, natomiast nie każda klasa jest zbiorem. Np. zbiór wszystkich zbiorów jest klasą, nie jest zaś zbiorem. Kategoria jest, z reguły, klasą.

[14] Zob. np. D. Błochincew, Podstawy mechaniki kwantowej, Warszawa 1954, 58—63.

Mechanika kwantowa głębiej wnika w „naturę" ruchu, aniżeli to czyni mechanika klasyczna. Stąd też sformułowania klasyczne mogą się okazać jedynie ujęciem przybliżonym, co wcale nie przeszkadza, aby uważać za rzecz niewątpliwą przekonanie głoszące, iż nie potrafimy mówić o ruchu, gdy nie istnieje obiekt, który by się poruszał [15]. Ten fakt wydaje się być ściśle związany ze strukturą języka, którym się posługujemy. Nie widać, podkreślmy to raz jeszcze, w jaki sposób można by pozbawić język omawianej przed chwilą własności, a więc budowania go niezależnie od wspomnianych kategorii ontologicznych.

Zanotujmy tu jeszcze jedną prostą myśl. Chodzi mianowicie o pogląd, zgodnie z którym matematyka może być uważana za użyteczny język nauki. Język matematyki jest bowiem zarazem i precyzyjny i wystarczająco bogaty. A jednocześnie jest uniwersalny. Zdaniem J. G. Kemeny'ego matematyka, jak dotąd, jest jedynym naprawdę uniwersalnym osiągnięciem człowieka [16]. W związku z tym wypada przypomnieć pogląd H. Steinhausa, według którego przedmiotem matematyki jest rzeczywistość, a nadto matematyka jest uniwersalna bowiem nie ma takiej rzeczy, która byłaby jej obca [17]. Interesujące jest, że W. J. Reichmann podobnie widzi przedmiot statystyki matematycznej. Uważa, że jest nim rzeczywistość [18]. Uniwersalny charakter matematyki wydaje się płynąć z abstrakcyjności matematyki. Stąd właśnie dalej wynika możliwość licznych zastosowań matematyki, a także uwolnienie języka matematyki od zabarwienia emocjonalnego [19]. Wydaje się, że dobrą ilustracją dla wyżej powiedzianego jest powstanie cybernetyki z jej językiem o charakterze syntetyzującym oraz renesans metody modelowania.

---

[15] Ciekawe wydaje się być przebadanie z semantycznego punktu widzenia takich pojęć fizykalnych, jak np. masa, energia itp. Jakiego rodzaju ontologicznego są one? Czy są to indywidua, czy własności, cechy indywiduów itp.?

[16] J. G. Kemeny, Nauka w oczach filozofa, Warszawa 1967, 22.

[17] H. Steinhaus, Kalejdoskop matematyczny, Warszawa 1956, 6.

[18] W. J. Reichmann, Drogi i bezdroża statystyki, Warszawa 1968, 58.

[19] Zob. J. G. Kemeny, op. cit., 22.

3. Odwzorowanie

W określeniu odwzorowania najwygodniej jest wyjść od pojęcia relacji. Formalnie biorąc relacja jest to zbiór par uporządkowanych (x, y). Przynależność pary (x, y) do relacji R bywa notowana w postaci xRy lub R(x, y). Relacja R nazywa się jednoznaczną, jeżeli spełniony jest warunek: xRy oraz xRz pociągają za sobą równość y = z. Relację jednoznaczną nazywa się właśnie odwzorowaniem. Zamiast odwzorowanie mówi się także przekształcenie, funkcja. Jeżeli f oznacza odwzorowanie, to zamiast xfy przyjęło się pisać y = f(x).

Podchodząc do pojęcia odwzorowania w sposób bardziej intuicyjny, można określić je następująco. Niech dane będą dwa zbiory X oraz Y. Jeżeli każdemu elementowi zbioru X został przyporządkowany pewien element ze zbioru Y, to mówimy, że zostało określone odwzorowanie f na zbiorze X o wartościach ze zbioru Y. Zbiór X nosi nazwę zbioru argumentów lub dziedziny odwzorowania f. Natomiast zbiór tych y ze zbioru Y, dla których istnieje x ze zbioru X, takie że y = f(x), nosi nazwę zbioru wartości względnie przeciwdziedziny odwzorowania. Jeżeli przeciwdziedziną odwzorowania f jest cały zbiór Y, to mówimy, że odwzorowanie jest na zbiór Y. W wypadku przeciwnym, odwzorowanie zwie się w zbiór Y. Odwzorowanie f zbioru X w zbiór Y, spełniające warunek: x_1 różne od x_2 pociąga za sobą $f(x_1)$ różne od $f(x_2)$, nazywa się odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym. Jest widoczne, że każda funkcja matematyczna jest odwzorowaniem w wyżej określonym znaczeniu.

Jeżeli f jest odwzorowaniem zbioru X w zbiór Y, to fakt ten zapisujemy także następująco: $f : X \to Y$. Czytamy: f odwzorowuje X w Y, albo: f przekształca X w Y.

Niech będą dane trzy zbiory X, Y, Z oraz dwa odwzorowania f i g takie, że $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Wówczas można mówić o odwzorowaniu $h: X \to Z$, takim że $h(x) = g/f(x)/$ dla każdego x należącego do zbioru X. Odwzorowanie h nosi nazwę superpozycji odwzorowań f oraz g, albo złożenia odwzorowań f oraz g.

Na przykład, niech X, Y, Z będą zbiorami identycznymi między sobą utworzonymi ze wszystkich ludzi (żywych oraz umarłych). Niech f będzie odwzorowaniem przyporządkowującym każdemu człowiekowi jego matkę, zaś g niech przyporządkowuje każdemu człowiekowi jego ojca. Wówczas odwzorowanie złożone fg przyporządkowuje każdemu człowiekowi jego babkę ze strony ojca, zaś odwzorowanie gf przyporządkowuje człowiekowi jego dziadka ze strony matki.

Jeżeli f jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym, to wówczas można mówić o odwzorowaniu odwrotnym do f. Oznacza się je zwykle przez f^{-1}. Posiada ono tę własność, że superpozycje ff^{-1} oraz $f^{-1}f$ są odwzorowaniami tożsamościowymi, odpowiednio, zbioru Y, względnie zbioru X, na siebie.

Zanotujmy kilka prostszych przykładów odwzorowań. Przypuśćmy, że każdemu trójkątowi przyporządkowujemy liczbę dająca wielkość jego pola. Otrzymujemy wówczas odwzorowanie wszystkich trójkątów w zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych (jeśli do trójkątów zaliczymy także przypadek graniczny, mianowicie odcinek prostoliniowy, do którego może się sprowadzać trójkąt). Podobnie otrzymamy odwzorowanie, jeżeli każdemu sześcianowi przyporządkujemy liczbę wyznaczającą wielkość jego powierzchni całkowitej, tj. liczbę $6a^2$, o ile długość krawędzi sześcianu wynosi a. Dziedziną tego odwzorowania są, oczywiście, wszystkie sześciany. Przeciwdziedziną zaś — liczby rzeczywiste nieujemne. Jeżeli zarówno dziedzina, jak i przeciwdziedzina odwzorowania są zbiorem liczb, to odwzorowanie zazwyczaj zapisuje się w postaci pewnego wzoru. Np. warunek $y = 4x + 8$ określa odwzorowanie zbioru liczb rzeczywistych na siebie. Tutaj i dziedzina i przeciwdziedzina to po prostu zbiór liczb rzeczywistych. Odwzorowanie odwrotne do danego dane będzie przez warunek następujący: $x = \frac{y-8}{4}$. Nietrudno widzieć, że dwa ostatnie z podanych wyżej odwzorowań to odwzorowania wzajemnie jednoznaczne. Natomiast pierwsze spośród nich takim nie jest. Jest to widoczne, bowiem różne trójkąty mogą posiadać pole tej samej wielkości. Przeto w tym przypadku nie można mówić o odwzorowaniu odwrotnym do danego. Natomiast w dwu pierwszych przypadkach odwzorowania odwrotne istnieją.

Teoria odwzorowań jest opracowana w matematyce. Pojęcie odwzorowania zajmuje w niej miejsce naczelne. Matematyka, oczywiście, posiada swój własny język. Okazuje się, że posługując się pojęciem odwzorowania, można jedno zagadnienie przekształcić w drugie. Inaczej mówiąc, można wykazać, że różne zagadnienia są właściwie ukrytymi postaciami jednego i tego samego problemu. Przeto, jeżeli rozwiążemy jedno z nich, drugie staje się także rozwiązane. Należy tylko dokonać odpowiedniego przekształcenia, aby od jednej postaci problemu przejść do drugiej postaci. Otrzymuje się w ten sposób ekonomię wysiłku i jednocześnie głębszy wgląd w strukturę problemu. Wychwytuje się istotne elementy zagadnienia. Nie zatrzymujemy się na rzeczach drugorzędnych. Zarazem uzyskuje się w ten sposób uproszczenie języka matematyki, co jest rzeczą ważną. Poniżej zamieszczone rozważania odnosić się będą właśnie do zasygnalizowanego problemu.

4. Język a odwzorowanie

Zagadnienie to rozpatrzymy na konkretnych przykładach, by potem na ich podstawie móc sformułować pewne ogólne wnioski.

Weźmy np. zagadnienie rozwiązywania równań kwadratowych. Wszystkim jest dobrze znany wzór na pierwiastki równania kwadratowego zupełnego. Jeżeli równanie posiada postać $ax^2 + bx + c = 0$, to pierwiastki jego wylicza się ze wzoru $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Wiadomo dobrze, że jeśli wyrażenie podpierwiastkowe $b^2 - 4ac > 0$, to równanie posiada dwa różne pierwiastki rzeczywiste; jeżeli wspomniane wyrażenie jest równe zeru, to równanie posiada jeden pierwiastek; gdy natomiast jest ono ujemne, to równanie pierwiastków rzeczywistych nie posiada. Powstaje pytanie, czy nie można by uprościć powyższego rozwiązania przez sprowadzenie go do wyłączania pierwiastka kwadratowego. Bowiem proste równanie kwadratowe postaci $x^2 = n$ rozwiązuje się biorąc $x_{1,2} = \mp \sqrt{n}$ Na pytanie to można odpowiedzieć następująco. Zauważmy najpierw, że postać $ax^2 + bx + c = 0$, przez podzielenie przez a daje się sprowadzić do postaci $x^2 + px + q = 0$. Dzielić przez a możemy, ponieważ skoro mamy do czynienia z równaniem kwadratowym, to a nie może być zerem. Dokonujemy teraz dalszej operacji. Mianowicie podstawmy do naszego uproszczonego równania $x = y + r$. Otrzymamy wówczas: $(y + r)^2 + p(y + r) + q = 0$. Po wykonaniu działań i uporządkowaniu będzie: $y^2 + y(2r + p) + (r^2 + pr + q) = 0$. Jeżeli teraz przyjmiemy $r = -\frac{p}{2}$ to równanie nasze uprości się dalej i przyjmie formę: $y^2 + A = 0$, gdzie $A = 1/4 \cdot p^2 + q - 1/2 \cdot p^2 = q - 1/4 \cdot p^2$. A tę postać równania kwadratowego możemy już rozwiązać przez bezpośrednie wyłączenie pierwiastka kwadratowego z liczby $-A$. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie równania kwadratowego dla zmiennej y. Wystarczy dokonać odwzorowania $x = y - 1/2 \cdot p$, aby mieć rozwiązanie dla zmiennej x. Widzimy więc, że skorzystanie z pewnego odwzorowania pozwala nam istotnie uprościć rozwiązanie.

Rozważmy jeszcze podobny przykład odnoszący się do trójmianu kwadratowego $y = x^2 + px + q$. Przypuśćmy najpierw, że wychodzimy z bardzo prostej postaci tego rodzaju wielomianu, mianowicie ze wzoru $y = x^2$. Jeżeli teraz w miejsce y podstawimy $y + a$, zaś w miejsce x podstawimy $x + b$, to otrzymamy postać następującą: $y + a = (x + b)^2$. Po podniesieniu do kwadratu oraz przeniesieniu a z lewej strony na prawą będzie: $y = x^2 + 2bx + (b^2 - a)$. Jeżeli 2b oznaczymy przez p, zaś $b^2 - a$ przez q, to otrzymamy wyjściową postać trójmianu. Jaki stąd płynie wniosek? Po prostu, rozumowanie przeprowadzone przed chwilą poucza, że dowolny trójmian postaci $y = x^2 + px + q$, może być przy pomocy odwzorowania wyżej podanego [20] sprowadzony do prostej postaci $y = x^2$. Jeżeli więc będziemy znali własności wyrażenia $y = x^2$, to tym samym znać będziemy własności wszystkich trójmianów postaci $y = x^2 + px + q$. Oczywiście chodzi tu jedynie o te własności, które zachowują się przy rozpatrywanym przekształceniu. Inaczej mówiąc, chodzi tu o własności niezmiennicze ze względu na rozważane odwzorowanie.

Dwa powyższe przykłady zostały zaczerpnięte z matematyki elementarnej. Przykłady te są dość proste. Dlatego też może same w sobie niezbyt interesujące. Wydaje się jednak, że dobrze ilustrują myśl, o którą tu chodzi. A ta, niewątpliwie, jest warta uwagi. Podobnych przykładów, z zakresu matematyki wyższej, można podawać bardzo dużo. Ze względu na brak miejsca niesposób jest omawiać je dokładnie. Wymagałoby to bowiem przedtem przypomnienia pewnych wiadomości z matematyki wyższej. Dlatego też jedynie w charakterze ogólnych informacji oraz ilustracji zostaną wymienione poniżej pewne sytuacje odnoszące się do interesującego nas zagadnienia.

Weźmy pod uwagę dział matematyki zwany topologią. Jak wiadomo, topologia może być określona jako teoria niezmienników homeomorfizmów, tj. odwzorowań wzajemnie jednoznacznych oraz dwustronnie ciągłych (tzn. samo odwzorowanie jest ciągłe oraz odwzorowanie odwrotne jest także ciągłe). Otóż, z punktu widzenia topologii, kwadrat, trójkąt, elipsa niczym się nie różnią. Można bowiem homeomorficznie odwzorować dowolny kwadrat na dowolną elipsę, a tę na dowolny trójkąt. Biorąc złożenie homeomorfizmów, które nadal jest homeomorfizmem, otrzymamy automatycznie odwzorowanie homeomorficzne kwadratu na trójkąt. Skoro jest tak, to stąd wynika, iż wystarczy zbadać własności topologiczne jednego tylko kwadratu, powiedzmy o boku równym 1, aby wiedzieć wszystko nie tylko o dowolnym kwadracie, ale i o dowolnej

---

[20] Ściśle biorąc, należałoby, w tym przypadku, wziąć odwzorowanie odwrotne do rozpatrywanego. A więc zamiast x podstawiać $x-b$, zaś w miejsce y podstawić $y-a$, przy czym $2b = p$, zaś $b^2-a = q$.

elipsie i o dowolnym trójkącie. I o każdej innej figurze, która jest obrazem homeomorficznym kwadratu. Jest nim np. dowolny prostokąt, dowolny trapez i wiele innych. W ten sposób docieramy do bardziej podstawowych własności figur, anizeli to jest możliwe na gruncie geometrii metrycznej, gdzie utożsamia się jedynie figury tzw. przystające.

Jeżeli wzięlibyśmy np. tarczę koła oraz drugą tarczę koła i z tej ostatniej usunęli wnętrze mniejszego koła zawartego w niej, to powyższe dwie figury nie byłyby homeomorficzne. Byłyby one topologicznie różne. Widać więc, że można mówić o typach topologicznych figur. Dwie figury zaliczymy do jednego typu, jeżeli są one homeomorficzne, tzn. jeżeli pierwszą z nich można odwzorować homeomorficznie na drugą (co, jak już wiemy, jest równoważne powiedzeniu, że drugą z nich można odwzorować homeomorficznie na pierwszą). Powyższy podział figur na różne typy topologiczne jest poprawny z tego względu że relacja: F_1 jest obrazem homeomorficznym F_2, jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, czyli jest relacją równoważności. Wymieńmy jeszcze przykładowo kilka figur niehomeomorficznych. A więc powierzchnia kuli i powierzchnia torusa (mówiąc potocznie: powierzchnia dętki samochodowej), koło i kula, kwadrat i sześcian nie są homeomorficzne.

Weźmy teraz przykład z geometrii analitycznej. Wiadomo, że obrót płaszczyzny dokoła początku układu o kąt α wyraża się następującymi wzorami:

$$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha,$$
$$y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha.$$

Posługując się zapisem macierzowym, otrzymamy wyrażenie postaci:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Macierz złożoną z funkcji sinus oraz cosinus można dalej, zgodnie ze znanymi prawami, przekształcić jak następuje:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \cos\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ostatecznie więc przekształcenie wyjściowe przyjmuje postać następującą:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \left(\cos\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\alpha \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

W ten sposób widzimy, że badanie własności odwzorowania danego w postaci wyjściowej może być sprowadzone do badania własności odwzorowań określonych macierzami złożonymi z zer i jedynek. A to jest wielkie uproszczenie problemu.

Przyjrzyjmy się teraz zagadnieniu teorii skrzydła samolotowego. Chodzi tam o problem linii opływu skrzydła przez powietrze. Otóż jest rzeczą prostą zbadać wspomniane linie opływu w przypadku koła. Jeżeli teraz dokonamy tzw. odwzorowania konforemnego, to koło przejdzie na inną figurę, przy czym zostaną zachowane wielkości kątów, które tu właśnie są istotne. Wprawdzie odległości między punktami ulegną zmianie, a także linie proste przejdą na linie krzywe, ale obraz linii opływu będzie dalej liniami opływu. N. E. Żukowski zauważył że jeżeli wziąć odwzorowanie postaci $z + 1/z$, to koło przejdzie przy nim na figurę bardzo zbliżoną do profilu skrzydła samolotowego. W ten sposób trudne badanie odnośnie do skomplikowanego profilu skrzydła samolotu sprowadza się do, o wiele łatwiejszego, zagadnienia odnoszącego się do koła. Tego rodzaju problemy są podstawowe w hydrodynamice. Można tam znaleźć wiele przykładów ilustrujących omawiane tu zagadnienie.

W cybernetyce, w miejsce wyrażenia odwzorowanie, używa się często nazwy transformacja. I mówi się o transformowaniu informacji, zasilania. Nadto występuje tam powiązanie między pojęciem maszyny a pojęciem transformacji. Można więc, przy określonych warunkach, powiedzieć, iż maszyna ucieleśnia transformację [21]. Przeto, jeśli zbadamy własności odwzorowania, transformacji, znać będziemy tym samym własności maszyny. Jest to, oczywiście, wygodne z racji na łatwość „budowania" transformacji w porównaniu do wykonania realnej maszyny.

5. Uwagi zamykające

Zaprezentowane wyżej przykłady zastosowania odwzorowań pozwalają na sformułowanie następujących uwag.

Po pierwsze, stwierdzamy podstawową własność polegającą na uproszczeniu języka zagadnienia. Dobranie odpowiedniego odwzorowania odnośnie do rozpatrywanego problemu, pozwala na wybitne uproszczenie zagadnienia. Zamiast zajmować się problemem trudnym i skomplikowanym, otrzymujemy nową redakcję zagadnienia (istotnie równoważną wyjściowemu) o wiele prostszą i bardziej przejrzystą. Inaczej, w miejsce języka skomplikowanego otrzymujemy język prostszy i bardziej przejrzysty. Zagadnienie nic nie traci na swej wartości, język natomiast ulega wybitnemu uproszczeniu. Nie mamy więc tu do czynienia z banalizowaniem problemu. Zagadnienie pozostaje dawne. Tylko szata językowa ulega uproszczeniu. Jeżeli zbadamy zagadnienie w postaci uproszczonej, to stosując odpowiednie odwzorowanie, otrzymamy natychmiast odpowiedź na problem wyjściowy. Wydaje się, że jest to wynik interesujący.

Po drugie, łącznie z uproszczeniem problemu, zauważamy dalszą cechę charakterystyczną opisanego wyżej postępowania. Może ona być nazwaną cechą „ekonomiczną". Widzieliśmy, że posługując się odwzorowaniem oszczędzamy czas. W miejsce skomplikowanych rozważań otrzymujemy do badania postaci łatwiejsze, nadto za jednym zamachem badana jest, ściśle rzecz biorąc, cała klasa obiektów, nie jeden tylko. Mianowicie, bada-

---

[21] W. Ross Ashby, Wstęp do cybernetyki, Warszawa 1963, 53.

ne są te wszystkie obiekty które z danym należą do tego samego typu z punktu widzenia własności stosowanego odwzorowania. Tym samym więc docieramy do własności bardziej podstawowych, które interweniują w rozważanym problemie. W postaci wyjściowej zagadnienia są one, z reguły, ukryte, mało widoczne. Przeto posługiwanie się odwzorowaniem nie tylko upraszcza język, ale także umożliwia pogłębienie zagadnienia, przez zwrócenie uwagi na elementy istotne. Zatem badanie całej klasy przedmiotów, w miejsce jednego tylko, oraz możliwości wniknięcia w głąb interesującej nas problematyki w danym zagadnieniu, oto dalsze „korzyści" z posiłkowania się odwzorowaniami.

Już wymienione wyżej cechy związane ze stosowaniem odwzorowań wskazują na wagę naukową całego problemu. Można by, oczywiście, wymienić dalsze jeszcze. Nie chodzi tu o to. Celem artykułu jest zasygnalizowanie poruszonej tu problematyki i zwrócenie uwagi na jej wartość. Przykłady były brane z zakresu matematyki. Jest to zrozumiałe ze względu na to, że język matematyki jest najbardziej ścisłym językiem spośród języków naukowych. Wydaje się jednak, że nic nie stoi na przeszkodzie, aby mutatis mutandis móc przenieść powyższe rozważania na dowolny, wystarczająco precyzyjny, język naukowy. Trudno bowiem wyobrazić sobie taki język naukowy, do którego nie można by było, ex definitione, odnosić pojęcia odwzorowania. A więc, innymi słowy, nie można by było stosować przekształceń w celu otrzymywania równoważnych, lecz prościej postawionych zagadnień.

SPRACHE UND ABBILDUNG

Es gibt keine Wissenschaft ohne Sprache. Jede Wissenschaft bildet sich ihre eigene Sprache. Diese kann man als eine Art von Abbildung der Realität betrachten. Darum der Bergriff der Sprache und der des Modells stehen in Beziehungen zueinander. Für diesen Begriffen der Begriff der Abbildunk gemeinsam ist. Der Artikel erörtert einige Relationen zwischen der Sprache und der Abbildung.

Die logische Konzeption der Sprache, die hier genommen ist, sagt dass die Sprache eine Menge von Ausdrücken und ihnen nach einer Vorschrift zugeordnetem Sinn ist. Unter einer Abbildung einer Menge von Objekten in eine andere Menge von Objekten versteht man eine Zuordnung jeden Element der ersten Menge ein und nur ein Element der zweiten Menge. Im Artikel ist auch die Rede über die Abbildung von Abbildung und über die ein-ein-deutigen Abbildungen.

Weiter einige Beispiele der Vereinfachung der Problematik wegen der Anwendung der Abbildungen gegeben sind. Diese Beispiele aus dem Bereiche der elementaren Mathematik, der Topologie, der analytischen Geometrie, der Funktionentheorie und der Kybernetik ausgenommen sind.

Dabei ist auch der Druck auf die Zugehörigkeit des Merkmals das mit der Abbildung verbindet ist gegeben. Es geht nämlich über die Möglichkeit der Erörterung nicht nur einzelnen Objekt, sondern der ganzen Klasse von äquivalenten, unter einen gegebenen Aspekt, Objekte. Und auch über die Möglichkeit der Erörterung der tieferen Schichten der uns interessierten Problematik, mit der haben wir in der Frage zu tun.

Die Beispiele nur aus dem Gebiete der Mathematik ausgenommen sind. Es scheint aber, dass mutatis mutandis, existiert die Möglichkeit der Ausdehnung der Betrachtungen auf die anderen Bereiche der Wissenschaft. Jede wisseschaftliche Sprache kann man doch in viele Weisen abbilden.